

УДК 515.2

I.S. ТАБАКОВА, Л.М. КУЦЕНКО  
Харківський національний університет радіоелектроніки  
Національний університет цивільного захисту України

**НАБЛИЖЕНИЙ СПОСІБ ПОБУДОВИ ГЕОДЕЗИЧНОЇ ЛІНІЇ  
МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ НА ГЛАДКІЙ ПОВЕРХНІ**

*Наведено алгоритм розв'язання задачі про визначення геодезичної лінії на заданій гладкій поверхні між "стартовою" і "фінішною" точками на ній, який базується на розв'язанні допоміжної задачі про геодезичну лінію на цій поверхні, що виходить зі "стартової" точки у даному початковому напрямку.*

*Ключові слова: геодезична лінія між точками на заданій поверхні, система рівнянь геодезичних, символи Кристоффеля, графічне подання розв'язання системи рівнянь геодезичних.*

I.S.TABAKOVA, L.N.KUTSENKO  
The Kharkov national university of radioelectronics  
National university of civil protection of Ukraine

**CREATION OF THE GEODETIC LINE WHICH LEAVES THIS POINT  
IN THIS DIRECTION ON THE SMOOTH SURFACE**

**Annotation.**

*In this article the algorithm of the solution of a task about definition of the geodesic line on the set smooth surface between "starting" and "finishing" points on it is considered. The algorithm is based on the solution of an auxiliary task on the geodesic line on a surface which leaves a "starting" point in this initial direction. Research objective was creation of algorithm and the computer program of definition of the geodesic line on the set smooth surface connecting "starting" and "finishing" points on it.*

*The algorithm of the description and creation of the geodesic line is given in the set smooth surface between "starting" and "finishing" points on it. The mathematical model of the description and creation of the geodesic line which leaves this point in the set direction of a smooth surface is offered based on application of symbols of Christoffel. At the level of carrying out computer experiments examples of creation of family geodesic on the set surface on condition of its achievement of a vicinity of the set radius of a "finishing" point are shown.*

*Thus to variables the direction of initial "exit" geodesic of a "start" point is. Further researches will be connected with definition of the shortest geodesic of family of the received curves. Results of work can be used at calculation of a form of cracks in materials, for research of geometrical characteristics of geodesic tubes, for studying of movement of massive particles in gravitational fields, when developing algorithms of definition of a way of robots between obstacles, etc.*

*Keywords - the geodesic line between points on the set surface, system of the equations geodesic, Christoffel's symbols, graphical representation of the decision of system of the equations geodesic.*

**Постановка проблеми.** Теорія геодезичних ліній має численні впровадження: при розрахунку форми тріщин у матеріалах, при дослідженні геометричних характеристик геодезичних трубок, для вивчення руху масивних часток у гравітаційних полях, при розробці алгоритмів визначення шляхів роботів серед перешкод, тощо. При дослідженні геодезичних ліній даних поверхонь виникає необхідність розв'язання систем звичайних нелінійних диференціальних рівнянь [1]. У більшості випадків нелінійні диференціальні рівняння не мають аналітичного розв'язку, тому широко застосовуються комп'ютерні (наближені) методи дослідження систем геодезичних рівнянь.

Але більш точну побудову можна здійснити за допомогою системи диференціальних рівнянь, що описують геодезичну лінію. Існують два різновиди задач про побудову геодезичної лінії на даній гладкій поверхні залежно від обраних крайових умов. У першій постановці геодезична лінія на поверхні будується за даними "стартовою" точкою і початковим напрямком. У другій постановці (більш складній) геодезична лінія на поверхні будується за даними "стартовою" і "фінішною" точками. У роботі наведено алгоритм розв'язання задачі про побудову геодезичної лінії у другій постановці, який базується на основі розв'язку цієї ж задачі, одержаного у першій постановці.

**Аналіз відомих результатів.** У роботі [2] пропонується метод відслідкування середньої (геодезичної) кривої, яка розташовується між двома граничними допоміжними кривими (рис. 1). Метод розроблений для регулярних поверхонь і базується на чисельному розв'язанні системи рівнянь для геодезичної у просторі параметрів поверхні.

У роботі [3] запропоновано пошук геодезичної наближеним способом кінченої різниці у вигляді «методу пострілів», який на практиці чутливий до вибору початкових кутів у початковій точці (рис. 2).

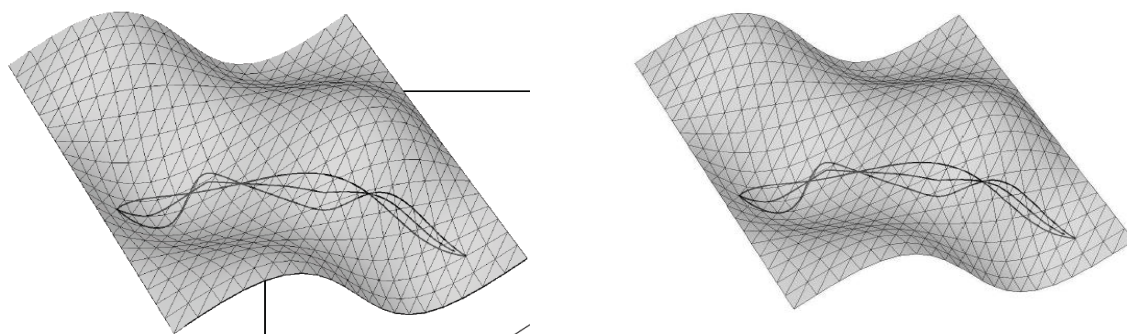


Рис. 1. Приклад побудови геодезичної на регулярній поверхні

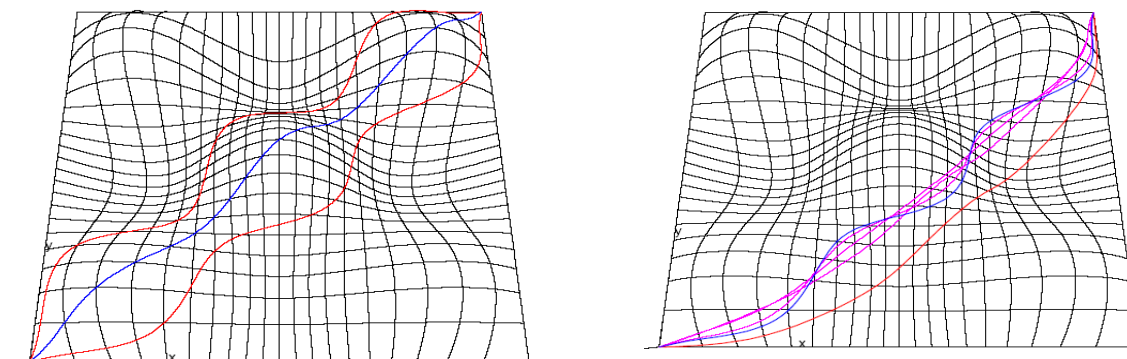
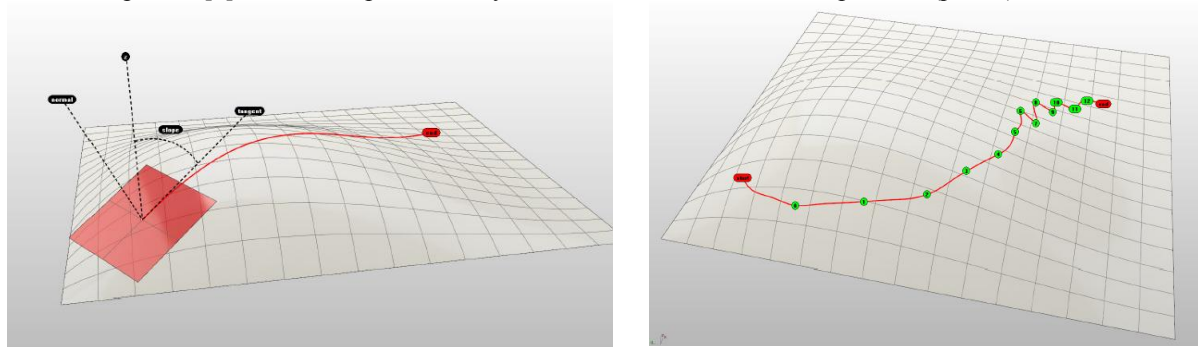


Рис. 2. Приклад побудови геодезичних наближенням методом

Якщо поставлено завдання знайти найкоротшу лінію на поверхні між заданими на ній двома точками (друга постановка задачі про геодезичну), то шуканою лінією буде частина геодезичної лінії, що проходить через ці точки. Обернений висновок не завжди справедливий, тому що іноді частина геодезичної лінії, що проходить через дві задані на поверхні точки, укладена між цими точками, може не бути найкоротшою.

Чисельний алгоритм знаходження наближеного положення геодезичної на заданій поверхні розглянуто у роботі [4] і полягає у такому.

1. У якості вихідних даних на поверхні обираємо «стартову» точку й початковий напрямок «виходу» геодезичної лінії.
  2. В обраній точці обчислюємо нормаль до поверхні і визначаємо проекцію вектора напрямку на площину, задану нормаллю.
  3. Здійснюємо зміщення на величину  $\Delta$  уздовж знайденого вектора, спроектованого на нормаль (з урахуванням напрямку на «фінішну» точку).
  4. Використовуючи функцію обчислення відстані визначаємо точку на поверхні, найближчу до розрахованої точки.
  5. Одержуємо нормаль до поверхні в цій точці.
  6. При необхідності все повторюємо, розпочинаючи з пункту 2.
  7. В результаті одержуємо наближене положення геодезичної на поверхні.
- В роботі [4] наведено приклад побудови геодезичної за цим алгоритмом (рис. 3).



а б  
Рис. 3. Зображення наближеної геодезичної між двома точками: конструктивні елементи алгоритму (а); результат побудови (б)

**Постановка завдання.** Розробити алгоритм розв'язання задачі про визначення геодезичної лінії на заданій гладкій поверхні між «стартовою» і «фінішною» точками на ній, який базується на розв'язанні допоміжної задачі про геодезичну лінію на поверхні, що виходить зі «стартової» точки у даному початковому напрямку.

**Основна частина.** Для довільних гладких поверхонь і початкових умов можна одержати [1] впорядковану систему диференціальних рівнянь геодезичних, на базі чого можна створити різновиди чисельного розв'язку й графічного подання рішення цієї системи. Описати геодезичну лінію у координатних кривих  $(u(t), v(t))$  можна за допомогою системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma^1_{11} u'^2 + 2\Gamma^1_{12} u'v' + \Gamma^1_{22} v'^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma^2_{11} u'^2 + 2\Gamma^2_{12} u'v' + \Gamma^2_{22} v'^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

З курсу диференціальних рівнянь відомо, що з врахуванням початкових умов  $u(0)=u_0, v(0)=v_0, u'(0)=du_0, v'(0)=dv_0$  система (1) має єдиний розв'язок. Це означає, що через кожну точку поверхні в заданому напрямку проходить тільки одна геодезична.

Вирази  $\Gamma^k_{ij}$  називаються символами Кристоффеля; їх доцільно записувати через коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= (E_u G - 2F_u F + E_v F) / (2(EG - F^2)); \\ \Gamma^2_{11} &= (2F_u E - 2E_v E - E_u F) / (2(EG - F^2)); \\ \Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21} = (E_v G - G_u F) / (2(EG - F^2)); \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = (G_u E - E_v F) / (2(EG - F^2)); \\ \Gamma^1_{22} &= (2F_v G - G_u G - G_v F) / (2(EG - F^2)); \\ \Gamma^2_{22} &= (G_v E - 2F_v F + G_u F) / (2(EG - F^2)); \end{aligned} \quad (2)$$

На базі розв'язання системи рівнянь (1) було складено алгоритм та програму (для середовища пакету maple) побудови наближеної геодезичної лінії, яка виходить із «стартової» точки на заданій гладкій поверхні і прямує до «фінішної» точки на цій поверхні [6, 7]. У роботі [5] наведено аналогічні результати лише для випадку пошуку геодезичної лінії на поверхні за даними «стартовою» точкою і початковим напрямком.

Запропонований алгоритм складається із таких кроків.

Крок 1. Задаємо параметричне рівняння поверхні і «стартову» та «фінішну» точки, належні їй.

Крок 2. За заданими рівняннями поверхні формуємо систему диференціальних рівнянь геодезичних.

Крок 3. Формуємо систему початкових умов.

Крок 4. Створюємо процедуру чисельного інтегрування системи рівнянь геодезичних при заданих початкових умовах

Крок 5. Для «стартової» точки за допомогою параметра  $u'$  обираємо конкретний напрямок «виходу» геодезичної.

Крок 6. Звертаємося до процедури чисельного інтегрування системи рівнянь геодезичних.

Крок 7. Визначаємо опис геодезичної для обраного напрямку.

Крок 8. Перевіряємо, чи проходить одержана геодезична у околі заданого радіусу «фінішної» точки. Якщо ні, то здійснюємо приріст на  $\Delta$  значення параметра  $u'$  і переходимо до кроку 5.

Крок 9. Будуємо зображення геодезичної.

Крок 10. При необхідності здійснюємо динамічну візуалізацію руху частки по одержаній геодезичній лінії.

В якості *першого тестового прикладу* обрано поверхню, описану рівнянням

$$z = f(0, 0, 3) + f(2, 2, 2) + f(-2, -2, 2) + f(-1, 2, 3) + f(1, -2, 2) + f(2, 0, 2), \quad (3)$$

де  $f(a,b,c) = c \cdot \exp(-(u-a)^2 - (v-b)^2)$ .

«Стартова» точка має координати (-4; 4), а «фінішна» – координати (4;4). Слід зазначити, що до обраної поверхні входять частини координатної площини  $z = 0$ .

На рис. 4 зображені деякі геодезичні лінії обраної поверхні залежно від радіусу  $r$  околу «фінішної» точки та визначених значень параметра  $u'$ , що задають початковий «вихід» геодезичної зі «стартової» точки.

З врахуванням попередніх умов в якості *другого тестового прикладу* обрано поверхню, описану рівнянням

$$z = f(0, 1, 2) + f(2, 1, 2) + f(-1, -2, 2) + f(-2, 2, 2) + f(1, -2, 2) + f(2, 0, 2) + f(-2, 0, 2), \quad (4)$$

де  $f(a,b,c) = c \cdot \exp(-(u-a)^2 - (v-b)^2)$ .

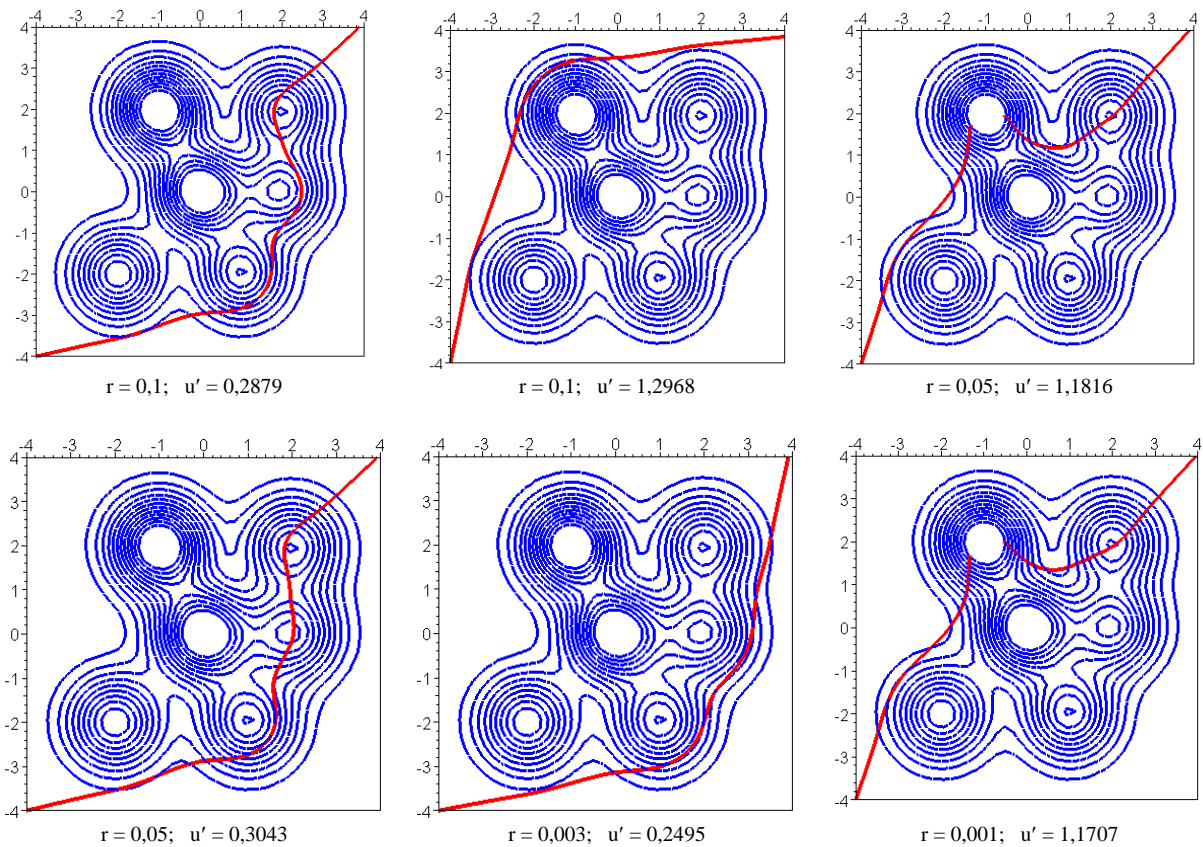


Рис. 4. Деякі геодезичні лінії поверхні першого тестового прикладу

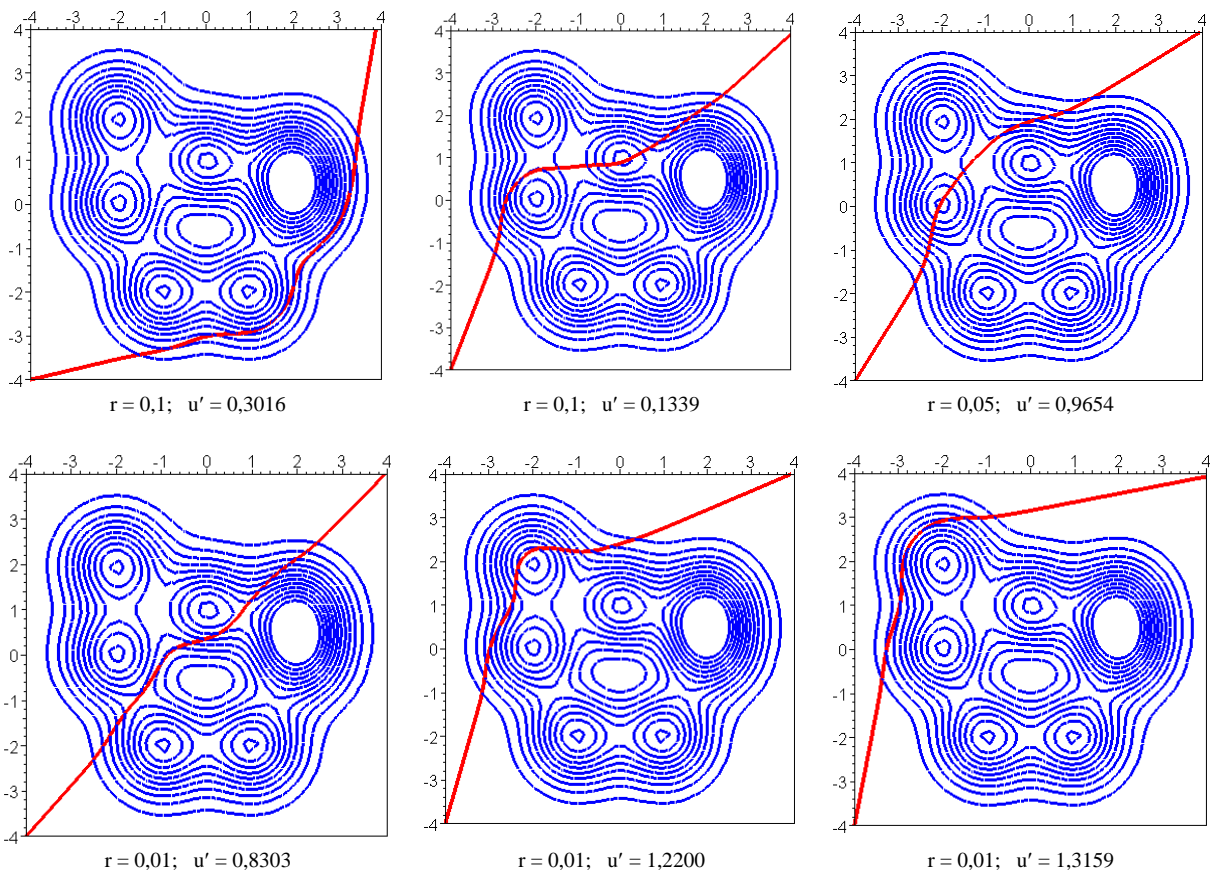


Рис. 5. Деякі геодезичні лінії поверхні другого тестового прикладу

На рис. 5 зображені деякі геодезичні лінії обраної поверхні залежно від радіусу  $r$  околу “фінішної” точки.

Розроблений алгоритм визначення геодезичної планується застосовувати для розрахунку маршруту руху мобільного робота за умови обходу перешкоди [8]. Особливістю такого підходу є необхідність моделювання перешкоди за допомогою спеціально побудованої допоміжної гладкої поверхні. На зазначеній поверхні здійснюється опис та побудова геодезичної між двома точками на цій поверхні. Тоді проекція на координатну площину одержаної геодезичної визначатиме траєкторію руху мобільного робота між проекціями зазначених точок.

Ця задача є базовою для побудови алгоритму гладкого керування траєкторним рухом мобільного робота у середовищі з перешкодами, які апроксимуються гладкими поверхнями. Плоску топографічну карту з наявністю перешкод пропонується представити як поверхню, замінюючи перешкоди гладкими умовними «пагорбами».

Зазначимо, що при цьому можна врахувати різні витрати енергетичних ресурсів при русі мобільного робота по вільним від перешкод зонам, що характеризують, наприклад, асфальт, ґрунт, пісок, траву, заболочені місцевості, тощо. Для цього на цій «неплоскій» топографічній карті згадані зони необхідно задати додатковими “пагорбами” й “западинами”, що буде здійснено в подальшому.

Для обраного подання топографічної карти траєкторію можна визначити аналітичними або чисельними методами. Для цього необхідно розробити способи розв’язання поставленого завдання за допомогою геодезичних ліній. В роботі [9] наведено спроби розв’язання аналогічної задачі. На даному етапі розроблено алгоритм визначення та побудови геодезичної кривої, яка б з’єднала дві точки, розташовані на спеціально побудованій поверхні. Зазначимо, що у механіці геодезична лінія відіграє важливу роль: по ній рухається точка, що повинна залишатися на поверхні в тому випадку, коли на точку не діють зовнішні сили.

**Висновки.** Алгоритм визначення геодезичної лінії на заданій гладкій поверхні між “стартовою” і “фінішною” точками на ній доцільно пов’язати з рішенням допоміжної задачі про геодезичну лінію на цій поверхні, що виходить зі “стартової” точки у даному початковому напрямку. Подальші дослідження будуть пов’язані з визначенням найкоротшої геодезичної із сім’ї одержаних кривих. Тобто визначення такого напрямку «виходу» геодезичної зі стартової точки, коли довжина одержаної геодезичної буде найкоротшою.

### Література

1. Геодезические линии на поверхностях Составители: Н.И. Жукова, А.В. Багаев Учебно-методическое пособие. — Н. Новгород : Издательство Нижегородского госуниверситета. 2008. – 54 с.
2. Ресурс. Режим доступу: <ftp://ftp.gdv.uni-hannover.de/papers/WLR1.pdf>
3. Ресурс. Режим доступу: [http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-158j-computational-geometry-spring-2003/lecture-notes/lecnotes20\\_fixed.pdf](http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-158j-computational-geometry-spring-2003/lecture-notes/lecnotes20_fixed.pdf)
4. Ресурс. Режим доступу: <http://wooj.files.wordpress.com/2012/06/vb-workshop-harvard-gsd-spring-2012.pdf>
5. Бушкова В.А. Библиотека программных процедур создания управляемой оснащенной динамической визуализации геодезических линий в СКМ Maple / В.А. Бушкова // Вестник ТГГПУ. – 2011. – №4(26). – С. 8-10.
6. Табакова І.С. Побудова геодезичної лінії між двома точками, належних даних гладкій поверхні / І.С. Табакова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип. 91. – Київ: КНУБА, 2013 р – С. 271 – 278.
7. Табакова І.С. Побудова геодезичної лінії гладкої поверхні, що виходить із даної точки у даному напрямку / І.С. Табакова // Науковий вісник МДПУ «Математика, геометрія, інформатика» . – Том 1. – Мелітополь: МДПУ, 2014. – С. 217 – 224.
8. Табакова І.С. Визначення траєкторії обходу перешкод роботом за допомогою геодезичної лінії / І.С. Табакова // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – МДПУ— Мелітополь: МДПУ, 2014. – Вип. 3. С. 131 – 138.
9. Васильев И.А. Построение траекторий движения для мобильного робота. Режим доступу [http://www.rusnauka.com/5\\_SWMN\\_2012/Tecnic/11\\_99991.doc.htm](http://www.rusnauka.com/5_SWMN_2012/Tecnic/11_99991.doc.htm)