**УДК 519.6**

**И.Е. ШУПИК**
Херсонский национальный технический университет

# ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

*В статье рассмотрена задача оптимизации целевой многокритериальной функции. Показано, что основная сложность в нахождении точек оптимума, в данной задаче, связана с недостаточным количеством связей, в сравнении с количеством переменных. Основываясь на использовании метода переменных ограничений, распространенного на все компоненты функции цели, предложен метод решения задачи с использованием гипотезы о выпуклости компонентов функции цели. Показано, что в такой постановке задача имеет решение как частный случай решения задачи оптимизации с использованием метода, основанного на принципе максимума Понтрягина.*

*Ключевые слова: многокритериальная, обобщенная функция цели, оптимизация, выпуклый анализ, принцип максимума Понтрягина.*

**I.Y. SHUPIK**
Kherson National Technical University, Kherson, Ukraine

## CONVEX PROGRAMMING IN THE PROBLEMS OF MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION

Abstract

*The article considers the problem of optimizing the target multiobjective function. It shows that the main difficulty in finding the optimum point in the given problem, associated with the lack of links, in comparison with the number of variables. Basing on the method of variable constraints common to all components of the objective function, we propose a method for solving the problem using the hypothesis of convexity of the components of the objective function. It is shown that in such a setting, the problem has a solution as a special case of optimization problem using the method based on Pontryagin maximum principle.*

*Keywords: multicriterion, generalized functions purpose, optimization, vypkuly analysis principle maksimuma Pontryagina.*

### Введение

Проблемы повышения эффективности управления сложными техническими и организационными системами требуют поиска компромисса между требованиями различных, зачастую имеющих противоположные направления доминирования, критериев эффективности. Это порождает задачу многокритериальной оптимизации [1-3], которую иногда в литературе называют задачей векторной оптимизации, поскольку из частных функций цели можно сформировать вектор, хотя это понятие имеет вполне определенный смысл в математике [4], физике [5] и предполагает осуществление с этим объектом специфических векторных операций.

С целью упрощения понимания определим данные задачи как задачи со многими функциями цели или как задачи векторной оптимизации.

### Состояние вопроса

Особенностью задач данного класса является отсутствие четко определенной цели, отражаемой функцией или функционалом [6].

Рассмотрим задачи, где необходимо учитывать сразу несколько функций цели. Таким образом, будем считать, что необходимо найти вектор $\boldsymbol{x}^*$, одновременно доставляющий экстремум (например, минимум, чего можно добиться элементарными преобразованиями целевых функций) всем компонентам вектора функции цели $\boldsymbol{F}$, компонентами которого являются частные функции цели $f_i(\boldsymbol{x})$:

$$\mathbf{x}^* \to \min f_i(\mathbf{x}), \qquad i = \overline{1,k}. \tag{1}$$

Несмотря на кажущуюся простоту постановки задачи, необходимо найти вектор $\boldsymbol{x}^*$, доставляющий минимум сразу всем функциям цели, задача не является тривиальной.

Однако каждая функция цели $f_i(\boldsymbol{x})$ имеет конкретное значение оптимума $\alpha_i$ , доставляемого точкой $\boldsymbol{x}^*$, и, следовательно, можно записать

$$\mathbf{x}^* \to \min f_i(\mathbf{x}) = \alpha_i, \qquad i = \overline{1,k}. \tag{2}$$

Или в векторной форме систему уравнений (2) можно записать в виде:

$$\min \mathbf{F} = \boldsymbol{\alpha}^*. \tag{3}$$

Так как вектор $\boldsymbol{\alpha}$ заранее не известен и имеет размерность $k$, мы имеем систему с $n+k$ неизвестными и только с $n$ связями, определяемыми необходимыми условиями оптимума

$$\mathbf{x}^* \to gradf_i(\mathbf{x})_{|\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0, \qquad i = \overline{1,k}. \tag{4}$$

Естественно, в силу недостаточности связей, условие (4) удовлетворяет множество $Y_{доп}$ значений вектора $\boldsymbol{x}$*.

В формулировке задачи (1) необходимо учесть связи. Это определило методы решения задачи:

1. Методы обобщенной функции цели. Здесь вводится вектор весовых коэффициентов $\boldsymbol{\beta}$, и задача сводится к задаче оптимизации скалярной функции цели $s(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \rangle$.
2. Методы приоритетов. Это метод поиска компромисса, в котором предполагается возможность ранжирования частных функций цели из тех или иных соображений, обычно экспертных оценок.
3. Методы компромиссов. Это методы анализа множества $Y_{доп}$ – допустимых точек оптимума, прежде всего методы экспертных оценок, позволяющие перейти от задачи поиска оптимума к задаче оценки и подбора экспертов, и Парето эффективные задачи, где выделяется множество $Y_{доп}$ и ищется точка оптимальная с учетом связи принадлежности допустимым точкам. Причем, если удается получить строгие неравенства, то такой оптимум считается сильным, так как на него не действуют остальные частные функции цели, как ограничения.
4. Метод изменения ограничений. Здесь предполагается, что одна из частных функций цели оптимизируется, а остальные выступают в роли ограничений. В процессе перебора комбинаций функции цели и ограничений выбирается задача, дающая наилучший результат.

Учитывая сложность задачи, рассмотрим более подробно методы, имеющие аналитическое обоснование.

Естественно, $\boldsymbol{x}^*$ должен принадлежать допустимому множеству, определяемому, как правило, ограничениями типа равенства:

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

и ограничениями типа неравенства [7]:

$$g_i(\mathbf{x}) \le 0, \qquad i = \overline{m+1,l}, \tag{6}$$

ограничения вида

$$a_i \le x_i \le b_i, \tag{7}$$

не самостоятельны, так как проверяются оба условия, и в результате получаем или ограничения равенства, или неравенства.

Таким образом, получаем стандартную задачу с ограничениями общего вида, усложненную требованием доставить минимум сразу нескольким функциям цели:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^* \to \min f_i(\mathbf{x}), \qquad i = \overline{1,k}; \\ \left.\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) = 0, \qquad i = \overline{1,m} \\ g_i(\mathbf{x}) \le 0, \qquad i = \overline{m+1,l} \end{aligned}\right\}. \end{gathered} \tag{8}$$

Известные решения данной задачи основаны на тех или иных компромиссах. Это, во-первых, метод главного критерия или компромиссов, где, какой критерий главный, необходимо решать на предварительном этапе анализа. Метод формирования единой целевой функции использует полиномиальные модели вида:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}); \\ \left.\begin{aligned} a_i > 0, \qquad i = \overline{1,k} \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1. \end{aligned}\right\}. \end{gathered} \tag{9}$$

Весовые коэффициенты определяют чувствительность единой функции цели $f$ к изменению частных функций цели $f_i$ :

$$\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial f_i}, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{1,k}. \tag{10}$$

Естественно, возможно назначение весов и «основываясь на условиях задачи». Также возможно использование позиномиальных моделей вида:

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{k} f_i^{\alpha_i}(\mathbf{x}); \qquad f_i > 0, \quad i = \overline{1,k}. \tag{11}$$

Или при наличии структурных связей и обратных связей выгодно использовать позиномиальную модель вида:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{p} C_j \prod_{i=1}^{k} f_i^{\alpha_{ij}}(\mathbf{x}); \qquad f_i > 0, \quad i = \overline{1,k}; \qquad C_j \ge 0, \quad j = \overline{1,p}. \tag{12}$$

Данный подход называется сигномиальной оптимизацией и базируется на методе геометрического программирования, позволяющем найти оптимальное распределение весов в функции цели.

Минимаксные методы основываются на формировании «контрольных показателей»:

$$f_i(\mathbf{x}) \le t_i \quad i = \overline{1,k} \qquad \left.\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1,m} \\ g_i(\mathbf{x}) \le 0, \quad i = \overline{m+1,l} \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

что обеспечивает неотрицательность разности $t_i - f_i(\mathbf{x})$, для всех допустимых $\mathbf{x}$.

В таком случае можно, в поисках сильного оптимума, перейти от метрики $C_0$ к максимуму минимального отклонения:

$$f(\mathbf{x}) = \max\min(t_i - f(\mathbf{x})), \quad i = \overline{1,k} \qquad \left.\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1,m} \\ g_i(\mathbf{x}) \le 0, \quad i = \overline{m+1,l} \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Приоритеты Парето – метод, основанный на использовании определения экстремума или, как сказано выше, на необходимом условии. Так в задаче

$$\mathbf{x}^* \to \min f_i(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1,k}; \qquad \left.\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1,m} \\ g_i(\mathbf{x}) \le 0, \quad i = \overline{m+1,l} \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

введем дополнительные ограничения

$$f_i(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_d), \quad i = \overline{1,s}; \qquad f_i(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_d), \quad i = \overline{s+1,k}. \tag{16}$$

При этом ограничение типа неравенства определяет нахождение оптимума внутри области. В таком случае, к допустимым точкам относим точки, для которых выполняются условия строгого неравенства. Выполнение неравенства опишем как выполнение предпочтения. Перебор допустимых точек приводит к локальному оптимуму, который называется эффективным решением или Парето – оптимальным решением. Если одно или несколько ограничений не удается перевести в строгие неравенства, то решение называется слабо эффективным.

Естественно, что для задачи (14, 15) возможно применение стандартных процедур, возможно, использовать исключение ограничений, метод штрафных функций или метод Лагранжа с введением штрафной функции:

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\sigma) = f(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle + \frac{\sigma}{2}\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2, \tag{17}$$

что позволяет переходить к итерационным процедурам поиска оптимума.

Определенный смысл имеет предварительная сортировка или лексикографическое упорядочивание критериев.

Таким образом, на основе изложенного, можно сделать следующие выводы:

- сложность задачи векторной оптимизации заключается в недостатке количества связей, что не позволяет найти точку оптимума без введения дополнительных условий, например условия компромисса;
- введение связи, переводящей вектор цели в скаляр, естественно снимает проблему, но и одновременно превращает задачу в простую задачу с одной функцией цели;
- используемые методы предполагают либо экспертную оценку веса критерия, либо основаны на принятии компромисса;
- существует необходимость решения задачи векторной оптимизации без использования гипотезы компромисса.

**Цель статьи**

Целью данной работы является попытка построения процедуры векторной оптимизации, основываясь на предположении выпуклости частных функций цели.

**Основная часть**

Будем считать, что элемент системы имеет известную ему аналитическую функцию цели $f_i(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ – вектор состояния объекта.

В таком случае, задача оптимального, с точки зрения объекта, управления организационной системой выглядит как задача многокритериальной оптимизации:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^* \to \min f_i(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1,k}; \\ \left.\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad & i = \overline{1,m} \\ g_i(\mathbf{x}) \le 0, \quad & i = \overline{m+1,l} \end{aligned}\right\}, \end{gathered} \tag{18}$$

где k – количество элементов в объекте;

$\mathbf{x}$ – вектор состояния объекта, dim($\mathbf{x}$)=n;

$g_i(\mathbf{x})$ – функция ограничения для элемента объекта.

Рассмотрим задачу оптимизации частной функции цели, зависящей от одной переменной. При этом считаем, аналогично (2), что находимся в окрестности точки оптимума и все остальные частные функции цели достигли минимального значения

$$f_i(\mathbf{x}^*) = \alpha_i, \quad i \ne s; \qquad i = \overline{1,k}. \tag{19}$$

В таком случае задача принимает вид обычной задачи с дополнительными ограничениями

$$\begin{gathered} x^* \to \min f_i(x), \quad i = s; \\ \left.\begin{aligned} g_i(x) = 0, \quad & i = \overline{1,m} \\ g_i(x) \le 0, \quad & i = \overline{m+1,l} \end{aligned}\right\} \\ f_i(x) = \alpha_i, \quad i \ne s; \qquad i = \overline{1,k}. \end{gathered} \tag{20}$$

Собственно эта задача имеет известное решение [8]. Функция Лагранжа, в этом случае для $s$=0 имеет вид

$$L(x,\boldsymbol{\lambda}) = f_0(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (f_j(x) - \alpha_j). \tag{21}$$

И условия дополняющей не жесткости:

$$\lambda_i g_i(x) = 0, \qquad i = \overline{m+1, l}. \tag{22}$$

Эта частная задача при известных всех $g(\boldsymbol{x})$ решения не имеет, так как остается неизвестным вектор $\boldsymbol{\alpha}$ правых частей ограничений, связанных с требованием оптимальности частных функций цели.

С другой, опираясь на требование оптимальности всех частных целевых функций, условие (22) позволяет записать полностью $k$ функций Лагранжа для каждой из частных целевых функций:

$$L_i(x,\boldsymbol{\lambda}_i) = f_i(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \lambda_{ij} (f_j(x) - \alpha_j). \tag{23}$$

Таким образом, необходимое условие экстремума в данной задаче принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_i(x,\boldsymbol{\lambda}_i)}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1,k}; \\ &g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1,m}; \\ &f_i(x) = c_i, \quad i \neq s; \qquad i = \overline{1,k}; \\ &\lambda_i g_i(x) = 0, \quad i = \overline{m+1,l}. \end{aligned} \tag{24}$$

Полученные условия только добавили требование одновременной оптимальности для всех элементов системы. По-прежнему система (24) имеет множество решений, и число связей меньше числа переменных.

Но если предположить выпуклость всех частных функций цели, что не является стандартным приемом, получаем возможность перейти к рассмотрению частных задач с использованием двойственности, что дает дополнительную связь, необходимую для нахождения оптимума [9]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_i(x,\boldsymbol{\lambda}_i)}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1,k}; \\ &g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1,m}; \\ &f_i(x) = \alpha_i, \quad i \neq s; \qquad i = \overline{1,k}; \\ &\lambda_i g_i(x) = 0, \quad i = \overline{m+1,l}; \\ &\left.\begin{aligned} &x^* \xrightarrow[\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\lambda}_i^*]{} \min L_i(x,\boldsymbol{\lambda}_i) \\ &\boldsymbol{\lambda}_i^* \xrightarrow[x = x^*]{} \max L_i(x,\boldsymbol{\lambda}_i) \end{aligned}\right\}, \quad i = \overline{1,k};. \end{aligned} \tag{25}$$

Так как ограничения **g=0** и **g≤0** не вызывают затруднения, предварительно для упрощения рассмотрим задачу, в которой частные подзадачи не имеют ограничений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_i(x,\boldsymbol{\lambda}_i)}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1,k}; \\ &f_i(x) = \alpha_i, \quad i \neq s; \qquad i = \overline{1,k}; \\ &x^* \xrightarrow[\lambda = \lambda^*]{} \min L_i(x,\boldsymbol{\lambda}_i) \quad i = \overline{1,k}. \end{aligned} \tag{26}$$

Эта задача уже может иметь решение, так как количество связей равно количеству переменных. Рассмотрим простой пример:

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = (x-1)^2. \tag{27}$$

Введем ограничения, определяющие оптимальность частных функций цели:

$$f_1(x) - \alpha_1 = 0, \qquad f_2(x) - \alpha_2 = 0. \tag{28}$$

Функции Лагранжа в данном примере:

$$\begin{aligned} &L_1(x, \lambda_{12}) = x^2 - \lambda_{12}((x-1)^2 - \alpha_2); \\ &L_2(x, \lambda_{21}) = (x-1) - \lambda_{21}(x^2 - \alpha_1). \end{aligned} \tag{29}$$

Необходимые условия оптимума:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_1}{\partial x} = 2x - \lambda_{12} 2(x-1) = 0; \\ &\frac{\partial L_2}{\partial x} = 2(x-1) - \lambda_{21} 2x = 0; \\ &x^2 = \alpha_1; \\ &(x-1)^2 = \alpha_2; \\ &x^* \xrightarrow[\lambda=\lambda^*]{} \min L_1(x, \lambda_{12}) = x^2 - \lambda_{12}((x-1)^2 - \alpha_2) = 0; \\ &x^* \xrightarrow[\lambda=\lambda^*]{} \min L_2(x, \lambda_{21}) = (x-1)^2 - \lambda_{21}(x^2 - \alpha_1) = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Из связи

$$\begin{aligned} &2x - \lambda_{12} 2(x-1) = 0; \\ &2(x-1) - \lambda_{21} 2x = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

получаем $\lambda_{12}=1/\lambda_{21}$. Так как частные задачи не имеют ограничений $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &x^2 - \frac{x}{(x-1)}((x-1)^2 - \alpha) = 0; \\ &(x-1)^2 - \frac{(x-1)}{x}(x^2 - \alpha) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Откуда получаем простое уравнение:

$$(x-1)^2 = x^2. \tag{33}$$

Следовательно, оптимум достигается в точке $x^*=1/2$, и функции цели имеют значение в оптимуме, равное $\alpha^*=1/4$.

Таким образом, предположение выпуклости частных функций цели позволяет получить оптимальное решение задачи без привлечения компромиссов и экспертных оценок.

В общем случае состояние объекта описывается вектором, и игнорировать дополнительные ограничения (5, 6) не всегда удается.

В таком случае функция Лагранжа зависит от вектора состояния и векторов множителей Лагранжа:

$$L_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_i) = f_i(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \lambda_{ij}(f_j(\mathbf{x}) - \alpha_j). \tag{34}$$

Или вводя векторы:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}_i)=\begin{bmatrix} L_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}_i) \\ \vdots \\ L_k(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}_i) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}. \tag{35}$$

И матрицу множителей Лагранжа λ:

$$\lambda=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & 0 & \cdots & \lambda_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k1} & \cdots & \lambda_{k,k-1} & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_g=\begin{pmatrix} \lambda_{11}^g & \cdots & \lambda_{1m}^g \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{k1}^g & \cdots & \lambda_{km}^g \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Можем записать функцию Лагранжа:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{f}(\mathbf{x})-\lambda_g\mathbf{g}(x)-\lambda(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\alpha}). \tag{37}$$

Тогда необходимые условия оптимума принимают вид

$$\begin{aligned} &grad\,\mathbf{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{0}; \\ &\lambda_i g_i(x)=0, \quad i=\overline{m+1,l}; \\ &\mathbf{x}^* \xrightarrow[\lambda=\lambda^*]{} \min \mathbf{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}). \end{aligned} \tag{38}$$

Таким образом, данная задача сводится к специальному случаю использования принципа максимума Понтрягина.

**Выводы**

Исходя из изложенного материала, можно сделать следующее заключение:

1. Использование гипотезы выпуклости всех частных функций цели – компонентов вектора цели, позволяет найти алгоритм решения задачи без привлечения гипотезы о компромиссах и экспертных оценках.
2. Полученный алгоритм является частным случаем применения принципа максимума Понтрягина.
3. Предложенный алгоритм доставляет наилучшее решение компоненту с наилучшей, в смысле соответствия задаче, функцией цели.

**Литература**

1. Steuer R.E. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computations, and Application. – New York: John Wiley & Sons
2. Sawaragi Y. Theory of Multiobjective Optimization (vol. 176 of Mathematics in Science and Engineering). – Orlando, FL: Academic Press Inc.
3. Кини Р.Л. Принятие решений при многих критериях / Р.Л. Кини, Х. Райфа, - М.: Радио и связь. – 1981. – 560 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров, – М.: Наука. – 1969. – 368 с.
5. Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры / А.Л. Фрадков, СПб.: Наука, 2003. – 208 с.
6. Соболь И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Дрофа, 2006. – 175 с.
7. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. Пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высш. шк., 2002. –544 с.
8. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука 1980. – 320 с.
9. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе. – М.: Наука, 1983. – 392 с.

**References**

1. Steuer R.E. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computations, and Application.- New York: John Wiley & Sons. –

2. Sawaragi Y. Theory of Multiobjective Optimization (vol. 176 of Mathematics in Science and Engineering). – Orlando, FL: Academic Press Inc.

3. Kini R.L. Prinyatiye resheniy pri mnogikh kriteriyakh / R.L. Kini, KH. Rayfa, - M.: Radio i svyaz'. – 1981. – 560 s.

4. Venttsel' Ye.S. Teoriya veroyatnostey / Ye.S. Venttsel', L.A. Ovcharov, - M.: Nauka. – 1969. – 368 s.

5. Fradkov A.L. Kiberneticheskaya fizika: printsipy i primery / A.L. Fradkov, SPb.: Nauka, 2003. – 208 s.

6. Sobol' I.M. Vybor optimal'nykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriyami. -M.: Drofa, 2006. -175 s.

7. Panteleyev A.V. Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh: Ucheb. Posobiye / A.V. Panteleyev, T.A. Letova. – M.: Vyssh. shk., 2002. -544 s.

8. Pshenichnyy B.N. Vypuklyy analiz i ekstremal'nyye zadachi / B.N. Pshenichnyy. – M.: Nauka 1980. – 320 s.

9. Pontryagin L.S. Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov / L.S.Pontryagin, V.G. Boltyanskiy, R.V. Gamkrelidze. – M.: Nauka, 1983. – 392 s.