

УДК 519.3

П.И. ГУЧЕК¹, В.В. КРЮЧКОВСКИЙ¹, А.Н. ХОМЧЕНКО²

¹Херсонский национальный технический университет

²Черноморский государственный университет им. Петра Могилы

О ФИЗИЧЕСКОЙ АДЕКВАТНОСТИ ПРОЦЕДУРЫ КОНДЕНСАЦИИ НА ЭЛЕМЕНТЕ Q_{16}

Показано, как устранить "дутую" моду (термин Галлагера) на серендиповом элементе Q_{16} и приведены конкретные примеры физически адекватных моделей, свободных от отрицательных значений в поузловом распределении равномерной массовой силы.

Ключевые слова: конечные элементы, серендипово семейство, "дутая" мода, базисные функции.

P.I. GUCHEK¹, V.V. KRIUCHKOVSKY¹, A.N. KHOMCHENKO²

¹Kherson National Technical University

²Petro Mohyla Black Sea State University

ON PHYSICAL ADEQUACY OF THE PROCEDURE OF CONDENSATION ON AN ELEMENT Q_{16}

Annotation

It is shown how to remove the "blown" mode (Gallagher term) on the serendipity element Q_{16} and the actual examples of physically adequate models, free from negative value in node-by-node distribution of equal bulk force are given.

Key words: finite elements, serendipity family, "blown" mode, basis functions.

Введение. В серендиповом семействе конечных элементов наименее изученным и наиболее загадочным является элемент 4-го порядка (quartic). В англоязычных источниках серендиповы элементы обозначают Q_4 , Q_8 , Q_{12} , Q_{16} , т.е. четырехугольники, имеющие на границе соответственно 4, 8, 12, 16 равномерно расположенных расчетных узлов (включая вершины). В отличие от лагранжевых серендиповы модели не имеют внутренних узлов. В этом их особенность и важное преимущество. Геометрическая изотропия и правила матричной алгебры сделали неизбежным добавление 17-го узла в центре Q_{16} . Так появился странный элемент, который перестал быть лагранжевым, утратив 8 внутренних узлов, а серендиповым так и не стал. Такая специфическая идеализация модели усугубляет физическую неадекватность интегральных характеристик. Если на Q_8 и Q_{12} неестественное "гравитационное отталкивание" испытывают только угловые узлы, то на Q_{16} к ним присоединилась группа узлов на серединах сторон квадрата. По меткому выражению академика Л.И. Мандельштама, модель мстит за идеализацию.

Анализ предшествующих публикаций. Мы уже обсуждали проблему 17-го узла в работах [1, 2] и считаем, что 17-й узел не нужен для оснащения Q_{16} подходящим базисом (из 16-ти функций формы). Однако, если заинтересованный читатель пользуется источником [3], где приведены 17 базисных функций, мы покажем здесь, как превратить 17-узловой Q_{16} в своеобразный генератор множества серендиповых элементов Q_{16} с 16-ю узлами на границе.

Наша **цель** – показать, как устранить "дутую" моду (термин Галлагера) [4] и привести конкретные примеры физически адекватных моделей, свободных от "негативизма" в спектре узловых нагрузок.

Основная часть. На рис. 1 показан центрированный конечный элемент 4-го порядка.

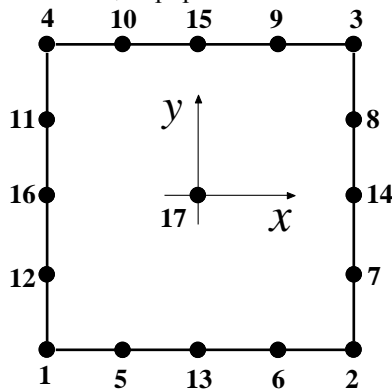


Рис. 1. Элемент Q_{16} с 17-ю узлами

Базисные функции этого элемента приведены в [3], правда, с опечатками, которые здесь устранены.

Чтобы составить полное представление о базисе из 17 функций, достаточно выписать только четыре из них, например, $N_1(x, y)$, $N_5(x, y)$, $N_{13}(x, y)$ и $N_{17}(x, y)$.

Типичные функции имеют вид:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{12}(1-x)(1-y)(4x(1-x^2) + 4y(1-y^2) + 3xy),$$

аналогия в узлах 2, 3, 4;

$$N_5(x, y) = \frac{2}{3}(1-x^2)(2x^2-x)(1-y), \quad (1)$$

аналогия в узлах 6, 7, ..., 12;

$$N_{13}(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(4x^2+y)(y-1),$$

аналогия в узлах 14, 15, 16;

$$N_{17}(x, y) = (1-x^2)(1-y^2).$$

Напомним, что базисные функции удовлетворяют требованиям интерполяционной гипотезы Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{17} N_i(x, y) = 1, \quad (2)$$

где i – номер функции; k – номер узла.

Спектр узловых нагрузок p_i вычисляется по формуле интегрального среднего (типа Ньютона-Котеса):

$$p_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dx dy, \quad (3)$$

где D – область интегрирования ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$); S – площадь области D .

Вычисления по формуле (3) дают следующий спектр узловых нагрузок элемента Q_{16} (17 узлов):

$$p_i = -\frac{11}{180}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad p_i = \frac{32}{180}; \quad i = 5, 6, \dots, 12; \quad p_i = -\frac{28}{180}; \quad i = 13, \dots, 16; \quad p_{17} = \frac{80}{180}.$$

Противоестественность такого распределения очевидна. Узлы в вершинах квадрата и на серединах сторон испытывают "гравитационное отталкивание".

Исключение внутреннего узла называют конденсацией (редукцией). Можно предложить множество "рецептов" конденсации. В основе конденсации лежит метод вариации внутреннего параметра [5]. В нашей модели (рис. 1) один внутренний узел, поэтому формула конденсации имеет вид:

$$\overline{N}_i(x, y) = N_i(x, y) + \alpha_i N_{17}(x, y); \quad i = \overline{1, 16}. \quad (4)$$

Понятно, что весовые коэффициенты α_i следует подбирать так, чтобы устранить отрицательные нагрузки в спектре $\{p_i\}$. Заметим, что (4) позволяет теоретически построить распределение, совпадающее с эмпирическим, полученным путем компьютерного экспериментирования с блуждающими частицами и поглощающими узлами на границе. Такие задачи называют обратными, когда по заданному спектру отыскивают базис, реализующий этот спектр. Здесь не ставится задача получить эмпирический спектр, хотя, соблюдая условие $p_1 < p_5 < p_{13}$, мы делаем спектр более реалистичным. Важно понять, что формула (4) систематически генерирует альтернативные базисы. Рассмотрим некоторые варианты конденсации.

Для варианта I выберем весовые коэффициенты следующим образом:

$$\alpha_i = \frac{3}{20}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \alpha_i = -\frac{5}{20}; \quad i = 5, 6, \dots, 12; \quad \alpha_i = \frac{12}{20}; \quad i = 13, \dots, 16.$$

При этом типичные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{N}_1(x, y) &= \frac{1}{60}(1-x)(1-y)(29x - 20x^3 + 29y - 20y^3 + 24xy + 9), \\ \overline{N}_5(x, y) &= \frac{1}{12}(1-x^2)(1-y)(16x^2 - 8x - 3y - 3), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{N}_{13}(x, y) = \frac{1}{10}(1-x^2)(y-1)(20x^2 - y - 6).$$

На рис. 2 показан спектр узловых нагрузок.

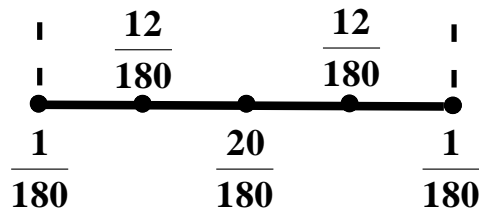


Рис. 2. Спектр узловых нагрузок (вариант I)

Для варианта II возьмем:

$$\alpha_i = \frac{4}{20}, i=1, 2, 3, 4; \alpha_i = -\frac{6}{20}; i=5, 6, \dots, 12; \alpha_i = \frac{13}{20}; i=13, \dots, 16.$$

Типичные функции:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(x, y) &= \frac{1}{60}(1-x)(1-y)(32x - 20x^3 + 32y - 20y^3 + 27xy + 12), \\ \bar{N}_5(x, y) &= \frac{1}{30}(1-x^2)(1-y)(40x^2 - 20x - 9y - 9), \\ \bar{N}_{13}(x, y) &= \frac{1}{20}(1-x^2)(y-1)(40x^2 - 3y - 13). \end{aligned} \tag{6}$$

Спектр показан на рис. 3.

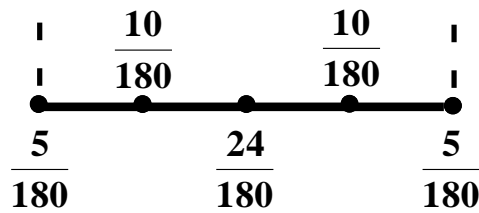


Рис. 3. Спектр узловых нагрузок (вариант II)

Для варианта III:

$$\alpha_i = \frac{7}{40}, i=1, 2, 3, 4; \alpha_i = -\frac{11}{40}; i=5, 6, \dots, 12; \alpha_i = \frac{25}{40}; i=13, \dots, 16.$$

Типичные функции:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(x, y) &= \frac{1}{120}(1-x)(1-y)(61x - 40x^3 + 61y - 40y^3 + 51xy + 21), \\ \bar{N}_5(x, y) &= \frac{1}{120}(1-x^2)(1-y)(160x^2 - 80x - 33y - 33), \\ \bar{N}_{13}(x, y) &= \frac{1}{40}(1-x^2)(y-1)(80x^2 - 5y - 25). \end{aligned} \tag{7}$$

Спектр узловых нагрузок – на рис. 4.

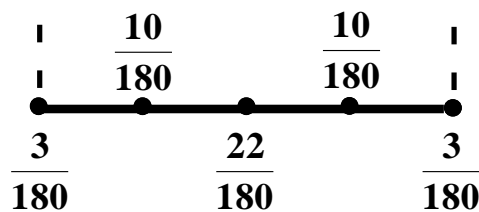


Рис. 4. Спектр узловых нагрузок (вариант III)

Важный **вывод**: на элементе Q_{16} существует множество базисов, удовлетворяющих условиям (2) и обеспечивающих межэлементную непрерывность поля. Как обычно, интерполяционный полином имеет вид:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{16} \overline{N}_i(x, y) f_i, \quad (8)$$

где f_i – узловые значения интерполируемой функции.

Понятно, что в рамках матричной алгебры альтернативных базисов не существует.

Литература

1. Хомченко А.Н. Чи потрібний 17 вузол серендиповому елементу 4-го порядку? / А.Н. Хомченко, С.О. Камаєва // Вестник Херсонского национального техн. университета. Вып. 2(35). — Херсон: ХНТУ, 2009. — С. 455—461.
2. Астионенко И.А. Серендиповы аппроксимации: поучительные ошибки и контрпримеры. / И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Научные ведомости Белгородского госуд. ун-та. Математика. Физика. — №11 (130) . Выпуск 27. — Белгород: БелГУ, 2012. — С. 110-115
3. Akin J.E. Finite Elements Analysis with Error Estimators /J.E. Akin. — Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005. — 477 p.
4. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
5. Хомченко А.Н. Неузловые параметры и адекватные модели серендиповых элементов / А.Н.Хомченко, К.В. Рим // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. Зб. наук. праць. — Кам.-Под.нац. ун-т: Кам.-Подільський, 2012. — С. 222-227.