

УДК 532.546

Д.Г. ЛЕКОМЦЕВ

Орловский государственный университет

## СРАВНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАБОТЫ СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ С КРУГОВЫМ КОНТУРОМ ПИТАНИЯ В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ

В данной статье обсуждаются работа скважин в анизотропном однородном пласте грунта. Цель работы состоит в построении и исследовании моделей работы совершенной эксплуатационной скважины в анизотропном пласте грунта с каноническими контурами питания. Поставленная плоскопараллельная задача о дебите скважин в анизотропном однородном пласте грунта с произвольным контуром питания, исследуется в случае кругового контура питания. Методом дискретных особенностей найдено численное решение задачи о работе совершенной скважины с круговым контуром питания. Изучено влияние анизотропии грунта на ее дебит. Этот результат сравнивается с приближенным решением. Решение задач о работе скважины в условиях грунтов сложной геологической структуры важны при эксплуатации нефтяных месторождений, водоносных слоев грунта.

Ключевые слова: скважина, анизотропный пласт, круговой контур питания, дебит, тензор проницаемости.

D.G. LEKOMTCEV

Orel State University

## COMPARE MATHEMATICAL MODELS OF PERFECT WELL WITH CIRCULAR SUPPLY CIRCUIT IN ANISOTROPIC GROUND

### Annotation

This article discusses the work well in an anisotropic homogeneous layer of soil. The purpose of this paper is to construct and study models of perfect production well in an anisotropic formation soil with canonical feeder circuits. Assigned plane-parallel task about debit of wells in anisotropic homogeneous bedlayer with optional external boundary of reservoir is explored in case of circular contour of feeding. Method of discrete singularities found a numerical solution of the problem of working perfectly well with a circular power circuit. The influence of anisotropy of bedlayer upon debit is recognized. This result is compared with the approximate solution. Solving problems on the work well under ground complex geological structures are important in the operation of oil fields, aquifers soil.

Keywords: well, anisotropic bedlayer, circular contour of feeding, debit, tensor of penetrability.

**Постановка проблемы.** В настоящее время имеет место постоянный рост объемов добычи нефти и природного газа, решение такого рода проблем (разработка нефтеносных и водоносных пластов грунта и т.д.) требует создания новых математических моделей фильтрационных течений в пластах сложной геологической структуры. Построению и исследованию некоторых из таких моделей и посвящена данная работа.

Совершенная (по степени вскрытия пласта) эксплуатационная скважина дебита  $Q$  расположена в горизонтальном пласте постоянной толщины. Дебит  $Q$  приходится на единицу толщины пласта. Грунт пласта недеформируемый анизотропный и однородный, характеризуется коэффициентом проницаемости  $K$  – тензором второго ранга (вообще говоря, несимметричным). В предположении плоскопараллельности задачи  $K = (K_{ij})$ ,  $i, j=1, 2$ . Компоненты тензора  $(K_{ij})$  – постоянные.

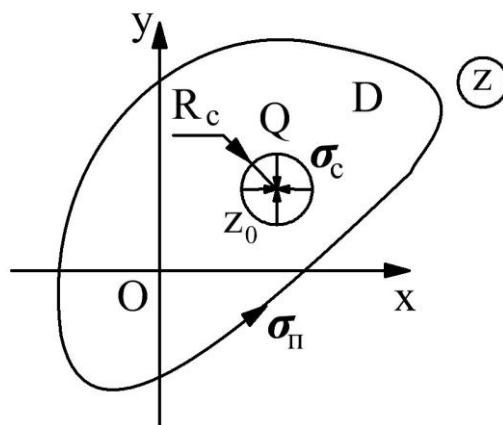


Рис. 1. Постановка задачи.

На физической комплексной плоскости  $z=x+iy$  ( $x, y$  - декартовы координаты) положение скважины характеризуется точкой  $z_0 = x_0 + iy_0$ , и течение происходит в области  $D$  с границей  $\Sigma$ , состоящей из контура питания  $\sigma_{\Pi}$  и контура скважины  $\sigma_C$ , ( $\Sigma = \sigma_{\Pi} \cup \sigma_C$  (рис.1)). Контур  $\sigma_{\Pi}$  моделируем произвольной замкнутой кривой класса Ляпунова, а контур  $\sigma_C$ , малой окружностью с центром в точке  $z_0$ . Причем, контуры  $\sigma_{\Pi}$  и  $\sigma_C$  не пересекаются. Контур  $\sigma_{\Pi}$  проходит против часовой стрелки.

На контуре  $\Sigma$  заданы (или подлежат определению) давления, то есть для них выполняются условия для обобщенного потенциала  $\varphi$  ( $\varphi = -(p + \rho\Pi)/\mu$ ,  $\Pi$  - потенциал массовой силы - силы тяжести,  $p$  - давление,  $\mu$  и  $\rho$  - вязкость и плотность жидкости) следующего вида [1]

$$\varphi^+(z) = \alpha_{\Pi}(z), \quad z \in \sigma_{\Pi}, \quad (1.1)$$

$$\varphi(z) = \alpha_C(z), \quad z \in \sigma_C, \quad (1.2)$$

где  $\alpha_{\Pi}(z)$  и  $\alpha_C(z)$  - непрерывные периодические функции.

Обобщенный потенциал  $\varphi$  удовлетворяет всюду в области  $D$ , (за исключением изолированных особых точек  $\varphi$ ) уравнению [2]:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla \varphi(z)) = 0, \quad z \in D \quad \left( \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right). \quad (1.3)$$

**Анализ публикаций по теме исследования.** Фильтрации в анизотропных грунтах посвящены работы [1-4]. Как показано в [3], при переходе на вспомогательную комплексную плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  круговой контур перейдет в эллиптический. Точное решение задачи о притоке к скважине в случае эллиптического контура питания дано в работе [5] при помощи конформного отображения эллипса на круг. Более простой и удобный для практических целей приближенный метод предложен в работе [6].

**Формулирование целей статьи.** Целью исследования явилось математическое моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта, в случае кругового контура питания, исследование влияния анизотропии грунта на дебит скважины, сравнение результатов даваемых математической моделью, построенной на основе метода дискретных особенностей с результатами, полученными на основе модели описывающей течение между конфокальными эллипсами [6].

**Основная часть.** Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом уравнения (1.3). Ее исследование значительно упрощается, если уравнение (1.3) привести к каноническому виду. Для этого перейдем на вспомогательную плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$ , используя гомеоморфные (аффинные) преобразования координат (прямое и обратное) [1]:

$$\zeta = z + \mu_0 \bar{z} \left( \mu_0 = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)}}, |\mu_0| < 1 \right), \quad (4.1)$$

где  $D(K_s) = K_{11}K_{22} - (K_{12} + K_{21})^2/4 > 0$  - определитель симметричной части  $K_s = (K_{ij} - K_{ji})/2$  тензора проницаемости  $\mathbf{K} = (K_{ij})$ . Перейдем на вспомогательную комплексную плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  ( $\xi, \eta$  - декартовы координаты). На плоскости  $\zeta$  скважина того же дебита  $Q$  расположена в точке  $\zeta_0$ , связанная с точкой  $z_0$  преобразованием (4.1) ( $\zeta_0 = z_0 + \mu_0 \bar{z}_0$ ). На плоскости  $\zeta$ , область течения  $D'$  ограничена кривой  $\Sigma' = \sigma'_{\Pi} \cup \sigma'_C$  ( $\sigma'_{\Pi}$  - контур питания,  $\sigma'_C$  - эллипс с центром в точке  $\zeta_0$ ), являющейся согласно (4.1) образом кривой  $\Sigma$ . На границе  $\Sigma'$  условия (1.1), (1.2) принимают вид

$$\varphi^+(\zeta) = \alpha'_{\Pi}(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_{\Pi}, \quad (4.2)$$

$$\varphi(\zeta) = \alpha'_C(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_C. \quad (4.3)$$

Работу скважины моделируем стоком мощности  $Q$  ( $Q > 0$ ), расположенном в точке  $\zeta_0$  плоскости  $\zeta$ . Течение к скважине в отсутствие границы  $\Sigma'$  описывает обобщенный потенциал  $\varphi_0(\zeta)$ , который представим в виде

$$\varphi_0(\zeta) = Q\Phi(\zeta, \zeta_0). \quad (4.4)$$

Здесь  $\Phi(\zeta, \zeta_0)$  - первое фундаментальное решение по переменной  $\zeta$  уравнения Лапласа ( $\Phi(\zeta, \zeta_0)$  - гармоническая функция  $\xi, \eta$ ) [1]:

$$\Phi(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|} \quad \left( |\zeta - \zeta_0| = [(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2]^{1/2} \right). \quad (4.5)$$

Искомый обобщенный потенциал течения представим в виде

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta),$$

где  $\varphi_*(\zeta)$  - обобщенный потенциал возмущений, обусловленных наличием границы  $\Sigma'$ . Тогда условия (4.2), (4.3) запишем для  $\varphi_*(\zeta)$ :

$$\varphi_*^+(\zeta) = \alpha'_{\Pi}(\zeta) - \varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_{\Pi}, \quad (4.6)$$

$$\varphi_*^-(\zeta) = \alpha'_C(\zeta) - \varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_C. \quad (4.7)$$

Условие (4.7) выполняется на контуре скважины  $\sigma'_C$ , длина которого мала по сравнению с характерным размером области фильтрации. Поэтому можно потребовать выполнение условия (4.7) в какой-либо точке  $\zeta_*$  контура  $\sigma'_C$  ( $\zeta = \zeta_* \in \sigma'_C$ ). Однако, как будет показано далее, дебит скважины  $Q$  существенно зависит от выбора точки  $\zeta_*$ . Чтобы значительно уменьшить эту зависимость, проведем усреднение условия (4.7), воспользовавшись тем, что обобщенный потенциал  $\varphi_*(\zeta)$  - гармоническая функция всюду в области  $D'$ . Контур скважины  $\sigma'_C$  - эллипс с полуосями  $A_C$  и  $B_C$  заменим окружностью  $\tilde{\sigma}'_C$  «эффективного» радиуса  $R'_C$  такого, что площади круга радиуса  $R'_C$  и эллипса равновеликие (равные):  $\pi R'^2_C = \pi A_C B_C$ . Отсюда  $R'_C = \sqrt{A_C B_C}$  или, как показано в [3],  $R'_C = R_C \sqrt{1 - |\mu_0|^2}$ . Заданное на контуре скважины  $\sigma'_C$ , условие (4.7) сносится в точку  $\zeta_0$  забоя скважины (расположения стока, моделирующего работу скважины). В частности, если  $\alpha_C = \text{const} = C$ , то  $\alpha'_C = C$  и, учитывая  $R'_C = R_C \sqrt{1 - |\mu_0|^2}$ , условие (4.8) запишем

$$\varphi_*(\zeta_0) = C + \frac{Q}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \ln [R_C \sqrt{1 - |\mu_0|^2}]. \quad (4.8)$$

Таким образом, будем решать далее задачу о работе скважины с условиями (4.6), (4.8).

Пусть контур скважины - окружность  $\sigma_C: x^2 + y^2 = R_C^2$ , а контур питания - окружность  $\sigma_{\Pi}: x^2 + y^2 = R_{\Pi}^2$ . Согласно преобразованию (4.1) круговой контур питания  $\sigma_{\Pi}$  перейдет на вспомогательной плоскости  $O\xi\eta$  в эллиптический контур  $\sigma'_{\Pi}$ . Согласно работе [3] уравнение контура  $\sigma'_{\Pi}$  в системе координат  $O\xi_1\eta_1$ , повернутой на угол  $\omega$  ( $\text{tg}2\omega = b/a$ ) относительно системы  $O\xi\eta$ , имеет канонический вид ( $A_{\Pi}$  и  $B_{\Pi}$  - полуоси эллипса)

$$\frac{\xi_1^2}{A_{\Pi}^2} + \frac{\eta_1^2}{B_{\Pi}^2} = 1, \quad (A_{\Pi} = R_{\Pi}(1 + |\mu_0|), \quad B_{\Pi} = R_{\Pi}(1 - |\mu_0|)). \quad (4.9)$$

Круговой контур скважины  $\sigma_C$  перейдет на вспомогательной плоскости  $O\xi\eta$  в эллиптический контур  $\sigma'_C$ . В той же системе координат  $O\xi_1\eta_1$  имеем каноническое уравнение эллипса  $\sigma'_C$  ( $A_{\Pi}$  и  $B_{\Pi}$  - полуоси эллипса):

$$\frac{\xi_1^2}{A_C^2} + \frac{\eta_1^2}{B_C^2} = 1, \quad (A_C = R_C(1 + |\mu_0|), \quad B_C = R_C(1 - |\mu_0|)). \quad (4.10)$$

Следуя [1], задачу о работе скважины в анизотропном пласте грунта сведем к решению системы интегрального уравнения

$$f(M) + 2 \int_{\sigma'_{\Pi}} f(N) \frac{\partial \Psi(N, M)}{\partial l_N} dl_N = 2[\alpha'_{\Pi}(M) - \varphi_0(M)], \quad M \in \sigma'_{\Pi}, \quad (4.11)$$

и интегрального соотношения

$$\int_{\sigma_{\Pi}} f(N) \frac{\partial \Psi(N, M_0)}{\partial l_N} dl_N = C + \frac{Q}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \ln \left( R_C \sqrt{1 - |\mu_0|^2} \right). \quad (4.12)$$

Здесь  $f(M)$  – функция класса Гельдера,  $\Psi(N, M)$  – функция, сопряженная первому фундаментальному решению (4.5).

$$\Psi(N, M) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sqrt{D(K_a)}}{\sqrt{D(K_s)}} \ln |\zeta_{1N} - \zeta_{1M}| - \arg(\zeta_{1N} - \zeta_{1M}) \right], \quad (4.13)$$

где  $D(K_A) = (K_{12} - K_{21})^2 / 4$  – определитель антисимметричной части тензора проницаемости  $K = (K_{ij})$ , а  $\zeta_{1N} = (\xi_{1N}, \eta_{1N})$ ,  $\zeta_{1M} = (\xi_{1M}, \eta_{1M})$  – координаты точек  $M$  и  $N$  в системе координат  $O\xi_1\eta_1$ .

Решим систему (4.11) – (4.12) численно относительно функции  $f(M)$  и дебита  $Q$ , входящего в  $\Phi_0(\zeta)$ . Воспользуемся методом дискретных особенностей [7], перейдем от системы (4.11) – (4.12) к системе  $n+1$  линейных неоднородных алгебраических уравнений [8]:

$$f_j + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \Omega_{ji} \Delta_j = 2[\alpha'_{\Pi} - Q\Phi_{Ci}], \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.14)$$

$$\sum_{j=1}^n f_j \Omega_{*j} \Delta_j = C + \frac{Q}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \ln \left( R_C \sqrt{1 - |\mu_0|^2} \right). \quad (4.15)$$

Решая систему уравнений (4.14)-(4.15) методом Гаусса, находим значения функций  $f_j$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  и искомый дебит  $Q$ .

С целью изучения влияния анизотропии грунта на дебит  $Q$  введем величину (относительный дебит)

$$\varepsilon = \frac{Q}{Q_0} - 1, \quad (4.16)$$

где  $Q_0$  – дебит скважины радиуса  $R_C$  с круговым контуром питания радиусом  $R_{\Pi}$  в случае изотропного грунта, рассчитываемый по формуле (см., например, [6])

$$Q_0 = \frac{2\pi(C - C_0)}{\ln \frac{R_{\Pi}}{R_C}}, \quad (4.17)$$

где  $C$  и  $C_0$  – постоянные давления на контурах скважины и питания. Далее выбираем  $C = 1, C_0 = 0$ .

Для исследования влияния на дебит  $Q$  различных компонентов тензора проницаемости грунта  $K$  введем коэффициенты

$$\alpha = \frac{K_{22}}{K_{11}} > 0, \quad \beta = \frac{K_{12} + K_{21}}{2K_{11}}, \quad \gamma = \frac{K_{12} - K_{21}}{2K_{11}}, \quad (\beta^2 < \alpha).$$

Следуя [6], запишем формулу для приближенного расчета дебита скважины

$$Q = \frac{2\pi\sqrt{D(K_s)}(C - C_0)}{\ln \frac{A_{\Pi} + B_{\Pi}}{A_C + B_C}} \quad (4.18)$$

**Выводы и перспективы дальнейших исследований.** На рис. 2 представлены зависимости относительного дебита  $\varepsilon$  от значений коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ . Видно, что общий характер хода кривых аналогичен. Максимальное различие дебитов, вычисленных на основе метода дискретных особенностей и найденного по формуле (4.18) составляет 6%. Анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите  $Q$  (может его увеличивать или уменьшать по отношению к  $Q_0$ ). С увеличением отношения недиагональных к диагональным компонентам тензора ( $K_{ij}$ ) (увеличение коэффициента  $\beta$ , коэффициент  $\alpha$  – фиксирован) влияние анизотропии уменьшается. Из результатов моделирования следует, что

основное влияние на дебит скважины в анизотропной среде оказывают диагональные компоненты тензора проницаемости  $K_{11}$  и  $K_{22}$ .

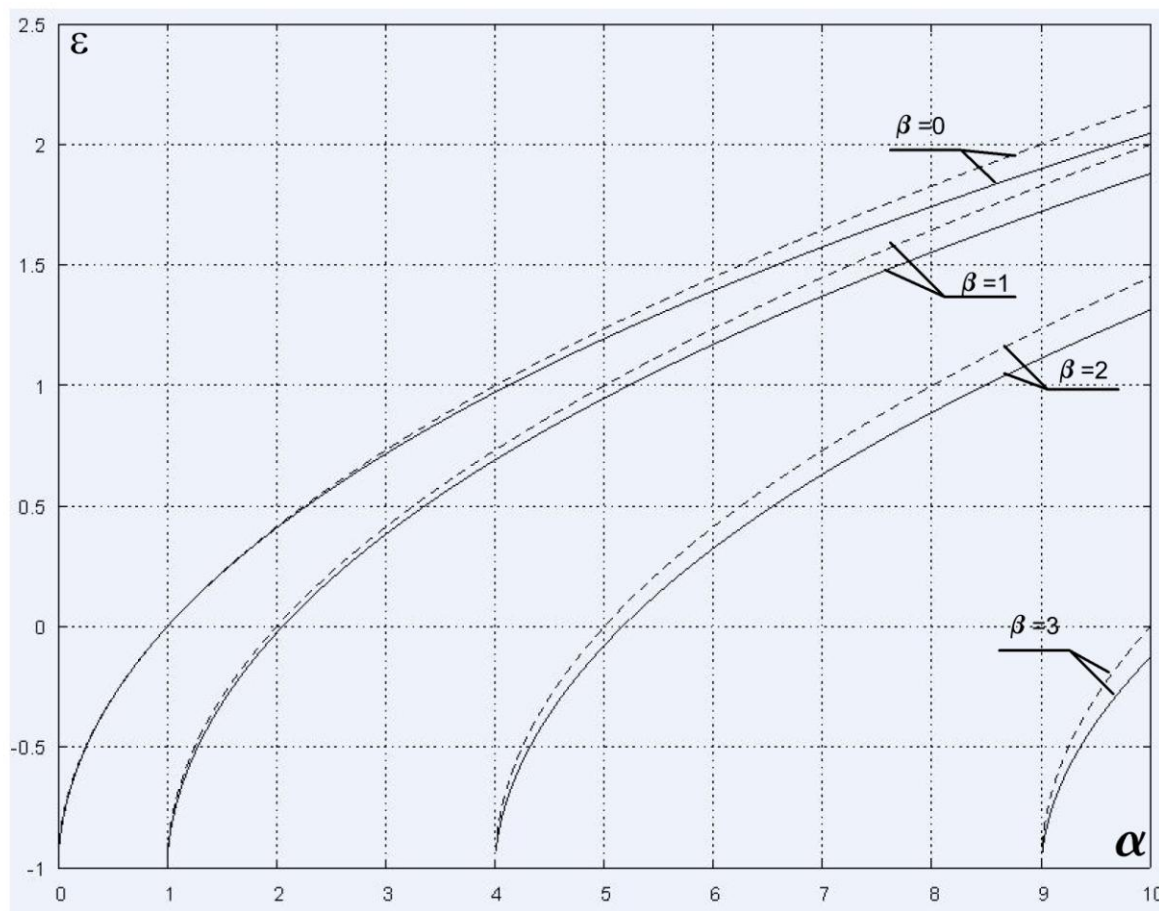


Рис. 2. Сравнение относительного дебита скважины найденного на основе метода дискретных особенностей (сплошные линии) и по формуле (4.18) (пунктирные линии),  $\gamma=0$ ,  $N=100$ .

### Литература

1. Пивень В.Ф. Задача о работе системы скважин в анизотропном пласте грунта / В.Ф. Пивень. – Труды XIV Международного симпозиума «МДОЗМФ-2009». – 2009. – С. 394-397.
2. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде / В.Ф. Пивень. – Труды XIII Международного симпозиума «МДОЗМФ». – 2007. – С. 239-243.
3. Пивень В.Ф. Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта / В.Ф. Пивень, Д.Г. Лекомцев // Ученые записки Орловского государственного университета. – 2012. – N 3. – С. 69-74.
4. Пивень В.Ф. Единственность решения граничных задач фильтрации в анизотропно-неоднородной пористой среде / В.Ф. Пивень // Вестник Харьковского национального университета. – 2007. – N 775. – С. 205-215.
5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 348 с.
6. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. / И.А. Чарный. - М.: Гостоптехиздат, 1963. – 396 с.
7. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И.К. Лифанов. – М.: ТОО "Янус", 1995. – 520 с.
8. Лекомцев Д.Г. Работа совершенной скважины в анизотропном слое грунта в случае кругового контура / Д.Г. Лекомцев // Материалы Международной молодежной научной конференции «Математическая физика и ее приложения» том 3. – 2012. – С. 34 – 40.