

УДК 539.3

Н. О. ЯРЕЦЬКА

Хмельницький національний університет

СТАТИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА ТА ШАРУ, ЩО ЛЕЖИТЬ БЕЗ ТЕРТЯ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ

У рамках лінеаризованої теорії пружності представлена осесиметрична задача про тиск пружного циліндричного штамп на шар з початковими напруженнями. Дослідження подані в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Отримані співвідношення для компонентів вектора переміщень і тензора напружень для випадку рівних коренів. Розглянуто питання про вплив початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль у шарі та штампі.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, перетворення Ханкеля, інтегральне рівняння типу Фредгольма, метод послідовних наближень, потенціал Бартенєва-Хазановича.

N. A. IARETSKA

Khmelnytskyi National University

THE STATIC CONTACT PROBLEM FOR THE PRESTRESSED CYLINDRICAL DIE AND LAYER LYING WITHOUT FRICTION ON A RIGID FOUNDATION

Annotation

Introduction and aim: The article deals with the problem of the elastic cylindrical die pressure on the layer with initial stresses within the framework of linearized elasticity theory. In general, the research was carried out for the theory of great initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential.

Material and methods: The mode of deformation in the elastic layer with initial stresses is defined with the help of harmonic functions by way of Henkel integrals. It reduces the task to Fredholm equations and the method of consecutive approximations.

Results: We obtained a correlation between the components of potential vector and tensor of deformations in the case of equal roots. The solutions are defined by way of lines with the help of infinitive system of constants, derived from the regular and linear algebraic system.

Conclusion: The research investigates the influence of initial stresses on the law of distribution of contact stresses in the layer and die with initial stresses.

Keywords: the linearized elasticity theory, initial (residual) tension, Henkel integrals, the task to Fredholm equations, the method of consecutive approximations, the potential of Bartenev-Khasanovich.

Вступ і мета дослідження. Велика увага у механіці суцільних середовищ приділяється дослідженню контактної взаємодії твердих деформованих тіл, що пов'язане із проблемою визначення їх напружено - деформованих станів. Аналіз результатів цих досліджень дозволяє сформулювати умови на межі поверхонь контактуючих деформованих тіл, що відповідають дійсності. Незважаючи на існуючі досягнення у теорії контактної взаємодії пружних тіл, все ще залишається недостатньо розроблений ряд моментів, серед яких – врахування залишкових напружень у тілах на закон розподілу тиску в місцях їх дотику, що дозволить більш ефективно враховувати зносостійкість матеріалів шляхом правильної оцінки запасів міцності та достатньо знижувати їх матеріалоемність, зберігаючи у цілому потрібні функціональні характеристики.

Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль у пружних півплощині й півпросторі при їх контактній взаємодії з пружними штампами досліджено у статтях [1, 2]. У цих роботах подано загальний метод розв'язку контактних задач для півплощини та півпростору з початковими напруженнями, що взаємодіють з пружними тілами. Задача про тиск жорсткого штамп на пружний шар з початковими напруженнями розглянута в [3], а для часткового виду пружного потенціалу нестисливих тіл у [4]. У [5] розглядається загальний підхід до розв'язку задач контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями у рамках лінеаризованої теорії пружності, де були розглянуті випадки деформації нескінченного пружного півпростору (шару) під дією штампів різної форми. Детальний огляд досліджень з контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями і без них представлений статтями О. М. Гузя, В. Б. Рудницького, С. Ю. Бабича [6].

Введемо три системи координат: лагранжеву систему (x_1, x_2, x_3) , яка співпадає з декартовою у природному стані, декартову систему (y_1, y_2, y_3) у початковому стані та циліндричну систему (r, θ, z_i) , де $z_i = y_3 n_i^{-0,5}$ ($i = 1, 2$).

Приймемо, що початковий стан у тілах є однорідним:

$$y_i = \lambda_i x_i, \quad \lambda_i = const, \quad y_i = x_i + U_i^0, \quad U_i^0 = \delta_{in} (\lambda_i - 1) x_i \quad (i, n = 1, 2, 3) \quad (1)$$

де λ_m – коефіцієнт видовження вздовж координатної осі, δ_{im} – символ Кронекера.
З виразів (1), для узагальнених початкових напружень маємо

$$S_{im}^0 = \delta_{im} S_{mm}^0; \quad S_{mm}^0 = const \quad (m, n = 1, 2, 3).$$

Основні рівняння для стисливих тіл у системі координат (y_1, y_2, y_3) мають вигляд:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta \quad (i, m, \alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

Для нестисливих тіл основне рівняння та умова нестисливості представлені співвідношеннями:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m} \partial / \partial y_\alpha p' = 0, \quad q'_{\alpha m} \partial U_\alpha / \partial y_m = 0, \quad q'_{\alpha m} = \lambda_\alpha q_{\alpha m},$$

$$L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta \quad (i, m, \alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

Вирази для компонент тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл при $y_i = const$ ($i=1, 2, 3$):

$$Q_{ij}' = \begin{cases} \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} - \text{для стисливих тіл,} & \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}, \\ \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p' - \text{для нестисливих тіл,} & \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}, \end{cases}$$

де $\omega'_{im\alpha\beta} = \omega'_{im\alpha\beta}(S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$, $\kappa'_{im\alpha\beta} = \kappa'_{im\alpha\beta}(S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$ – складові тензора модулів пружності четвертого порядку.

Будемо розглядати пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропних тіл, вважатимемо, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформівному стані.

Припускається, що пружний (скінченний) циліндричний штамп та шар виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів та взаємодіють на площі однієї з основ штамп.

Зробимо припущення, що початкові стани у шарі та штампі однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [5]. Крім того, дія штамп викликає в шарі невелике збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$$

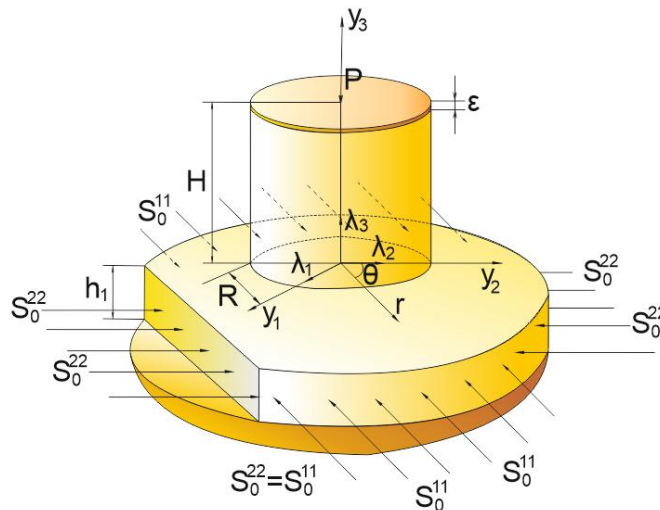


Рис. 1. Циліндричний штамп і шар з початковими (залишковими) напруженнями.

Постановка задачі. Нехай пружний циліндричний штамп радіуса R і висотою H з початковими напруженнями (рис. 1.) втискається у пружний шар під дією сили P після виникнення там початкового деформованого стану. h_1 - товщина шару в початковому деформівному стані, яка пов'язана з товщиною h_2 у недеформівному стані відношенням $h_1 = \lambda_3 h_2$. Збурення під дією сили P , що прикладена до вільного торця циліндричного штамп, викликають його переміщення у напрямку осі Oy_3 на сталу величину ϵ . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил. Причому, шар лежить на жорсткій основі без тертя.

У системі кругових циліндричних координат (r, θ, z_i) ($i = \overline{1,2}$) такі постановці відповідають граничні умови:

1) на торці пружного штамп $z_i = H v_i^{-1}$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = \overline{1,2}$):

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R), \quad (2)$$

2) на межі пружного шару в ділянці контакту $z_i = 0$, ($i = \overline{1,2}$):

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad Q_{33}^{(1)} = Q_{33}^{(2)}, \quad Q_{3r}^{(1)} = Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R), \quad (3)$$

3) на межі пружного шару поза ділянкою контакту $z_i = 0$, ($i = \overline{1,2}$):

$$Q_{33}^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (R \leq r < \infty), \quad (4)$$

4) на боковій поверхні пружного штамп $r = R$:

$$Q_{rr}^{(1)} = 0, \quad Q_{3r}^{(1)} = 0, \quad (0 \leq z_i \leq H v_i^{-1}) \quad (5)$$

5) На нижній поверхні шару з початковими напруженнями, що лежить без тертя на недеформованій основі $z_i = -\frac{\lambda_3 h_2}{v_i} = -\frac{H}{v_i}$, ($i = \overline{1,2}$):

$$u_3^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r < \infty), \quad (6)$$

Для визначення напружено-деформованого стану у пружному циліндрі, який втискається у пружний шар з початковими напруженнями, використовуємо вирази [7] для компонент вектора переміщення і тензора напруження для стисливих і нестисливих тіл у випадку рівних коренів визначального рівняння [5].

Напружено-деформований стан у пружному шарі з початковими напруженнями випишемо через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля [7]. Задовольнивши граничні умови (2) – (6), після ряду перетворень матимемо:

$$u_r^{(2)} = \varepsilon(\pi\theta_3)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_+^1; S_1^1; N_0^1; K_0^1; 1; 1-s_0), \quad u_3^{(2)} = m_1 \varepsilon (\pi\theta_3 v_1)^{-1} \tilde{T}^1(\Omega_-^1; S_1^0; N_0^0; K_0^0; s_1; s_1-s_0) \quad (7)$$

$$Q_{33}^{(2)} = \frac{(1+m_1)\varepsilon l C_{44}}{\pi\theta_3 R} \tilde{T}^1(\Omega_+^1; S_2^0; N_1^0; K_1^0; s; s-s_0), \quad Q_{3r}^{(2)} = -\frac{(1+m_1)\varepsilon C_{44}}{\pi\theta_3 R v_1} \tilde{T}^1(\Omega_-^1; S_2^1; N_1^1; K_1^1; s_0; 0)$$

де $\tilde{T}^1(\Omega_{\pm}^l; S_{m_1}^n; N_{m_2}^n; K_{m_3}^n; k; a) = (1+a_0) \left\langle (1-\chi_0)\Omega_{\pm}^l(S_{m_1}^n; 0; k; a; 0) - \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{**} \Omega_{\pm}^l(S_{j+m_1}^n; 0; k; a; 0) - \right.$
 $\left. - \frac{2(m_2-1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \Omega_{\pm}^l(N_{m_2}^n; 0; k; a; 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; \mu_k; k; a; 0) + \right.$
 $\left. + \frac{(m_2-1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; i\gamma_k v_1 R; k; a; 0) \right\rangle + \sum_{\tau=1}^{\infty} a_{\tau} \left\langle (1-\chi_0)\Omega_{\pm}^l(S_{m_1}^n; 0; k; a; v_1 \tau) - \right.$
 $\left. - \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{**} \Omega_{\pm}^l(S_{j+m_1}^n; 0; k; a; v_1 \tau) - \frac{2(m_2-1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \Omega_{\pm}^l(N_{m_2}^n; 0; k; a; v_1 \tau) + \right.$
 $\left. + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; \mu_k; k; a; v_1 \tau) + \frac{(m_2-1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \Omega_{\pm}^l(K_{m_3}^n; i\gamma_k v_1 R; k; a; v_1 \tau) \right\rangle,$

$$\Omega_{\pm}^1(\hat{L}_m^n, \mu, k, a, \theta) = (A_1^{01} + kA_2^{01} + a)\hat{L}_m^n(\rho, \mu, z_1 R^{-1} - \theta) + (A_1^{11} + z_1 R^{-1}(A_2^{01} + 1))\hat{L}_{m+1}^n(\rho, \mu, z_1 R^{-1} - \theta) +$$

$$+(A_1^{21} + A_2^{11})\hat{L}_m^n\left(\rho, \mu, \frac{2h_1}{Rv_1} + \frac{z_1}{R} - \theta\right) + \left(A_1^{31} + \frac{z_1}{R} A_2^{11}\right)\hat{L}_{m+1}^n\left(\rho, \mu, \frac{2h_1}{Rv_1} + \frac{z_1}{R} - \theta\right) \pm$$

$$\pm(A_1^{01} + kA_2^{01} + a)\hat{L}_m^n\left(\rho, \mu, -\frac{z_1}{R} - \theta\right) \pm \left(A_1^{11} - \frac{z_1}{R}(A_2^{01} - 1)\right)\hat{L}_{m+1}^n\left(\rho, \mu, -\frac{z_1}{R} - \theta\right) \pm$$

$$\pm(A_1^{21} + A_2^{11})\hat{L}_m^n\left(\rho, \mu, \frac{2h_1}{Rv_1} - \frac{z_1}{R} - \theta\right) \pm \left(A_1^{31} - \frac{z_1}{R} A_2^{11}\right)\hat{L}_{m+1}^n\left(\rho, \mu, \frac{2h_1}{Rv_1} - \frac{z_1}{R} - \theta\right), A_1^{31} = \frac{h_1 A_1^{21}}{s_0 v_1 R},$$

$$S_n^m(\rho; z) = \int_0^\infty \eta^{n-2} \sin \eta e^{-z\eta} J_m(\eta\rho) d\eta, K_n^m(\rho; \mu_k; z) = \int_0^\infty \eta^n \psi_0(\eta, \mu_k) e^{z\eta} J_m(\eta\rho) d\eta,$$

$$\theta_3 = \frac{m_1(s_1 - s_0)}{v_1},$$

$$\theta_4 = \frac{v_1(m_2 - 1) - m_1 s_0}{n_1}, N_n^m(\rho; z) = \int_0^\infty \eta^n \psi_1(\eta, 0) e^{z\eta} J_m(\eta\rho) d\eta, A_2^{11} = \frac{2s_1 A_2^{01}}{s_0 + s_1}, A_1^{01} = \frac{s_0(s_0 - s_1)}{s_0 + s_1},$$

$$\theta_2 = E \left(\frac{8m_1}{n_1} (1 + H) - \frac{4H}{v_1} + (1 - m_2) \frac{R^2}{H} \right), A_1^{11} = \frac{2h_0 s_0}{v_1 R (s_0 + s_1)}, A_1^{21} = \frac{2s_0(s_0 - s_1)(s_0 + 2s_1)}{(s_0 + s_1)^2}, A_2^{01} = \frac{s_0 - s_1}{s_0 + s_1}.$$

У вирази (7), що отримані в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл, входять, також коефіцієнти $n_1, n_2, m_1, m_2, C_{44}, l_1, b_1^{(k)}$. Значення цих коефіцієнтів для стисливих і нестисливих тіл подані у [5, 8].

Метод розв'язування. Використовуючи розв'язки для циліндра з [7] і задовольняючи граничним умовам (2) – (6), знаходимо власні значення задачі:

$$\gamma_k = \frac{2\pi k}{H}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad (k \in Z)$$

Не зупиняючись на викладках, скажемо, що невідома функція $F(\eta)$, що входить у вирази вектора переміщень і тензора напружень для попередньо напруженого шару, визначається в результаті зведення задачі до парних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду із застосуванням методу послідовних наближень при $h > 1, \lambda_1 > \lambda_{kr}$. Цей метод є збіжним, враховуючи дослідження проведені у [5]. Тому, розв'язок представлено у вигляді рядів через нескінченну систему констант. Ці константи визначаються з системи регулярних [5] лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\vartheta_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

Коефіцієнти системи (8) представлені для стисливих і нестисливих тіл у випадку рівних коренів у [7, 8]. Визначивши невідомі константи χ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) з (8), можна обчислити силу P , переміщення і напруження у пружних штампі [7, 8] та шарі з початковими напруженнями по формулах (7).

При обчисленні напружень та переміщень для шару з початковими напруженнями більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються. Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції розкладаємо у ряди за степенями h^{-1} , що дозволяє обчислити коефіцієнти (8) наближено [6].

Чисельний розв'язок. Система (8) була розв'язана методом редукції при наступних значеннях параметрів: $k=32, E=3.92, \nu=0.5$.

Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль для задачі про тиск пружного циліндричного штампі на пружний шар у випадку потенціала Баргенєва-Хазановича, зображується на рис.2. – рис.5.

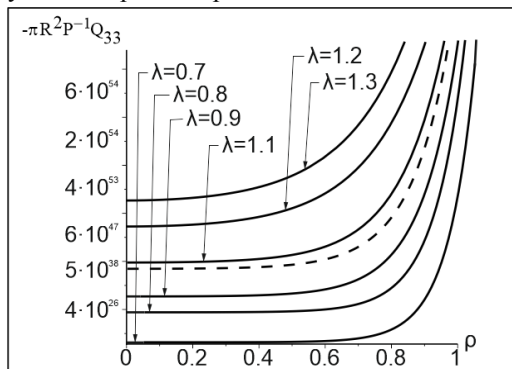


Рис. 2. Контактні напруження для пружного циліндра з початковими напруженнями

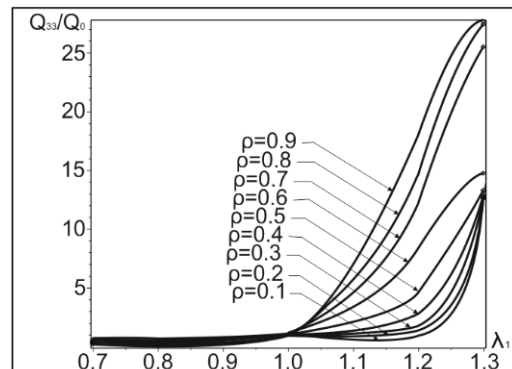


Рис. 3. Вплив початкових напружень на закон розподілу

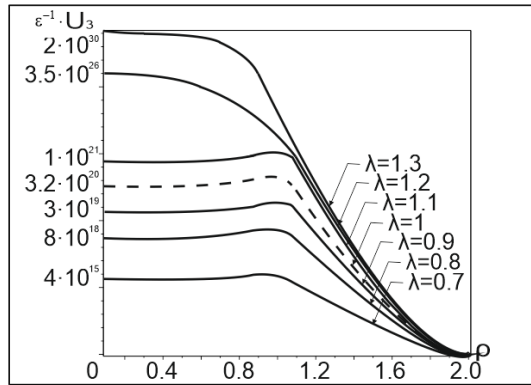


Рис. 4. Переміщення U_z

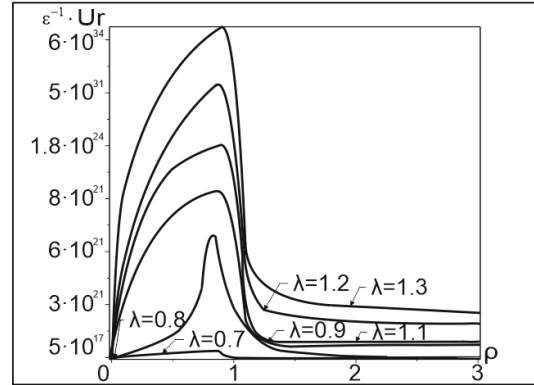


Рис. 5. Переміщення U_r

Висновки. Отже, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружних штампа та шару, а також рекомендації щодо практичного використання здобутих результатів полягають у наступному:

1. Початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень у циліндричному штампі та шарі, а при розтягненні – до їх збільшення, у випадку переміщень все відбувається навпаки. Тобто, наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення при розрахунках на міцність деталей машин та конструкцій. Причому для контактних напружень небезпечними є початкові напруження у випадку розтягнення, а для переміщення – у випадку стиску.

2. Найбільший вплив початкових напружень відзначений на бічній поверхні штампа.

3. Товщина шару не впливає на характер дії початкових напружень, а впливає лише на їх значення.

4. Більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високоеластичних матеріалах у порівнянні із більш жорсткими, але якісно їх вплив зберігається.

5. Небезпечною є ситуація, коли початкові напруження наближаються до значень поверхневої нестійкості, оскільки контактні зусилля і переміщення різко змінюють свої значення.

Таким чином, в даній роботі отримані залежності, що відображають вплив початкових напружень на напружено-деформований стан системи пружних циліндра та шару з початковими (залишковими) напруженнями. Цей вплив є суттєвим як для стисливих, так і нестисливих тіл та повинен враховуватися в інженерних розрахунках.

Література

1. Гузь А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика – 2004. – 40, № 7. – С.41– 69.
2. Гузь А. Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 8. – с. 3 - 11.
3. Бабич С. Ю. Контактная задача теории упругости для слоя с начальными напряжениями/ С.Ю. Бабич//Прикл. мех.–1984.–20, №6.–с. 34-40.
4. Александров В. М. Контактная задача для предварительно напряженного физически нелинейного упругого слоя / В. М. Александров, В. С. Порошин//Инж. журн. «Механика твердого тела».–1984. - № 6. – с. 79 – 85.
5. Гузь А. Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. - Хмельницький, изд. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
6. Гузь А. Н. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницкий // Развитие идей Л. А. Галина в механике. – М. – Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2013. – 480 с.
7. Ярецька Н. О. Змішана статична контактна задача для пружного шару і пружного циліндричного штампа з початковими (залишковими) напруженнями / Н. О. Ярецька // Вісник ТНТУ. Науковий журнал, №2 (70), 2013 р. – Тернопіль. – с. 63-73.
8. Ярецька Н. О. Вплив початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружного циліндричного штампа та пружного шару / Н. О. Ярецька // Доповіді НАН України. – 2014. – № 1. – с. 57 – 62.