

УДК 517.9

Т.С. ЗЕЛЕНСКАЯ

Днепропетровский национальный университет

ОПТИМИЗИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГОЛОВНЫХ КАНАТАХ ШАХТНЫХ ПОДЪЕМНЫХ МЕХАНИЗМОВ

В статье рассмотрена краевая задача о движении упругих продольных волн в канатах переменной длины для шахтных подъемных механизмов. Найдено решение начально-краевой задачи распространения продольных колебаний как области с подвижной границей. Представлена программная реализация результатов воздействия отраженных волн на напряжение в сечениях каната.

Ключевые слова: волновое и телеграфное уравнения; область с подвижной границей.

T.S. ZELENSKAYA

Dnepropetrovsk national university

THE OPTIMIZED MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMIC PROCESSES IN HEAD ROPES OF MINE LIFTING MECHANISMS

Annotation

Setting and the solution of an initial boundary value problem for a wave equation about movement of elastic waves in ropes of variable length in relation to the mine and lift mechanisms which are realizing rise and lowering of loads by means of ropes is considered. Edge conditions in these tasks precisely consider change of boundaries of area of integration of an equation of state, and also nature of interaction of a rope with a load. Research objective was creation of the specified mathematical model of rope installation in which influence of residual and reflected modes from mobile boundary (a common ground of a pulley of winding and a rope) on strengthening characteristics of lifting system was considered.

By means of the modified method of continuation in the initial setting of a boundary value problem the actual change of length of a rope that allowed to reduce values of coefficients of margin of safety was considered and to prevent power consumption increase on unit of relocation of a load.

By simulation and experimentally it is shown that nature of movement of elastic waves in the environments of variable length has specific features and significantly differs from nature of movement of waves in the environments with fixed boundaries. That is, creation of the optimized mathematical model and the solution of the boundary value problem, considering mathematically is exact, change of boundaries of area of integration of the equation of a dynamic status of ropes, will allow to receive more the pattern of distribution of elastic longitudinal relocation close to reality, and also distributions of a dynamic field of tension in steel ropes.

For the purpose of reduction of capital expenditure and abbreviation of periods of a stop of mechanisms in case of wear of load-lifting ropes, indexes of tension for the entire period of operation of mine installation numerically are defined. Numerical implementation of search of relocation and tension in a head rope in its common ground with a drum is rather accurate and completely corresponds to real conditions of working use of similar mine machines.

Keywords: wave and telegraphic equations; area with mobile boundary.

Постановка проблемы. Данная работа посвящена исследованию динамического поля перемещений и напряжений в стальных канатах переменной длины шахтных подъемных механизмов; канаты являются уравновешивающими, и главный канат переносит сосредоточенное напряжение, которое до начала движения системы находилось на нижнем конце главного каната. Из оценки динамических усилий в идеально упругих стальных канатах переменной длины следует, что только при подъеме канатов без концевых грузов при неинтегрируемых граничных условиях, усилия в них не возрастают. Однако на практике при умеренных скоростях подъема, это явление не наблюдается ввиду того, что наряду с возрастанием амплитуд динамических усилий вследствие уменьшения длины происходит одновременное уменьшение амплитуд их колебаний.

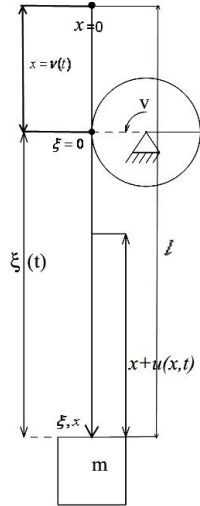
Анализ публикаций по теме исследования. Вопрос об определении усилий в подъемных канатах, о постановке методов решения тесно связан с задачей о продольных колебаниях упругих стержней и стальных канатов. В работах [1,2] ограничили шахтными канатами постоянной длины и постоянного сечения. В статье [3] рассматриваются различные специальные условия: мгновенная нагрузка нижнего конца каната, мгновенная остановка верхнего конца каната, и равнопеременное движение верхнего конца каната. Заметим, что в трех случаях вдоль каната будет наблюдаться разрывность непрерывности. Рассматриваются канаты постоянного сечения, но переменной длины, учитывая массу и вес каната при больших высотах подъема [4].

Цель статьи. В математических моделях, применяемых для описания процессов распространения волн, достаточно часто необходимо учитывать сопротивление среды. Основой такого рода моделей является волновое уравнение. Качественные исследования этого уравнения показывают, что его решениями являются функции, имеющие характер распространяющихся затухающих волн. При этом для оптимального построения точных решений и их физической интерпретации важно знать, какие компоненты решения описывают распространение волн, а какие – их искажение. Для этого, в решении

поставленной задачи будем использовать модифицированный метод продолжения. Представленный в статье метод учитывает отражение продольных волн от подвижного конца и появление остаточных колебаний.

Основная часть. Рассмотрим головной канат от момента начала работы до полной остановки системы. Исследуем краевую задачу об отыскании динамического поля в канате переменной длины, когда возмущение исходит от подвижного конца. Будем решать поставленную задачу на интервале $0 < x \leq l$, учитывая, что точка $x = 0$ будет двигаться по закону

$$v(t) = r \int_0^l \int_0^t \beta(\tau) d\tau ds + r\omega(0)t + v(0), \quad (1)$$



где r – средний радиус намотки каната на шкив; $\beta(t)$ – угловое ускорение шкива; $\omega(t)$ – угловая скорость; s – площадь поперечного сечения каната.

Уравнение (1) описывает линейное перемещение каната в точке его касания со шкивом. Канат, подвешенный вертикально и имеющий первоначальную длину l , при $t = 0$ начинает наматываться на барабан. Ось ξ направим вниз по продольной оси головного каната, за начало отсчета $\xi = 0$ примем точку касания каната со шкивом (рис. 1). Средний радиус намотки каната на шкив равен r . До начала намотки каната на шкив, то есть при $t < 0$, груз уже был подвешен к канату и в канате установились статические перемещения и напряжения. Разделим движение рассматриваемой подъемной системы на абсолютное и относительное. Под абсолютным движением системы, как твердого тела, учитывая направление оси ξ , будем понимать движение всех точек системы, кроме точки $\xi = 0$, со скоростью

$$V(t) = r \int_0^t \beta(\tau) d\tau + V(0). \quad (2)$$

Рис. 1. График изменения рывка барабана под влиянием волновых процессов

Под относительным движением понимается движение всех точек системы, включая точку $\xi = 0$, со скоростью $-V(t)$. С системой в ее относительном движении свяжем направленную вниз ось x , начало которой при $t = 0$ расположено в точке $\xi = 0$. Эта ось также движется с системой со скоростью $-V(t)$, то есть относительно оси x все точки системы остаются неподвижными. Таким образом, в относительном движении рассматриваемая система представляет собой стержень начальной длины l , заключенный на интервале $0 \leq x \leq l$, все точки которого, кроме точки $x = 0$, неподвижны, точка же $x = 0$ движется со скоростью $V(t)$, изменяя длину стержня (2). Перемещение точки $x = 0$ будет описываться функцией (1). Упругие деформации каната при динамическом нагружении рассматриваются в относительном движении. Следовательно, упругие перемещения в относительном движении должны удовлетворять однородному волновому уравнению (3). В области $0 < x < l + v(t)$, $t > 0$, требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где a – скорость звука в стальном канате; удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l \quad (4)$$

и краевым условиям

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + h(x,t)u \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h(x,t)u \right) \Big|_{x=l+v(t)} = \theta(t), \quad t > 0. \quad (5)$$

В данной задаче рассматривается интервал, имеющий при $t = 0$ длину l , и при $t > 0$ правый конец этого интервала (точка соприкосновения каната с барабаном) движется по закону $x = l + v(t)$, причем $v(0) = 0$. Решение задачи ищем в форме $u(x,t) = \chi(x - at) + \chi(x + at)$.

Выполняется условие невырождения среды

$$l + v(t) > 0, \quad t > 0. \quad (6)$$

Так как нижний конец каната в относительной системе координат находится в состоянии покоя, то

$$u(x,t) = \chi(x + at). \quad (7)$$

Используем модифицированный метод продолжения для области с подвижной границей, продолжим функцию $\theta(t)$ на всю ось t :

$$\tilde{\theta}(t) = \begin{cases} \theta(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (8)$$

и подставляя форму решения (7) в продолжение (8) на всю ось t второе краевое условие (5), с учетом условия (6), получим

$$\chi'(l + v(t) + at) + h(l + v(t), t) \cdot \chi(l + v(t) + at) = \tilde{\theta}(t). \quad (9)$$

Введем преобразование независимой переменной в уравнение (9)

$$g(t) = l + v(t) + at. \quad (10)$$

Если уравнение (10) неразрешимо относительно t , то рассматриваемая задача не имеет решения. Остается рассмотреть лишь случай разрешимости уравнения (10) относительно t . Функция $v(t)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$.

Должно выполняться условие

$$|v'| < a, \quad t > 0, \quad (11)$$

где a – скорость звука в стальном канате.

Обратная к (10) функция $t_0(g)$ существует тогда и только тогда, когда функция $v(t) + at$ является строго монотонной. Благодаря условию (11), функция $t_0(g)$ является строго-монотонно возрастающей и непрерывно дифференцируемой. Таким образом, продолженная на всю ось g функция $t_0(g)$ обладает следующими свойствами:

$$t_0(g) : \begin{cases} > 0, & g > l, \\ = 0, & g = l, \\ < 0, & g < l. \end{cases} \quad (12)$$

Учитывая свойства (12), уравнение (9) можно представить в виде

$$\chi'(g) + H(g)\chi(g) = \tilde{\theta}(t_0(g)). \quad (13)$$

Тогда общее решение уравнения (3) может быть представлено в форме

$$\chi(g) = \frac{C + \int_l^g \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy}{E(g)}, \quad (14)$$

где $H(g) = h(l + v(t_0(g)), t_0(g))$; $E(g) = e^{\int H(g)dg}$, C – произвольная константа.

Решение задачи для начального интервала времени

$$u(x, t) = \frac{1}{E(x + at)} \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy, \quad (15)$$

так как из первого начального условия следует, что $C = 0$. Учитывая, что $E'(g) = H(g)E(g)$, для функции (15) имеем

$$u_x(x, t) + h(x, t)u(x, t) = -H(x + at) \cdot \frac{1}{E(x + at)} \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy + \tilde{\theta}(t_0(x + at)) + \\ + \frac{h(x, t)}{E(x + at)} \cdot \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy.$$

Функция (15) удовлетворяет начальным условиям, второму краевому условию (5), а также уравнению (3) при $t > 0$; но первому краевому условию функция (15) удовлетворяет только при $t < \frac{l}{a}$. Поэтому, модифицированным методом продолжения решается дополнительная задача: в области $0 < x < l + v(t)$, $t > \frac{l}{a}$, найти решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\rho\left(x, \frac{l}{a}\right) = 0, \quad \rho_t\left(x, \frac{l}{a}\right) = 0, \quad 0 < x < l + \rho\left(\frac{l}{a}\right) \quad (16)$$

и краевому условию

$$\rho_x(0, t) + h(0, t) \cdot \rho(0, t) = (H(a \cdot t) - h(0, t)) \cdot \frac{1}{E(a \cdot t)} \int_l^{at} \tilde{\theta}(t_0(y)) E(y) - \tilde{\theta}(t_0(a \cdot t)) = \varphi_0(t), \quad t > \frac{l}{a}; \quad (17)$$

при $t < \frac{l}{a}$.

Из начальных условий (16) следует, что $\rho(x, t) = -E_1(at - x) \cdot \int_l^{at-x} \varphi_0\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy}{E_1(y)}$.

Тогда решением основной задачи будет функция

$$\psi(x, t) = u(x, t) + \rho(x, t) = \frac{1}{E(x + at)} \int_l^{at+x} \tilde{\theta}(t_0(y)) E(y) dy - E_1(at - x) \int_l^{at-x} \varphi_0\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy}{E_1(y)}.$$

Применительно к наматыванию каната на шкив эту задачу можно математически интерпретировать следующим образом. В области: $0 < x < l + v(t)$, $t > 0$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + Cu(x, t) = 0, \quad (18)$$

(где D, B, C – коэффициенты телеграфного уравнения)

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = 0; \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x > 0 \quad (19)$$

и краевым условиям

$$u(l + v(t), t) = \mu(t); \quad u(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (20)$$

Функция $v(t)$ описывает изменение длины каната на шкиве. Точка свисающей части каната с барабаном имеет координату $x = l + v(t)$. Упругое перемещение в точке $x = 0$ $u(0, t) = 0$.

Введем преобразование переменной t :

$$\tau = t + \frac{v(t) + l}{a}, \quad (21)$$

и учтем, что $\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{v'(t)}{a} > 0$, тогда $\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{v'(t)}{a} > 0$.

Продолжим функцию $v(t)$ на всю ось t , требуя выполнения на всей оси t условия (21) и существования производной этого продолжения на всей оси t . Обозначим это продолжение через $\tilde{v}(t)$.

Пусть $T(t)$ – продолженная на всю ось t функция: $T(t) = t + \frac{K(t) + l}{a}$. Так как в краевом условии (20)

функция $\mu(t)$ определена лишь на полуоси, необходимо построить ее продолжение на всю ось t . Учитывая, что волны в среде возбуждаются на правом конце отрезка и распространяются в среду в направлении отрицательных x , решение задачи отыскивается в виде функции:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[2M_{2n}\left(t + \frac{x}{a}\right) e^{-\frac{(Da+B)x}{2}} + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left(\frac{B}{2} J_0(\sigma) - c_1 \frac{x}{\sigma} J_1(\sigma) \right) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta \right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[2e^{\frac{(Da-B)x}{2}} x \left(-M_{2n+1}\left(t - \frac{x}{a}\right) + M_{2n}\left(t - \frac{x}{a}\right) \right) + \right.$$

$$\left. + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left(\frac{B}{2} J_0(\sigma) - c_1 \frac{x}{\sigma} J_1(\sigma) \right) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} (M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)) d\eta \right], \quad (22)$$

где $J_0(\sigma), J_1(\sigma)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно;

$\sigma = \sqrt{c_1(x^2 - a^2(t - \eta)^2)}$; $c_1 = C + \frac{D^2 a^2}{4} - \frac{B^2}{4}$. Принимая во внимание, что первое краевое условие (20) продолжается на всю ось t : $u(l + v(t), t) = M(t)$.

Экспериментальные исследования проводились на базе действующей шахтно-подъемной машины типа МК5х4-16К, на основе заводских статико-кинематических параметров и показателей максимальной грузоподъемности. Результаты сравнивались с теоретическими расчетами научного института «Кривбасс-проект». Статичный момент нагрузки: головные канаты со средним показателем нагрузки 110 кНм; холостые канаты с максимальной нагрузкой 110,04 кНм. С помощью модифицированного метода продолжения была выведена амплитуда изменений статического и динамического напряжений за время полного рабочего цикла подъемной системы. С помощью степенной интерполяции находим аналитический вид функции (22) перемещения точки касания каната с барабаном, которая соответствует начально-краевым условиям. Предварительно определяем дискретный ряд значений обратной функции (10), применяя практические данные скоростей точек перемещения висячего головного каната. Учитывая полученные результаты, продемонстрируем график поля напряжений за весь период работы установки. Сравним практические показатели динамических напряжений, применяя модифицированный метод продолжения с теоретическими данными исследований запасов прочности.



Рис. 2. Напряжение в точке касания каната со шкивом намотки

На последнем графике: 1- функция напряжения с учетом отраженных и остаточных волн от подвижной границы (практические результаты); 2- функция напряжения без учета колебательных перемещений в точке касания каната со шкивом. То есть, учитывая влияние отраженных и остаточных волн от подвижной границы, можно установить реальные значения максимальных и минимальных колебательных амплитуд. Этот метод позволяет подобрать оптимальные параметры запасов прочности, которые соответствуют производственным параметрам рабочей установки в реальных условиях.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Несмотря на возбуждение в системе при каждом нарушении и восстановлении контакта грузов собственных колебаний, в ней все же могут существовать периодические режимы движения. Добиваться периодических режимов колебания различных технологических вибрационных механизмов целесообразно потому, что именно в таких режимах осуществляются стабильные технологические процессы. Следует учитывать также тот факт, что выбор параметров системы, обеспечивающих существование периодических режимов, осуществляется путем численного решения комбинации краевых и начальных условий телеграфного и волнового уравнений.

Разработанная здесь математическая модель позволяет рассматривать задачу существования периодических решений в более сложных системах с переменной структурой. Применение модифицированного метода продолжения показало, что характер распространения волн в среде с переменными границами и реальным сопротивлением имеет специфические особенности, которые существенно отличаются от характера движения волн в среде с неподвижными границами. Решение получено в виде суперпозиции начальной волны и волн, отраженных от подвижной точки. Необходимо отметить, что форма решения в точности соответствует траектории распространения продольных колебаний в канате при нагрузке на нижний конец головного каната.

Литература

1. Fritzkowski P., Kamiński H. Dynamics of a rope modeled as a discrete system with extensible members //Computational Mechanics. – 2009. – Т. 44. – №. 4. – С. 473-480.
2. Селиванов В. Механика разрушения деформируемого тела / В. Селиванов. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.
3. Бежок В. Шахтный подъем / В. Бежок, В. Дворников. Донецк: ООО «Юго-Восток», 2007.
4. Razdolsky A. G. Propagation of longitudinal deformation wave along a lifting rope of variable length //International journal of solids and structures. – 2011. – Т. 48. – №. 24. – P. 3359-3364.