УДК 534.1:539.3

О.М. ШУПІКОВ, Н.В. СМЕТАНКІНА, С.В.УГРІМОВ, Н.В.ДОЛГОПОЛОВА, Є.В.СВЕТ
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПІД ВПЛИВОМ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ

Запропоновано метод дослідження термопружного стану багатошарових незамкнених циліндричних оболонок неканонічної форми у плані. Задача розв'язується на основі прийому занурення та зводиться до інтегрування системи інтегро-диференціальних сингулярних рівнянь. Деформування оболонок розглянуто у рамках уточненої теорії першого порядку, яка враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення вздовж товщини у кожному шарі. Розроблений метод дозволяє одержати розв'язок задачі в аналітичному виді та підвищити якість розв'язання задач термопружності багатошарових оболонкових елементів конструкцій.

Ключові слова: багатошарова оболонка, складна форма плану, термопружність, плівкове джерело тепла.

А.Н. ШУПИКОВ, Н.В. СМЕТАНКИНА, С.В.УГРИМОВ, Н.В.ДОЛГОПОЛОВА, Е.В.СВЕТ
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Предложен метод исследования термонапряженного состояния многослойных незамкнутых цилиндрических оболочек неканонической формы в плане. Задача решается на основе приема погружения и сводится к интегрированию системы интегро-дифференциальных сингулярных уравнений. Деформирование оболочек рассматривается в рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига и обжатие по толщине в каждом слое. Разработанный метод позволяет получить решение задачи в аналитическом виде и повысить качество решения задач термоупругости многослойных оболочечных элементов конструкций.

Ключевые слова: многослойная оболочка, сложная форма плана, термоупругость, пленочный источник тепла.

O.M. SHUPIKOV, N.V. SMETANKINA, S.V. UGRIMOV, N.V. DOLGOPOLOVA, Ye.V. SVET
A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine

MATHEMATICAL MODELLING OF THERMOELASTIC STATE OF MULTILAYER CYLINDRICAL SHELLS AT NONSTATIONARY THERMAL FIELDS

A method for research of the thermal stressed state of multilayer non-closed cylindrical shells with a non-canonical plan form is offered. The problem solution is obtained on the basis of the immersion method and reduced to integration of a system of the integral-differential singular equations. Deformation of shells is considered within the framework of the first-order refined theory taking into account of transverse shear strains and reduction over thickness in each layer. The method developed allows to obtain the problem solution in an analytical form and to improve quality of solving of thermoelasticity problem for multilayer shell elements of structures.

Keywords: multilayer shell, complex plan shape, thermoelasticity, film heat source.

Постановка проблеми

Багатошарові оболонки є елементами відповідальних конструкцій у різних галузях сучасної техніки, тому що вони забезпечують високу міцність, жорсткість, поліпшені звуко- і теплоізоляційні характеристики при малій вазі конструкції [1] під впливом різних силових та температурних полів.

Основні методи розв’язання задач квазистатичної термопружності багатошарових оболонок можна розділити на аналітичні і чисельні. Найбільш поширеним у практиці розрахунків є метод скінченних елементів, але застосування чисельних методів до розв'язання задач термопружності конструкцій складної геометрії не знижує актуальність розвитку ефективних аналітичних методів розв’язання цих задач, особливо для конструкцій, виконаних з різнорідних матеріалів [1].

Аналіз публікацій за темою дослідження

Чисельні методи не завжди є ефективними при розв’язанні задач термопружності багатошарових елементів конструкцій, тому що їх розв’язання зводиться до розв’язання систем лінійних рівнянь великого порядку. Тому багато дослідників звертаються до розробки аналітичних або чисельно-аналітичних методів розв'язання таких задач. Наприклад, у статті [2] з використанням методу фундаментальних розв'язків розглянута задача термопружності нерівномірно нагрітих вздовж товщини циліндричних ортотропних оболонок. У монографії [3] методом фіктивних канонічних областей отримані окремі розв'язки плоских і осесиметричних задач термопружності. Стаття [4] присвячена розрахунку напружено-деформованого стану нерівномірно нагрітої сферичної оболонки за допомогою варіанта методу компенсуючих навантажень. Метод заснований на нових функціях Гріна, побудованих авторами. Розподіл температури є розв'язком задачі стаціонарної теплопровідності.

Кожен з методів має свої переваги і недоліки, що обмежують область застосування. Тому розробка нових методів і удосконалення існуючих методів розрахунку оболонок залишаються актуальними задачами.

Мета статті

Метою роботи є розробка методу розв'язання задачі термопружності багатошарових циліндричних оболонок складної форми в плані при впливі нестаціонарних температурних полів, який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді розвинень у тригонометричні ряди.

Основна частина

Задача термопружності багатошарової оболонки. Розглянемо незамкнену шарувату циліндричну оболонку, яка зібрана з I ізотропних шарів сталої товщини h_i $(i=\overline{1,I})$ та віднесена до декартової системи координат, яка пов'язана із зовнішньою поверхнею першого шару (рис. 1).

На координатній поверхні оболонка займає область Ω, обмежену контуром Γ: $x_\Gamma = x(s),\ y_\Gamma = y(s)$, де s – поточна довжина дуги.

На оболонку діють температурні поля і силові навантаження $\mathbf{P} = \{p_j(x,y)\}$, $j=\overline{1,3I+3}$, $(x,y)\in\hat{\Omega}$, $\hat{\Omega}\subset\Omega$. Температурні поля є результатом дії плівкових джерел тепла. Позначимо верхню і нижню поверхні оболонки як Ω_0 та Ω_I, бічну поверхню – Ω_Γ, причому $\Omega=\Omega_0$, $\Omega_\Gamma=\sum\limits_{i=1}^{I}\Omega_\Gamma^i$, $i=\overline{1,I}$.

Деформування оболонки описується на основі гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення вздовж товщини у межах кожного шару оболонки

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z-\delta_{i-1})u_{3+I(k-1)+i},\ k=1,2,3,\ i=\overline{1,I}, \tag{1}$$

де $u_k = u_k(x,y)$, $k=1,2,3$ – переміщення точки координатної площини в напрямку координатних осей; $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x,y)$, $k=1,2$ – кути повороту нормального елемента в i-му шарі навколо координатних осей; $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}(x,y)$ – обтиснення нормального елемента в межах i-го шару, $\delta_i = \sum\limits_{j=1}^{i} h_j$, $\delta_{i-1}\le z\le\delta_i$, $i=\overline{1,I}$. Деформації шарів визначаються відповідно до формул Коші, а напруження і деформації в шарах відповідно до гіпотези Дюамеля-Неймана зв'язані законом Гука.

Рівняння термопружної рівноваги багатошарової оболонки

$$[\mathbf{\Lambda}]\ \mathbf{U} = \mathbf{P}_T - \mathbf{P},\quad (x,y)\in\Omega \tag{2}$$

і граничні умови на контурі Г

$$\left[\mathbf{B}^\Gamma\right]\ \mathbf{U} = \mathbf{P}^\Gamma,\ (x,y)\in\Gamma \tag{3}$$

одержуємо з принципу можливих переміщень.

Елементи симетричних матриць $[\mathbf{\Lambda}]$ і $\left[\mathbf{B}^\Gamma\right]$ наведено в роботі [5], $\mathbf{U}$ – вектор, компонентами якого є функції (1)

$$\mathbf{P}_T = \left\{C_{1T,x}^I, C_{2T,y}^I, -C_{2T}^I/R, D_{1T,x}^i, D_{2T,y}^i, -C_{1T}^i - D_{2T}^i/R\right\};$$

$$\mathbf{P}^\Gamma = \left\{C_{1T}^I l_x^2 + C_{2T}^I l_y^2, \left(C_{1T}^I - C_{2T}^I\right)l_x l_y, 0, D_{1T}^i l_x^2 + D_{2T}^i l_y^2, \left(D_{1T}^i - D_{2T}^i\right)l_x l_y, 0\right\};$$

$$C_{1T}^I = \sum_{i=1}^{I} N_{1T}^i,\ C_{2T}^I = \sum_{i=1}^{I} N_{2T}^i,\ D_{1T}^i = h_i\sum_{j=i}^{I-1} N_{1T}^{j+1} + M_{1T}^i,\ D_{2T}^i = h_i\sum_{j=i}^{I-1} N_{2T}^{j+1} + M_{2T}^i;$$

$$N_{1T}^i = \frac{E_i\alpha_T^i}{1-\nu_i}\int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T^i\left(1+\frac{z}{R}\right)\mathrm{d}z,\ N_{2T}^i = \frac{E_i\alpha_T^i}{1-\nu_i}\int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T^i\mathrm{d}z,$$

$$M_{1T}^{i}=\frac{E_i\alpha_T^i}{1-\nu_i}\int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i}T^i\left(z-\delta_{i-1}\right)\left(1+\frac{z}{R}\right)\mathrm{d}z\,,\; M_{2T}^{i}=\frac{E_i\alpha_T^i}{1-\nu_i}\int\limits_{\delta_{i-1}}^{\delta_i}T^i\left(z-\delta_{i-1}\right)\mathrm{d}z\,,$$

де R – радіус оболонки; l_x, l_y – напрямні косинуси нормалі до контуру Г; E_i – модуль Юнга; ν_i – коефіцієнт Пуассона; α_T^i – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу i-го шару; $T^i = T^i(x, y, z)$ – температура в i-му шарі.

Розподіл температури в шарах оболонки є результатом розв'язання задачі нестаціонарної теплопровідності. На поверхнях оболонки відбувається конвективний теплообмін. Рівняння теплопровідності і граничні умови для багатошарової оболонки випливають із варіаційного рівняння теплового балансу [6].

Варіаційне рівняння дозволяє записати умови на зовнішніх поверхнях

$$-\xi_1^1 k_1\frac{\partial T^1}{\partial z}+\xi_2^1 H_1\left(T^1-T_{\text{в}}\right)=0,\ (x,y,z)\in\Omega_0\,;\ \xi_1^I k_I\frac{\partial T^I}{\partial z}+\xi_2^I H_I(T^I-T_{\text{н}})=0,\ (x,y,z)\in\Omega_I \qquad (4)$$

і на границі контакту шарів оболонки

$$k_i\frac{\partial T^i}{\partial z}-k_{i+1}\frac{\partial T^{i+1}}{\partial z}-q_\Omega^i=0\,;\ T^i=T^{i+1},\ z=\delta_i\,,\ \delta_i=\sum_{j=1}^{i}h_j\,,\ i=\overline{1,I-1}. \qquad (5)$$

У рівняннях (4), (5) T^i – температура в i-му шарі оболонки; k_i – коефіцієнт теплопровідності матеріалу i-го шару; H_1 та H_I – коефіцієнти конвективного теплообміну на верхній та нижній поверхнях оболонки; $T_{\text{в}}$ і $T_{\text{н}}$ – температура середовища на межі з верхньою та нижньою поверхнями; $q_\Omega^i(x,y,t)$ – інтенсивність i-го плівкового джерела тепла, розташованого на границі контакту шарів, $(x,y)\in\Omega_q$, t – час. Коефіцієнти $\xi_1^1,\ \xi_2^1,\ \xi_1^I$ та ξ_2^I дають можливість моделювати задані граничні умови.

Температура в шарах T^i та на бічній поверхні T_Γ^i, а також питомі потужності внутрішніх джерел тепла Q^i подаються у вигляді розвинення в ряд за поліномами Лежандра [6]

$$T^i(x,y,z,t)=\sum_{r=0}^{\infty}T_r^i(x,y,t)\,f_r^i(z),\ (x,y)\in\Omega,\ z\in\left[\delta_{i-1},\delta_i\right], \qquad (6)$$

$$T_\Gamma^i(x,y,z,t)=\sum_{r=0}^{\infty}T_{\Gamma r}^i(x,y,t)f_r^i(z),\quad (x,y)\in\Gamma\,,\quad Q^i(x,y,z,t)=\sum_{r=0}^{\infty}Q_r^i(x,y,t)f_r^i(z),\quad (x,y)\in\Omega_\Gamma^i\,, \qquad (7)$$

де $f_r^i(z)$ – поліном Лежандра степеня r. У рівняннях (6), (7) враховуються перші чотири члени ряду $(r=0,1,2,3)$, що забезпечує достатню точність розв'язку.

Метод розв'язання

В основу розв'язання задачі (2), (3) покладено метод занурення [5, 6], який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді розвинень у тригонометричні ряди. Вихідна багатошарова оболонка довільної форми в плані занурюється у допоміжну, яка охоплює багатошарову оболонку з тією ж композицією шарів. Форма оболонки, що охоплює задану, і граничні умови на її бічній поверхні обирають таким чином, щоб можна було одержати простий аналітичний розв'язок. У даній роботі роль допоміжної оболонки виконує шарнірно оперта оболонка прямокутної форми в плані. Тоді розв'язок задачі можна одержати у вигляді розвинень у тригонометричні ряди.

Щоб забезпечити виконання заданих граничних умов (3), до допоміжної оболонки додаються додаткові компенсуючі навантаження $\mathbf{Q}^{\text{comp}}=\left\{q_j^{\text{comp}}(x,y)\right\},\ j=\overline{1,3I+3}$, які розподілені вздовж контуру Г. Таким чином, вихідна крайова задача (2), (3) перетворюється на задачу про деформування допоміжної шарнірно опертої оболонки прямокутної форми в плані і описується системою рівнянь термопружної рівноваги, граничними умовами на контурі прямокутної оболонки та умовами на контурі Г

$$\left[\mathbf{\Lambda}\right]\ \mathbf{U}=\mathbf{P}^T-\mathbf{P}-\mathbf{P}^{\text{comp}}, \qquad (8)$$

$$\left[\mathbf{B}^{\text{г}}\right]\ \mathbf{U}=0,\ \ x=0,A,\quad y=0,B \qquad (9)$$

$$\left[\mathbf{B}^{\Gamma}\right]\ \mathbf{U}=\mathbf{P}^{\Gamma},\ (x,y)\in\Gamma\,. \qquad (10)$$

У рівняння термопружної рівноваги оболонки (8) компенсуючі навантаження входять у вигляді таких інтегральних співвідношень:

$$p_j^{\mathrm{comp}}(x,y)=\sum_{k=1}^{3I+3}\oint_{\Gamma} L_{jk}\, q_k^{\mathrm{comp}}(s)\delta(x-x_\Gamma, y-y_\Gamma)\mathrm{d}s\,. \qquad (11)$$

З урахуванням співвідношень (11) система (8)–(10) перетворюється на систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. Невідомими функціями є функції переміщень $\mathbf{U}$ (1) і компенсуючих навантажень $\mathbf{P}^{\mathrm{comp}}$ (11).

Метод розв'язання системи (15)–(17) полягає в розвиненні функцій переміщень, заданих і компенсуючих навантажень в тригонометричні ряди за функціями, які задовольняють граничні умови допоміжної оболонки прямокутної форми в плані

$$u_j(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_{jmn}B_{jmn}(x,y),\;\; p_j(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_{jmn}B_{jmn}(x,y),$$

$$p_j^T(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_{jmn}^T B_{jmn}(x,y),\;\; p_j^{\mathrm{comp}}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_{jmn}^{\mathrm{comp}}\, B_{jmn}(x,y),\;\; j=\overline{1,3I+3},$$

$$B_{1mn}=\cos\alpha_m x\sin\beta_n y,\;\; B_{2mn}=\sin\alpha_m x\cos\beta_n y,\;\; B_{3mn}=\sin\alpha_m x\sin\beta_n y\,,$$

$$B_{3+i\,mn}=B_{1mn},\;\; B_{3+I+i\,mn}=B_{2mn},\;\; B_{3+2I+i\,mn}=B_{3mn},\;\; \alpha_m=m\pi/A,\;\; \beta_n=n\pi/B\,,\;\; i=\overline{1,I}\,,$$

де A – довжина твірної допоміжної оболонки; B – довжина напрямної цієї оболонки.

Функції компенсуючих навантажень, а також граничних переміщень розвиваються в ряд уздовж контуру Г [5]. В результаті система (8) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, після чого обчислюються переміщення (1) та напруження в шарах вихідної оболонки.

Аналіз результатів чисельних досліджень

Як ілюстрація розв'язана задача термопружності п'ятишарової оболонки, контур якої складений з відрізків прямих і сполучених з ними дуг кіл.

На рис. 1 наведена розрахункова схема оболонки радіуса 2,5 м з такими геометричними параметрами: $l_1=0{,}74$ м, $l_2=0{,}16$ м, $l_3=0{,}75$ м, $l_4=0{,}26$ м, $R_k=0{,}03$ м, $k=\overline{1,4}$. Шари оболонки виконані з матеріалів з характеристиками $E_i=6{,}8\cdot10^4$ МПа, $\nu_i=0{,}22$, $\alpha_T^i=9\cdot10^{-6}$ °C^{-1}, $i=1,3,5$; $E_i=2{,}2\cdot10^2$ МПа, $\nu_i=0{,}38$, $\alpha_T^i=8{,}3\cdot10^{-5}$ °C^{-1}, $i=2,4$; $h_1=0{,}005$ м, $h_2=0{,}003$ м, $h_3=0{,}012$ м, $h_4=0{,}002$ м, $h_5=0{,}008$ м. Силові навантаження відсутні.

Поле температурних навантажень одержано з розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності багатошарових оболонок [6] з урахуванням впливу плівкового джерела. Бічна поверхня оболонки вважається ідеально теплоізольованою. Задача теплопровідності розв'язана з такими вихідними даними: $k_i=1{,}08$ Вт/(м·°C), $i=1,3,5$; $k_i=0{,}22$ Вт/(м·°C), $i=2,4$ (коефіцієнти теплопровідності матеріалу i-го шару); $H_1=433$ Вт/(м^2·°C), $H_2=20$ Вт/(м^2·°C) (коефіцієнти конвективного теплообміну на верхній і нижній поверхнях оболонки); $T_1=-30^{\circ}\mathrm{C}$, $T_2=20^{\circ}\mathrm{C}$ (температура середовища на границі з верхньою й нижньою поверхнями). Плівкове джерело тепла потужністю $q=6$ кВт/м^2 розташоване між першим і другим шарами оболонки. Розташування джерела показано штриховою лінією.

На рис. 2 показано розподіл температури та головного напруження σ_1^i ($i=\overline{1,I}$) вздовж товщини оболонки в точці D. Напруження одержані в момент часу, коли температура на поверхні із джерелом тепла досягає найбільшого значення. Видно, що на цій поверхні відбувається різке змінення температури та напруження, викликане наявністю джерела тепла. При цьому напруження не перевищує свого допустимого значення.

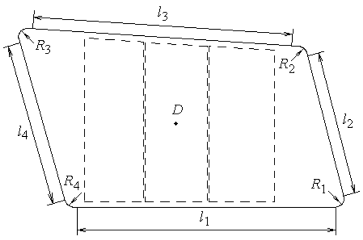

Рис. 1. Розрахункова схема оболонки

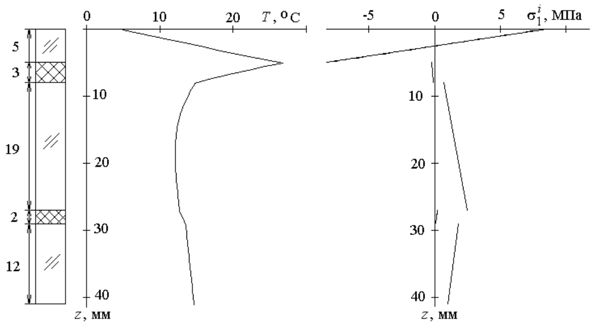

Рис. 2. Розподіл температури та напруження вздовж товщини оболонки

Висновки та перспективи подальших досліджень

Запропоновано метод розв'язання задач термопружності багатошарових циліндричних оболонок, який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді тригонометричного ряду. Це дозволяє проаналізувати структуру розв'язку, виявити притаманні йому властивості та особливості. Досліджено стан багатошарової оболонки складної форми у плані під дією температурних полів, отриманих із розв'язку задачі нестаціонарної теплопровідності. Одержані результати можуть бути використані при проектуванні оболонкових елементів транспортних, енергетичних і будівельних конструкцій.

Робота виконана у рамках Цільової Комплексної програми наукових досліджень НАН України «Проблеми ресурсу і безпека експлуатації конструкцій, споруд та машин» («Ресурс»).

Список використаної літератури

1. Telega J.J. Controllability and stabilization in elasticity, heat conduction and thermoelasticity: review of recent developments / J.J. Telega, W.R. Bielski // J. Global Optimization.– 2000.– Vol. 17, №. 4.– P. 353-386.
2. Шевченко В.П. Использование итерационной теории изгиба ортотропных пластин при сосредоточенных температурных воздействиях / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев, Т.О. Филимонова // Доповіді НАН України.– 2007.– № 3.– С. 77-82.
3. Ясницкий Л.Н. Метод фиктивных канонических областей в механике сплошных сред / Л.Н. Ясницкий. – М.: Наука, 1992.– 128 с.
4. Баженов В.А. Применение метода компенсирующих нагрузок для решения задачи термоупругого равновесия сферической оболочки. Кн. 1 / В.А. Баженов, Чан Дык Тинь // Будівельні конструкції.– 2003.– Вип. 59. – С. 300-306.
5. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н.В. Сметанкина. – Харьков: Міськдрук, 2011.– 376 с.
6. Shupikov A.N. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates / A.N. Shupikov, N.V.Smetankina, Ye.V. Svet // Trans. ASME. J. Heat Transfer.– 2007. – V. 129, № 3. – P. 335-341.