

УДК 519.6

И.А. Астионенко, П.И. Гучек, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко
ПРИМЕНЕНИЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ СЕРЕНДИПОВЫХ МОДЕЛЕЙ
ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ
СТЕРЖНЕЙ

Постановка проблемы. Задача о кручении стержня произвольного сечения – это классическая задача теории упругости [1]. Решением этой задачи занимались Ш. Кулон, Т. Юнг, Л. Навье, О. Коши [2]. Основные уравнения задачи кручения призматического стержня произвольного поперечного сечения были получены методами теории упругости Б.Сен-Венаном и представлены в 1853 г. в Парижскую академию наук [1, 2, 3, 4]. Экспериментальный метод решения задачи кручения стержня на основе мембранной аналогии был предложен Л. Прандтлем в 1903 г. [1, 2, 3]. Расчет предельного крутящего момента при помощи аналогии с песчаной насыпью получен А. Надаи, Э. Треффтцем в 1923 г. Решения большого количества задач кручения однородных и неоднородных тел постоянного и переменного сечений приведены в монографии Н.Х. Арутюняна и Б.Л. Абрамяна [5]. Общее решение задачи о кручении стержня при помощи теории функций комплексного переменного изложено в монографии Н.И. Мусхелишвили, первое издание которой вышло в 1933 г. Впервые теорию функций комплексного переменного к решению плоской задачи теории упругости применил Г.В. Колосов в 1908-1909 гг. [2]. При решении задачи о кручении стержней эффективно используют численные методы расчета: метод конечных разностей, метод наилучших произведений, метод вариационных итераций [6].

Представляет интерес решение задачи методами конечных элементов в форме метода Ритца, метода Бубнова-Галеркина, метода Власова-Канторовича [6]. В [7] рассмотрена задача кручения стержня некругового сечения и приведено подробное решение методом конечных элементов с разбиением на треугольные элементы. Эту же задачу можно решить, используя четырехугольные конечные элементы серендипова семейства.

Анализ предшествующих публикаций. Серендиповы конечные элементы (СКЭ) возникли более 40 лет тому назад в связи с применением точечного преобразования четырехугольника в стандартный квадрат с последующим использованием изопараметрической аппроксимации. Двумерный серендипов КЭ – это четырехугольник с узлами на границе и системой базисных функций, которая соответствует этим узлам. Долгое время считалось, что на каждом серендиповом конечном элементе существует единственный базис – стандартный, который был получен алгебраическим способом [7]. В [8] авторы показывают новый комбинированный алгебро-геометрический метод построения базисных функций на серендиповых конечных элементах. С помощью этого метода впервые удалось получить альтернативные базисы с управляющим параметром на биквадратичном серендиповом конечном элементе (СКЭ-8). Наличие параметра в функциях СКЭ-8 позволяет оптимизировать вычислительные качества полученных альтернативных моделей. Особый интерес представляют нестандартные серендиповы элементы, обеспечивающие физически адекватные интегральные характеристики.

Цель работы – тестирование альтернативных серендиповых моделей биквадратичного КЭ с помощью задачи о кручении стержня некругового сечения и сравнение полученных результатов с точным решением [1].

Основная часть. Кручение - это деформация стержня, характеризующаяся взаимным поворотом поперечных сечений друг относительно друга вокруг оси стержня под действием пары сил, приложенных к его концам. При этом в поперечных сечениях тела возникает только один внутренний силовой фактор - крутящий момент. Крутящий момент пропорционален объему, охватываемому поверхностью напряжений. В результате действия крутящих моментов два поперечных сечения стержня, находящиеся на определенном расстоянии, поворачиваются на угол, который называется углом закручивания. На кручение работают валы и пружины растяжения-сжатия [2]. *М*

Рассмотрим задачу о кручении стержня квадратного сечения, которая приведена в [7]. Пусть даны: модуль сдвига $\mu = 0,8 \cdot 10^7 \text{ Н / см}^2$; относительный угол закручивания (угол крутки) 1^0 на 100 см ; площадь поперечного сечения 1 см^2 ; $K_{xx} = K_{yy} = 1$. Найти поверхность напряжений и крутящий момент, возникающие при свободном кручении стержня.

В математической физике эта задача известна как задача Дирихле для уравнения Пуассона [6]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2\mu\theta, \quad \phi|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Вариационная формулировка задачи о кручении стержня связана с минимизацией функционала:

$$\chi = \int_V \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - (2\mu\theta)\phi \right) dV. \tag{2}$$

Функционал может быть записан в виде:

$$\chi = \int_V \left(\frac{1}{2} \{g\}^T [D] \{g\} - (2\mu\theta)\phi \right) dV, \tag{3}$$

где $\{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix}$, $[D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}$.

Минимизация χ по $\{\Phi\}$ приводит к системе линейных уравнений:

$$\sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [g^{(e)}]^T [D^{(e)}] [g^{(e)}] dV = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T (2\mu\theta) dV, \tag{4}$$

где $\{g^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \dots \\ \Phi_r \end{Bmatrix}$, ; $[N_i, N_j, \dots, N_r]$ – функции формы КЭ;

$\{\Phi_i, \Phi_j, \dots, \Phi_r\}$ – узловые значения функции напряжений.

Сдвиговые напряжения, возникающие в стержне в результате действия крутящего момента M относительно оси z , могут быть вычислены в произвольной точке по формулам:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \tag{5}$$

Крутящий момент пропорционален объему, охватываемому поверхностью напряжений:

$$M = 2 \iint_{\Omega} \phi \, dx dy, \tag{6}$$

где Ω – сечение стержня.

В силу симметрии области решение в [6] выполняется на 1/8 части квадрата, заштрихованной на рис. 1. Разбиение заштрихованной области проводится способом триангуляции (рис. 2).

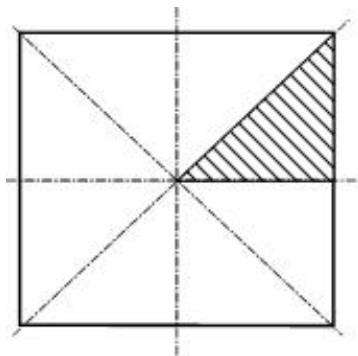


Рис. 1. Сечение стержня квадратного сечения

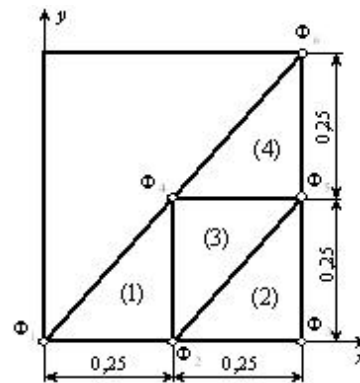


Рис. 2. Разбиение сечения на треугольные КЭ

В результате получено приближенное решение, показанное на рис. 3 [7].

В [1] эта задача решалась методом Ритца. На рис. 4 показана поверхность напряжений, которая соответствует решению для квадрата с площадью сечения 1 см^2 , если в качестве аппроксимирующей взять функцию в виде бесконечного тригонометрического ряда [1]:

$$\phi = \frac{32\mu\theta b^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m n (m^2 a^2 + n^2 b^2)}; \tag{7}$$

$$M = \frac{32\mu\theta}{\pi^4} \frac{8ab^3}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{m^2 n^2 (m^2 \alpha^2 + n^2)}; \tag{8}$$

В дальнейшем решение (7)-(8) будем называть точным.

Даже визуальное сравнение рис. 3 и рис. 4 говорит о плохой точности решения, полученного с помощью 4 треугольников. Недостатком применения линейных интерполяционных полиномов является невозможность получить градиенты как функции координат. Уточнить значения напряжений внутри стержня можно следующим образом: 1) увеличить количество треугольных элементов; 2) взять треугольники с большим числом узлов на границе; 3) применить конечные элементы в форме квадрата.

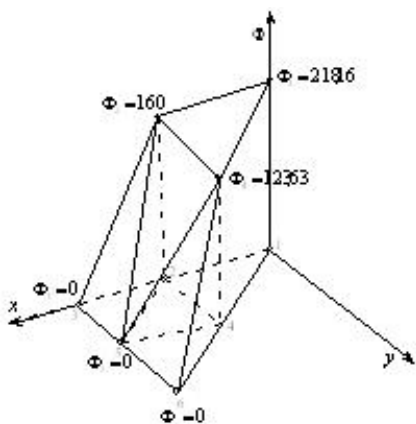


Рис. 3. Узловые значения функции напряжений при триангуляции

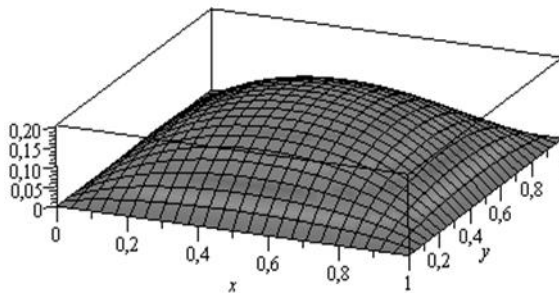


Рис. 4. Поверхность напряжений, задаваемая формулой (7) (по вертикальной координате масштаб 1:1000)

Для уточнения значений напряжений авторы статьи применили процедуру метода конечных элементов с биквадратичными конечными элементами (СКЭ-8) (рис. 5). Разбиение $1/4$ части сечения стержня на квадраты показано на рис. 6.

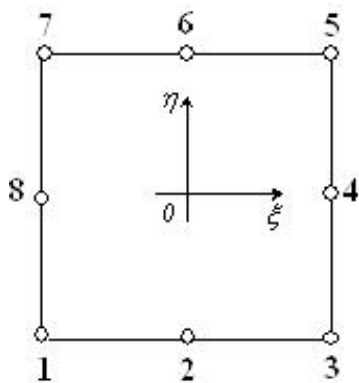


Рис. 5. СКЭ-8 ($|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$)

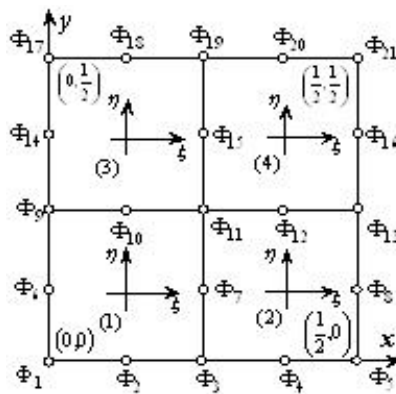


Рис. 6. Разбиение сечения на биквадратичные КЭ

Для биквадратичного КЭ комбинированным алгебро-геометрическим методом получены альтернативные базисные функции с управляющим параметром p [8]:

$$N_i = \frac{1}{16} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) [(36p - 1)(1 - \xi_i \xi - \eta_i \eta) + (36p + 3)\xi_i \xi \eta_i \eta], \tag{9}$$

$$i = 1, 3, 5, 7; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{16}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta) [(5 - 36p) + (36p + 3)\eta_i \eta], \tag{10}$$

$$i = 2, 6; \quad \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{16}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi) [(5 - 36p) + (36p + 3)\xi_i \xi], \tag{11}$$

$$i = 4, 8; \quad \xi_i = \pm 1.$$

Наличие точного решения позволяет оценить относительную ошибку, которая получена при расчете МКЭ с биквадратичными элементами. Относительная ошибка для функции напряжений вычисляется по формуле:

$$\Delta\phi = \frac{1}{n} \sum_i \frac{|\phi_i - \Phi_i|}{\phi_i} \cdot 100\%, \tag{12}$$

где ϕ_i – точное значение, полученное с помощью формулы (7); Φ_i – приближенное значение ($i = 1; 2; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 14; 15$).

Относительная ошибка при расчете крутящего момента вычислялась по аналогичной формуле:

$$\Delta M = \frac{|M - M_p|}{M} \cdot 100\%, \tag{13}$$

где M – точное значение, полученное с помощью формулы (8); M_p – приближенное значение.

Ошибки для функции напряжений и крутящего момента, которые получены МКЭ с использованием альтернативных функций при разных значениях параметра p приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значение параметра p	Значение M	Относительная ошибка, ΔM , %	Относительная ошибка, $\Delta\phi$, %
-0,50	193,928	1,166	3,950
-0,375	194,417	0,916	3,449
-0,25	195,113	0,562	2,559
-0,20	195,448	0,391	1,989
-0,125	195,881	0,170	0,704
-0,105	195,917	0,152	0,461
-0,10	195,914	0,153	0,439
Стандартный -1/12=-0,08(3)	195,855	0,183	0,409
-0,075	195,789	0,217	0,586
-0,05	195,362	0,435	1,371
-0,025	194,377	0,937	2,168
0	192,423	1,933	2,722
0,025	189,091	3,631	2,433
0,04	186,540	4,931	1,521
0,05	184,819	5,808	0,568
1/18=0,0(5)	183,924	6,264	0,110
0,065	182,591	6,943	1,219
0,075	181,519	7,490	2,485
0,10	180,415	8,052	5,177
0,125	180,785	7,864	6,808
0,25	184,974	5,729	8,062
0,375	187,210	4,589	7,571
0,50	188,393	3,986	7,180

На рис. 7 показана зависимость относительной ошибки при расчете крутящего момента M и функции напряжений ϕ от параметра p . По графику функции напряжений (круглые точки на рис. 7) видно, что при изменении параметра $p \in [-0,5; 0,5]$ минимум достигается дважды: при $p = -1/12$, что соответствует стандартному базису СКЭ-8 [7], и при $p = 1/18$ (этому базису соответствует матрица жесткости с минимальным следом [9]). Решение, полученное при $p = 1/18$, в четыре раза точнее.

Для относительной ошибки при вычислении крутящего момента (кривая, показанная крестиками на рис. 7) при изменении параметра $p \in [-0,5; 0,5]$ минимум достигается один раз: при $p = -21/200 = -0,105$. Стандартный базис дает решение такого же порядка точности.

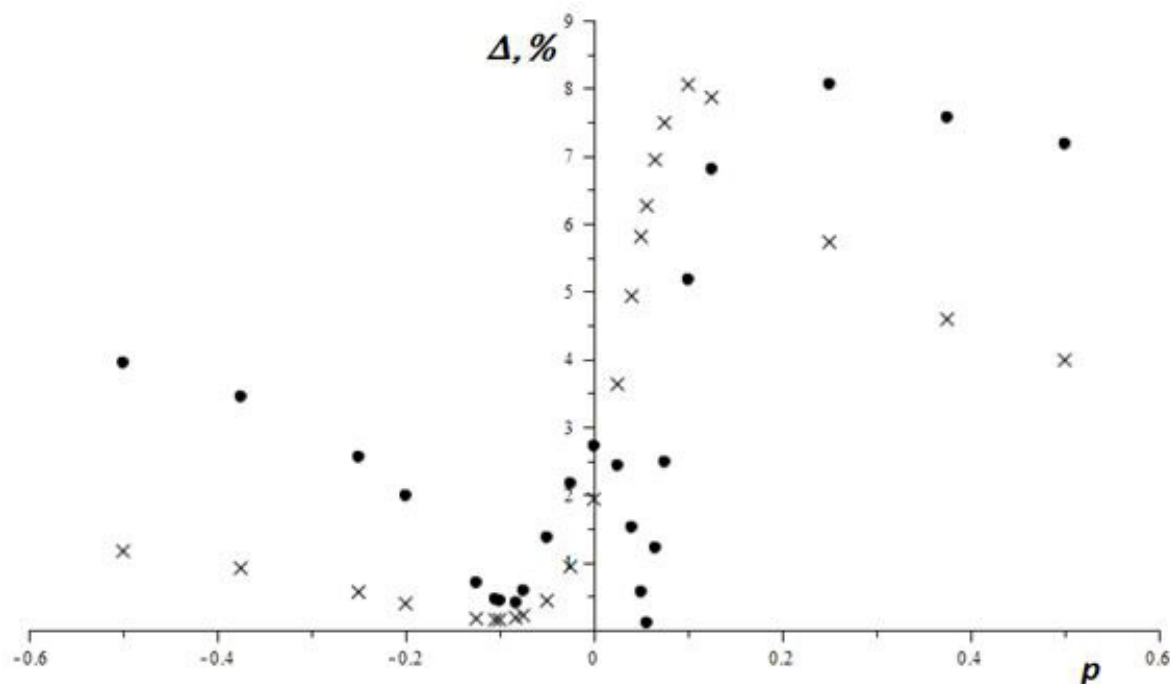


Рис. 7. Зависимости ошибки вычислений функции напряжений и крутящего момента от параметра p

Монотонное возрастание относительной погрешности крутящего момента в интервале от -0,1 до 0,1 озадачивает, поскольку авторы надеялись обнаружить в этом интервале второй минимум. Причину такого поведения погрешности пока установить не удалось.

Выводы. Доказано, что в задаче кручения стержня квадратного сечения методом конечных элементов новые альтернативные модели биквадратичного конечного элемента позволяют получить большую точность в сравнении с известным стандартным базисом этого элемента. Альтернативные базисы СКЭ-8 имеют преимущество и перед традиционной процедурой триангуляции в МКЭ, потому что для получения указанной точности необходимо использовать больше треугольных конечных элементов. Кроме того, в отличие от треугольных КЭ альтернативные серендиповы модели позволяют получить касательные напряжения как функции координат.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тимошенко С. П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко. — К. : Наукова думка, 1972.— 506 с.
2. Васильев Д. В. Электронное пособие по истории «Сопrotивления материалов» / М. : МАТИ-РГТУ им. К.Э.Циолковского // Режим доступа : <http://mysopromat.ru>.
3. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов / С. П. Тимошенко. — М. : Гиз. техн.-теор. литературы, 1957.— 536 с.
4. Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. / Б. Сен-Венан. — М. : Физматгиз, 1961.— С. 15–378.
5. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел. / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян. — М. : Физматгиз, 1963. — 686 с.
6. Ильин В.П. Численные методы решения задач строительной механики / В.П. Ильин, В.В.Карпов, А.М. Масленников. — Минск : Вышэйшая школа, 1990.— 350 с.
7. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М. : Мир, 1979. — 392 с.
8. Астионенко И. А. Обратные задачи серендиповых аппроксимаций / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко,

А. Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. — Херсон : ХНТУ, 2009. — Вып. 35. — С. 36–42.

9. Секулович М. Метод конечных элементов / М. Секулович. — М. : Стройиздат, 1993. — 664 с.

АСТЮНЕНКО Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси: методи і моделі відновлення функцій, принцип барицентричного усереднення.

ГУЧЕК Петро Йосифович – к.т.н., доцент кафедри інформаційних технологій Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси: методи відновлення функцій, принцип барицентричного усереднення.

ЛИТВИНЕНКО Олена Іванівна – к.т.н., доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси: методи і моделі відновлення функцій, принцип барицентричного усереднення.

ХОМЧЕНКО Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри вищої і прикладної математики Чорноморського державного університету ім. П. Могили (м. Миколаїв).

Наукові інтереси: ймовірнісні схеми випадкових блукань, методи відновлення функцій, принцип барицентричного усереднення.