

1. УДК 539.3:519.6

Л.А. ФИЛЬШТИНСЬКИЙ, Ю.В. ШРАМКО, М.В. СИНАХ, Д.М. НОСОВ

Сумський державний університет

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДІЕЛЕКТРИЧНИХ КОМПОЗИТІВ РЕГУЛЯРНОЇ СТРУКТУРИ З ПОРОЖНИННИМИ ВОЛОКНАМИ

В роботі методом регулярних структур побудовано математичну модель волокнистого діелектричного композиту з порожнинними волокнами. Запропоновано два підходи до розв'язання задачі осереднення: із використанням техніки інтегральних рівнянь та методом рядів. Отримано розподіл компонент електричних полів у комірці композиту та побудовано залежності макромоделей від фізичних та геометричних характеристик композиту. Наведені результати розрахунків.

Ключові слова: композит, метод регулярних структур, метод інтегральних рівнянь, метод рядів, макромодуль.

L.A. FILSHTINSKII, YU.V. SHRAMKO, M.V. SYNAH, D.N. NOSOV

Sumy State University

MATHEMATICAL MODEL OF REGULAR STRUCTURE DIELECTRICAL COMPOSITES WITH HOLLOW FIBERS

Annotation

Here we study the properties of dielectric materials reinforced by regular double periodic groups of cylindrical hollow fibres, which cross sections are arbitrary smooth closed contours. It is assumed that average values of the electric induction component are set in the structure.

General representation of solution is investigated in class of quasi-periodic functions and described with Weierstrass zeta-function. An electrostatic boundary problem is reduced to the system of regular integral equations that was solved using numerical scheme of mechanical quadrature method, and is also reduced to infinite systems of linear algebraic equations.

We have constructed the algorithm of calculations of the macroscopic structure parameters via functionals, defined on solutions to the second kind regular integral equations system of corresponding boundary problem, and contain complete information about the microstructure of the cell. Also macromodules have been obtained by the method of series for the composite with symmetric stack of circular fibres. The results of numerical computations of averaged characteristics obtained with the two different methods coincide with the satisfactory accuracy. We have determined that the presence of hollow fibres leads to a significant reduction of macroparameter values of modelling medium compared with composites having solid fibres. Also this material will be orthotropic in terms of electrical properties.

Key words: composite, regular structure method, integral equation method, method of series, macromodulus.

Постановка проблеми. Розв'язання найважливіших задач, які стоять перед наукою та промисловістю з метою підвищення надійності, зниження матеріаломісткості конструкцій та споруд тісно пов'язано з розробленням та використанням композитних матеріалів (КМ). Пошук нових сполучень компонентів у композитах, спрямований на отримання необхідних якостей, призводить до розширення спектру структур матеріалів та збільшення фазності. Крім того, з метою зменшення ваги конструкції з КМ та забезпечення особливих умов експлуатації, наприклад, додаткове охолодження структурних елементів, волокна виготовляють порожнинними. У зв'язку з цим для розроблення ефективного методу проектування складу та структури КМ необхідні аналітичні співвідношення, які описують залежність макровластивостей КМ від геометричних параметрів та фізико-механічних властивостей компонентів. Зокрема, під час розгляду волокнистих композитів із діелектричними компонентами структури необхідно отримати макромодулі такої структури.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В механіці композиційних матеріалів сформовано два головних напрямки: механіка стохастичних [1,2,3] та механіка регулярних структур [4,5,6].

Сучасне виробництво волокнистих КМ дозволяє отримувати двоперіодичні структури або близькі до них. Тому при побудові макромоделей таких матеріалів природно припустити двоперіодичність розподілу відповідних польових величин, які виникають у композиті, і для опису використовувати двоперіодичні функції. Саме ця ідея лежить в основі методу регулярних структур [5]. Крім того, цей метод разом із побудовою макромоделі композиту дає вичерпну інформацію про локальні поля в околі неоднорідностей [5, 7, 8], що є важливим при проектуванні конструкції з КМ.

Мета статті. В даній роботі, яка базується на результатах дослідження [9], із використанням методу регулярних структур проведемо осереднення електричних властивостей волокнистих діелектричних композитів з двоперіодичною укладкою порожнинних волокон. Ці задачі цікаві ще й тому, що є основою для розв'язку більш складних проблем зв'язаної електропружності [1, 8].

Основна частина. Розглянемо однорідне ізотропне з точки зору електричних властивостей середовище, регулярно армоване порожнинними циліндричними волокнами (рис. 1). Вважатимемо, що поперечним перерізом кожного волокна є двозв'язна область D_1 , яка обмежена достатньо гладкими замкнутими контурами Γ_1 та Γ_2 ($\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$), кривизни яких задовольняють умовам Гельдера [10].

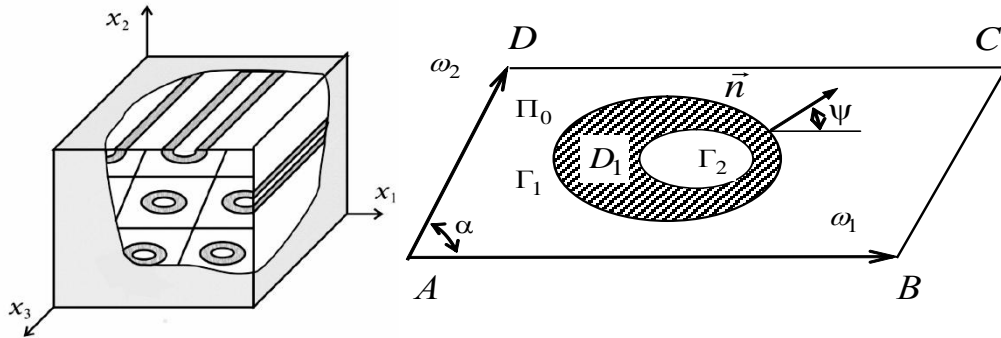


Рис. 1 Структура фундаментальної комірки

Припускається наступне: 1) конгруентні волокна мають однакові розміри та властивості; напрям армування вздовж вісі Ox_3 ; 2) волокна неперервно скріплені з матрицею по всій поверхні контакту; 3) отвори у волокнах заповнені середовищем, що асоціюється з вакуумом 4) у структурі задані середні значення компонент вектора електричної індукції $\langle D_1 \rangle$ і $\langle D_2 \rangle$.

Внаслідок геометричної і фізичної симетрії властивості композиту достатньо вивчити в межах фундаментальної комірки $ABCD$ (рис.1), побудованої на періодах ω_1 і ω_2 ($\text{Im}\omega_1 = 0, \text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$). Мають місце рівняння електростатики [11]:

$$\begin{aligned} \partial_j D_j^{(k)} &= 0; \quad E_j^{(k)} = -\partial_j \varphi_k; \\ D_j^{(k)} &= \varepsilon_k E_j^{(k)}; \quad \varepsilon_k = \varepsilon_0 \varepsilon_{kr}; \quad \partial_j = \partial / \partial x_j \quad (k, j = 1, 2); \end{aligned} \quad (1)$$

де $D_j^{(k)} = D_j^{(k)}(x_1, x_2)$ і $E_j^{(k)} = E_j^{(k)}(x_1, x_2)$ – компоненти вектора індукції та напруженості електричного поля, $\varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2)$ – потенціал електричного поля; ε_{kr} – відносна діелектрична проникність, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – абсолютна проникність вакууму (величини з верхнім індексом 1 відносяться до матриці, 2 – до волокна).

У даному випадку зручно ввести комплексні подання польових величин:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \text{Re}(f_k(z)), \quad E_1^{(k)} - iE_2^{(k)} = -F_k(z); \quad (k = 1, 2); \quad z = x_1 + ix_2 \\ \int_{AB} D_n^{(1)} ds &= -\varepsilon_1 \text{Im} f_1(z)|_A^B; \quad D_n^{(1)} = D_1^{(1)} \cos \psi + D_2^{(1)} \sin \psi; \end{aligned} \quad (2)$$

де $F_k(z) = f_k'(z)$ – функції, аналітичні у відповідних областях [10]; ψ – кут додатної нормалі.

Умови спряження електричних полів на контурі Γ_1 , які полягають у неперервному продовженні нормальної компоненти вектору індукції і дотичної компоненти вектору напруженості електричного поля [11], запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \text{Im}\{F_1(t)e^{i\psi}\} &= \text{Im}\{F_2(t)e^{i\psi}\} \\ \varepsilon_1 \text{Re}\{F_1(t)e^{i\psi}\} &= \varepsilon_2 \text{Re}\{F_2(t)e^{i\psi}\}, \quad t \in \Gamma_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Гранична умова на границі волокно-вакуум на контурі Γ_2 має вигляд:

$$\text{Re}\{F_2(t)e^{i\psi}\} = 0, \quad t \in \Gamma_2 \quad (4)$$

Умови (3-4) поставлені лише в основній комірниці. Для того, щоб вони виконувались на всіх волокнах, необхідно накласти певні умови на функцію $f_1(z)$. Припустимо

$$f_1(z + \omega_k) - f_1(z) = c_k \quad (k = 1, 2) \quad (5)$$

В силу (2), (5) середні значення компонент вектора індукції електричного поля на гранях комірки AB та AD визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} \langle D_2 \rangle &= -\frac{1}{\omega_1} \int_z^{z+\omega_1} D_n ds = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1} \text{Im} f_1(z)|_z^{z+\omega_1} = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1} \text{Im} c_1; \\ \langle D_2 \rangle \cos \alpha - \langle D_1 \rangle \sin \alpha &= -\frac{\varepsilon_1}{|\omega_2|} \int_z^{z+\omega_2} B_n ds = \frac{\varepsilon_1}{|\omega_2|} \text{Im} c_2, \quad \alpha = \arg \omega_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Введемо наступні подання шуканих функцій:

$$Az + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} v(t-z) p(t) ds = \begin{cases} f_1(z), & z \in \Pi_0/D_1 \\ f_2(z), & z \in D_1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{dv(z)}{dz} = \zeta(z); \quad \text{Im } p(t) = 0.$$

де $\zeta(z)$ – дзета-функція Вейєрштрасса [10]; $p(t) = \{p_j(t), t \in \Gamma_j\}$ – шукана "густина",

ds – елемент контуру $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; напрям інтегрування – проти годинникової стрілки; стала A підлягає визначенню з умови існування в структурі заданих середніх значень компонент вектора індукції електричного поля $\langle D_1 \rangle, \langle D_2 \rangle$.

Ядро інтегрального подання (7) в основній комірці можна подати у вигляді [5,10]

$$v(z) = \ln z - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{2j+2}}{(2j+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+2}; \quad \ln 1 = 0; \quad (8)$$

$$g_{2k} = \sum'_{m,n} (2/P)^{2k}; \quad g_2 = 0; \quad P = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

де штрих над символом підсумовування означає, що член, який відповідає $m=0, n=0$ відкидається. З (2) та (7) з урахуванням (8), отримуємо умову рівності нулю потоку вектора індукції електричного поля через довільний замкнений контур, що охоплює включення:

$$\int_{\Gamma} p(t) ds = 0. \quad (9)$$

Звідси випливає, що $f_1(z)$ – квазіперіодична функція [5, 10], а функція $F_1(z)$ – двоперіодична [5,10]. Тоді згідно з (2) потенціал електричного поля – квазіперіодична функція, а компоненти векторів електричної індукції та напруженості електричного поля будуть двоперіодичними.

Мають місце співвідношення [5,10]

$$v(z + \omega_k) - v(z) = \pi i + \delta_k (z + \omega_k / 2), \quad \delta_k = 2\zeta(\omega_k / 2) \quad (k=1, 2). \quad (10)$$

Звідси з урахуванням (9) знаходимо

$$c_k = A\omega_k - b\delta_k, \quad b = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} tp(t) ds \quad (k=1, 2). \quad (11)$$

Сталу A , що фігурує в (7), визначимо з рівностей (6), (11). З урахуванням співвідношення Лежандра [5,10] запишемо $\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i$. Тоді

$$A = -\varepsilon_1^{-1} (i\langle D_2 \rangle - \langle D_1 \rangle) + \frac{H\delta_1 b}{F} - \frac{2\pi}{F} \text{Re } b, \quad (12)$$

де $F = H\omega_1$ – площа фундаментальної комірки, $\omega_2 = h + iH$.

Повертаючись до граничної задачі (3)-(4), відмітимо, що перша умова спряження в (3) виконується автоматично, а інші – приводить до системи регулярних інтегральних рівнянь:

$$p_k(t_{0k}) + \frac{\varepsilon_k^*}{\pi F} \int_{\Gamma} p(t) \text{Re } G(t, t_{0k}) ds = N(t_{0k}), \quad (k=1, 2)$$

$$p(t) = \{p_j(t), t \in \Gamma_j\} \quad (j=1, 2), \quad G(t, t_{0k}) = \{G_{kj}(t, t_{0k}), t \in \Gamma_j\} \quad (13)$$

$$G_{kj}(t, t_{0k}) = (F\zeta(t - t_{0k}) - H\delta_1 t + 2\pi \text{Re } t) e^{i\Psi_{0k}},$$

$$N(t_{0k}) = -2\varepsilon_k^* \varepsilon_1^{-1} (\langle B_1 \rangle \cos \Psi_{0k} + \langle D_2 \rangle \sin \Psi_{0k}), \quad \Psi_{0k} = \Psi(t_{0k}), \quad t_{0k} \in \Gamma_k$$

$$\varepsilon_1^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{-1}, \quad \varepsilon_2^* = 1.$$

Процедура знаходження електричних полів у волокнистому композиті така: чисельно за допомогою метода механічних квадратур [10] розв'язується система (13), потім з використанням (2), (7) визначаються вирази для компонент вектора індукції електричного поля у структурі.

При оцінюванні полів в елементах конструкцій з композиційного матеріалу звичайно цей матеріал замінюють деяким гомогенним матеріалом, еквівалентним (у певному розумінні) середовищу з мікроструктурою. Питання такого типу зводяться до так званої проблеми осереднення властивостей композиційних матеріалів [1-7].

Для визначення тензора ефективних діелектричних проникностей матеріалу введемо середні градієнти потенціалу $\langle \partial_i \phi \rangle$. Так як модельне середовище однорідне, отримуємо:

$$\begin{aligned} -\omega_1 \langle \partial_1 \phi \rangle &= \phi_1(z + \omega_1) - \phi_1(z) = \text{Re } c_1; \\ -H \langle \partial_2 \phi \rangle - h \langle \partial_1 \phi \rangle &= \phi_1(z + \omega_2) - \phi_1(z) = \text{Re } c_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Вводячи тепер стандартні розв'язки $p_{nk}(t)$ інтегрального рівняння (13) за формулами $p_n(t) = \langle D_1 \rangle \varepsilon_1^{-1} p_{n1}(t) + \langle D_2 \rangle \varepsilon_1^{-1} p_{n2}(t)$ та враховуючи співвідношення (11), (12) та (14), отримуємо рівняння стану для волокнистого діелектричного композиту

$$\begin{aligned} \langle D_1 \rangle &= \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle E_1 \rangle + \langle \varepsilon_{12} \rangle \langle E_2 \rangle, \\ \langle D_2 \rangle &= \langle \varepsilon_{21} \rangle \langle E_1 \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle \langle E_2 \rangle, \\ \langle \varepsilon_{11} \rangle &= \frac{\langle \beta_{22} \rangle}{\Delta}, \quad \langle \varepsilon_{12} \rangle = \frac{\langle \beta_{21} \rangle}{\Delta}, \quad \langle \varepsilon_{21} \rangle = \frac{\langle \beta_{12} \rangle}{\Delta}, \quad \langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{\langle \beta_{11} \rangle}{\Delta}, \\ \langle \beta_{11} \rangle &= \frac{1}{\varepsilon_1} \left(1 + \frac{2\pi}{F} \text{Re } b^{(1)} \right), \quad \langle \beta_{12} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{2\pi}{F} \text{Re } b^{(2)}, \\ \langle \beta_{21} \rangle &= \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{2\pi}{F} \text{Im } b^{(1)}, \quad \langle \beta_{22} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_1} \left(1 + \frac{2\pi}{F} \text{Im } b^{(2)} \right), \\ b^{(k)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} t p_{nk}(t) ds, \quad \Delta = \langle \beta_{11} \rangle \langle \beta_{22} \rangle - \langle \beta_{12} \rangle \langle \beta_{21} \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Отже, матеріал володіє анізотропією електричних властивостей, величини $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ мають зміст ефективних діелектричних проникностей [7,9].

Для випадку тетрагональних та гексагональних комірок при симетричному укладанні кругових волокон розв'язок задачі осереднення можна отримати методом рядів за еліптичними функціями. Нехай комплексні періоди фундаментальної комірки $\omega_1 = 2i$ і $\omega_2 = 2de^{i\alpha}$, радіус включення $R_1 = \lambda\omega_1$, $\lambda \in (0; 0.5)$. Квазіперіодичні функцію $F_1(z)$ та $F_2(z)$ подамо у вигляді

$$F_1(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\zeta^{(k)}(z)}{k!}, \quad F_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k z^k, \quad \zeta^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k} \zeta(z), \quad (16)$$

де константу $A_0 = -\varepsilon_1 (\langle D_1 \rangle - i \langle D_2 \rangle) - \omega^{-1} A_1 \delta_1 + 2\pi F^{-1} \text{Re } A_1$ знаходимо із умови існування заданих середніх значень компонент вектора індукції (6). Для отримання решти невідомих A_k та B_k залуцаємо умови сполучення матриця-волокно (3) та волокно-вакуум (4).

Враховуючи розкладання еліптичних функцій, що справджуються в головній комірці [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^{(2k)}(z)}{(2k)!} &= \frac{1}{z^{2k+1}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_{2j+2k+2}}{2^{2j+2k+2}} C_{2j+2k+1}^{2k} z^{2j+1} \quad (k=0,1,\dots), \\ \frac{\zeta^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!} &= -\frac{1}{z^{2k+2}} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_{2j+2k+2}}{2^{2j+2k+2}} C_{2j+2k+1}^{2k+1} z^{2j}, \quad C_m^n = \frac{(m)!}{m!(m-n)!}, \end{aligned} \quad (17)$$

за допомогою звичайної в таких випадках процедури зводимо граничні рівності (3) та (4) до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. При цьому обмежимося розглядом симетричних комірок, для яких $\text{Im } g_{2m} = 0$, і, як результат, отримаємо дві незалежні нескінченні системи:

$$\begin{aligned} x_{2j+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k+2j+2} a_{j,k} x_{2k+1} &= 2\lambda \delta_j^0 N_j \langle D_1 \rangle \varepsilon_1^{-1}, \\ y_{2j+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k+2j+2} a_{j,k} y_{2k+1} &= 2\lambda \delta_j^0 N_j \langle D_2 \rangle \varepsilon_1^{-1} \quad (j=0,1,\dots), \\ \text{де } a_{0,0} &= -\delta N_0, \quad a_{0,k} = -g_{2k+2} N_0 \quad (k=1,2,\dots), \end{aligned} \quad (18)$$

$$a_{j,k} = \frac{1-\lambda_j}{1+\lambda_j} C_{2k+2j+1}^{2k+1} g_{2j+2k+2} \quad (k=0,1,\dots; j=1,2,\dots),$$

$$N_0 = \frac{\lambda_0 - 1}{1 + \lambda_0 - K_0(1 - \lambda_0)}, \quad \delta = \delta_1 \omega_1 - \frac{\pi \omega_1^2}{F}, \quad \lambda_j = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1 - \beta^{4j+2}}{1 + \beta^{4j+2}},$$

$$K_0 = \pi R_1^2 F^{-1}, \quad \lambda = R_1 \omega_1^{-1}, \quad \beta = R_2 R_1^{-1}, \quad \varepsilon_2^* = 0.5 \cdot (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1} + 1), \quad \bar{\varepsilon}_2^* = 0.5 \cdot (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1} - 1),$$

$$A_{2j+1} = R_1^{2j+1} (x_{2j+1} + iy_{2j+1}), \quad \text{Im} x_{2j+1} = \text{Im} y_{2j+1} = 0, \quad A_{2j+2} = 0$$

$$B_{2j} = \frac{\bar{A}_{2j+1} R_1^{-4j-2}}{\varepsilon_2^* \beta^{4j+2} - \bar{\varepsilon}_2^*}, \quad B_{-2j-2} = -B_{2j} R_2^{4j+2}, \quad B_{2j-1} = B_{-2j-1} = 0 \quad (j=0,1,2,\dots)$$

Переходячи до побудови макромоделі композита з симетричним укладанням порожнинних волокон, вводимо стандартні розв'язки системи (18) наступними співвідношеннями:

$$u_{2k+1} = 2 \frac{\langle D_1 \rangle}{\varepsilon_1} N_0 \lambda u_{2k+1}^*,$$

$$v_{2k+1} = 2 \frac{\langle D_2 \rangle}{\varepsilon_1} N_0 \lambda v_{2k+1}^* \quad (k=0,1,\dots).$$

Далі згідно з описаною вище процедурою осереднення властивостей діелектричного композиту отримуємо приведені матеріальні рівняння:

$$\langle D_1 \rangle = \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle E_1 \rangle, \quad \langle D_2 \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle \langle E_2 \rangle,$$

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \varepsilon_1 (1 - 2K_0 N_0 u_1^*)^{-1}, \quad \langle \varepsilon_{22} \rangle = \varepsilon_1 (1 - 2K_0 N_0 v_1^*)^{-1}. \quad (20)$$

Звернемось до результатів розрахунків. Розглядається композит тетрагональної будови ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$) з волокнами, поперечні перерізи яких, обмежені контурами (зовнішніми та внутрішніми) виду $t = a_r (a_0 + e^{i\theta} + a_1 e^{-i\theta} + a_2 e^{-2i\theta} + a_3 e^{-3i\theta}) e^{i\gamma}$, де для еліптичних контурів: $a_r = 0.5(R_1 + R_2)$, $a_1 = (R_1 - R_2)(R_1 + R_2)^{-1}$, $a_0 = a_2 = a_3 = 0$; R_1, R_2 – піввісі еліпса; для «квадратних» (з заокругленими кутами) контурів: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -0,12036$, $a_r = 1,1353 \cdot 2l$, $2l$ – середня лінія. Координати центра волокна у комірці (0,0). Матеріал матриці – діелектрик Д1 з відносною проникністю $\varepsilon_{1r} = 110$, матеріал волокон – діелектрик із відносною проникністю $\varepsilon_2 = 2500$.

На рис. 2 а) побудовані криві залежності макромоделей $\langle \varepsilon_{ii} \rangle / \varepsilon_1$ в функції параметра $\lambda = 2R_2 / \omega_1$ (криві 2-4) та $\lambda = 2l_2 / \omega_1$ (крива 1). Кривій 2 ($\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle$) відповідає композит з волокнами, що обмежені круговими контурами з зовнішнім радіусом $R_1 = 0.9$, кривим 3,4 ($\langle \varepsilon_{11} \rangle, \langle \varepsilon_{22} \rangle$) – композит з еліптичними волокнами $R_{11} = 0.9$, $R_{12} = 0.6R_{11}$ та $R_{22} = 0.6R_{21}$ та кривій 1 ($\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle$) – композит з «квадратними» волокнами $l_1 = 0.9$. На рис. 2 б) для композиту з круговими волокнами $R_1 = 0.9$ та еліптичними порожнинами $R_{22} / R_{21} = 0.5$ побудовані криві макромоделей $\langle \varepsilon_{ii} \rangle / \varepsilon_1$ в залежності від кута нахилу γ напіввісі еліпсу R_{21} . Кривим 1,2 відповідає $R_{21} = 0.7$ та кривим 3,4 – $R_{21} = 0.8$.

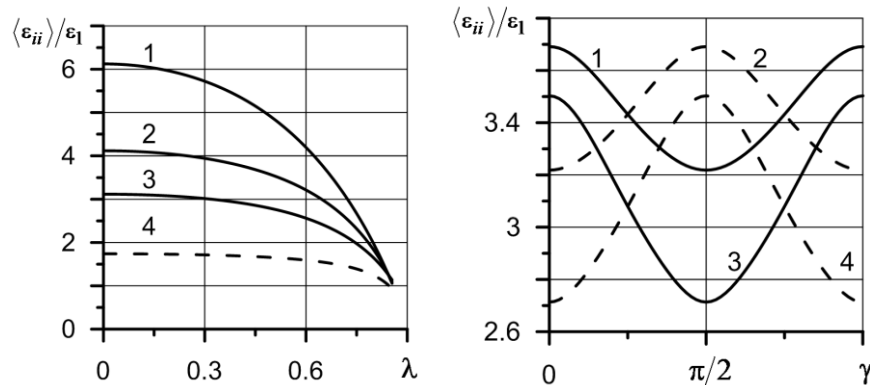


Рис. 2 Макромодулі композиту $\langle \varepsilon_{ii} \rangle / \varepsilon_1$ у функції параметру λ 1а) та γ 1б).

Висновки. У роботі досліджено властивості діелектричних матеріалів регулярно армованих циліндричними порожнинними волокнами, перерізи яких довільні досить гладкі замкнуті контури. Передбачається, що в структурі задані середні значення компонент вектора електричної індукції.

Загальне представлення розв'язку розшукувалося в класі квазіперіодичних функцій та описувалося дзета-функцією Вейерштрасса. Гранична задача електростатики зведена до системи регулярних інтегральних рівнянь, яка реалізована чисельно за схемою метода механічних квадратур, та до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Схема розв'язання проблеми осереднення була узагальнена на регулярно армовані діелектричні середовища з порожнинними волокнами. Методом регулярних структур побудовано алгоритм для знаходження макроскопічних параметрів структури через функціонали, які визначені на розв'язках системи регулярних інтегральних рівнянь другого роду відповідної граничної задачі та містять повну інформацію про мікроструктуру комірки. Також макромодулі отримано методом рядів для композиту з симетричним укладанням кругових волокон. Результати чисельних розрахунків осереднених характеристик, отриманих двома методами, збігаються із точністю до п'ятого знаку після коми.

Встановлено, що наявність порожнинних волокон приводить до істотного зменшення значень макропараметрів модельного середовища у порівнянні із композитом з суцільними волокнами. Крім того такий матеріал буде ортотропним з точки зору електричних властивостей.

Література

1. Соколкин Ю.В. Электроупругость пьезокомпозитов с нерегулярными структурами / Ю.В.Соколкин, А.А. Паньков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.
2. Хорошун Л.П. Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры / Л.П.Хорошун, Б.П. Маслов – Киев: Наук. думка, 1993. – 131 с.
3. Milton G.W. The theory of composite / G.W. Milton – Camb. Univ. Press, 2004. – 719 p.
4. Бардзокас Д.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры / Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин. — М.: Едиториал УРСС, 2003. – 376 с.
5. Григолюк Э.И. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами / Э.И. Григолюк, Л.А.Фильштинский – М.: Физико-матем. лит., 1994. – 335 с.
6. Manevitch L.I. Mechanics of periodically heterogeneous structures / L.I. Manevitch, I.V. Andrianov I.V., V.G. Oshmyan. — Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer., 2002 — 264 p.
7. Фильштинський Л.А. Усреднення магнетних властивостей волокнистих феромагнетних композитів / Л. А. Фильштинський, Ю. В. Шрамко, Д. С. Коваленко // Фізико-хімічна механіка матеріалів, 2010. – №6. – С. 82 – 90.
8. Yang F. The effective properties of smart composites with linear coupling behaviors./ F Yang, D. Zhang, L. Li, X. Han // Int. J. Mech. Mater Des, 2008. – 4 – P. 255 – 263.
9. Фильштинский Л.А. Усреднення магнітних властивостей пористих феромагнітних волокнистих композитів / Л.А. Фильштинский, Ю. В. Шрамко, Ю.В. Сіренко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій, 2012 –Вип. 20. – С. 343 – 349
10. Фильштинский Л. А. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Математический аппарат физических и инженерных наук. Т. 1. / Л.А. Фильштинский, Д.И.Бардзокас, М. Л. Фильштинский – М., Ижевск, НИЦ РХД, 2010. – 864 с.
11. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий – М.: Мир, 1986. – 159с.