УДК 515.2

О.А. НІКІТЕНКО
Одеська державна академія будівництва та архітектури

ПОБУДОВА ТА АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС СПРЯЖЕНИХ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ

Робота присвячена аналітичному опису та комп'ютерному моделюванню спряжених поверхонь обертання. Для аналітичного опису криволінійних поверхонь було запропоновано алгоритм, який базується на використанні лінійчатих аксоїдів. Були розглянуті наступні пари спряжених поверхонь: два однопорожнинних гіперболоїда обертання, сфера і глобоїд, глобоїд та закритий тор. Усі поверхні було побудовано в графічному редакторі AutoCAD з використанням команди "Моделювання сітки обертання".

Ключові слова: спряжені поверхні, аксоїд, однопорожнинний гіперболоїд обертання, сфера, глобоїд, закритий тор.

О.А. НИКИТЕНКО
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Работа посвящена аналитическому описанию и компьютерному моделированию сопряженных поверхностей вращения. Для аналитического описания криволинейных поверхностей был предложен алгоритм, который базируется на применении линейчатых аксоидов. Были рассмотрены следующие пары сопряженных поверхностей: два однополостных гиперболоида вращения, сфера и глобоид, глобоид и закрытый тор. Все поверхности были построены в графическом редакторе AutoCAD с использованием команды "Моделирование сетки вращения".

Ключевые слова: сопряженные поверхности, аксоид, однополостный гиперболоид вращения, сфера, глобоид, закрытый тор.

O.NIKITENKO
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

CONSTRUCTION AND ANALYTICAL DESCRIPTION OF CONJUGATED SURFACES OF REVOLUTION

The work is devoted to analytical description and computer modelling of conjugated surfaces of revolution. The algorithm was proposed for analytical description of curved surfaces, which is based on the use of line axoids. There were the following pairs of conjugated surfaces: two one-sheeted hyperboloids, surface of a sphere and globoid, globoid and closed torus. All surfaces have been built in the graphic editor AutoCAD using the command "Modelling of the grid rotation.".

Keywords: conjugated surfaces, axoids one-sheeted hyperboloid of rotation, surface of a sphere, globoid, closed torus.

Постановка проблеми

На даний час теорія спряжених поверхонь в працях сучасних вчених вже достатньо вивчена. Такі поверхні використовуються у різноманітних зубчастих зачепленнях і в гвинтових компресорах. Особливістю формоутворення таких поверхонь є те, що вони проектуються у парі з урахуванням взаємно обвідного руху. Це, в свою чергу, розкриває широке поле діяльності для науковців, проектантів та пошукувачів в цій області.

Аналіз основних пошуків та публікацій

В попередній роботі було розглянуто побудову спряжених криволінійних поверхонь – а саме для гвинтової поверхні були побудовані спряжені криволінійна поверхня обертання та криволінійний гелікоїд. Для їх побудови було використано діаграму кінематичного гвинта для таких поверхонь з урахуванням положень обвідних аксоїдів.

Формування цілі досліджень

В цій роботі постає питання про побудову спряжених поверхонь, які можна описати аналітично. Тобто, не тільки побудувати спряжену поверхню для заданої у графічному редакторі, але й подати аналітичний опис формоутвореної поверхні.

Основна частина

Для формування спряжених поверхонь використовують метод діаграми кінематичного гвинта. Ще у 1963 році А.М. Підкоритов запровадив її використання для спряжених лінійчастих і криволінійних поверхонь обертання і гвинтових [1]. Суть цього методу складається у тому, що в діаграмі, побудованою за заданими вихідними параметрами: відстанню та кутом між осями спряжених поверхонь, – легко визначаються інші необхідні параметри. Але можна також знайти їх.

Закон побудови діаграми кінематичного гвинта базується на такій теоремі спряжених поверхонь: пряма, яка проходить через точку контакту перпендикулярна до твірної *l* та повинна перетинати обидві осі поверхонь (рис. 1). Виходячи з цього, зробимо комплексне креслення осей і твірної (рис. 2). Використавши формули аналітичної геометрії ми отримуємо формули для визначення необхідних параметрів.

Якщо задані Δ, φ і α, то відстань a визначається за формулою:

$$a = \frac{\Delta \sin 2\alpha (ctg\varphi + tg\alpha)}{2} \qquad (1)$$

Необхідно додати, що ця формула значно полегшує визначення необхідних даних для криволінійних поверхонь обертання, так як у цьому випадку діаграма досить громіздка і вимагає допоміжних побудов та вимірювань. Отже, для побудови спряжених поверхонь обертання ми можемо користуватися як діаграмою (графічний метод) як і формулою (1) (аналітичний метод).

Для того, щоб розглянути криволінійні спряжені поверхні обертання, необхідно спочатку розглянути спряження лінійчастих поверхонь, які будуть, в свою чергу, допоміжними аксоїдами. Такою поверхнею є однопорожнинний гіперболоїд обертання. Нехай задана відстань Δ і кут φ між осями, і гіперболоїд, у якого кут нахилу α. За формулою (1) визначаємо радіус його горловини a. Радіус горловини спряженого гіперболоїда дорівнює $b = \Delta - a$, а кут нахилу твірної $\beta = \varphi - \alpha$.

Для аналітичного опису введемо системи координат $O_1x_1y_1z_1$ та $O_2x_2y_2z_2$, які пов'язані з кожною поверхнею – осі i та j співнаправлені з осями z_1 та z_2 (рис. 1).

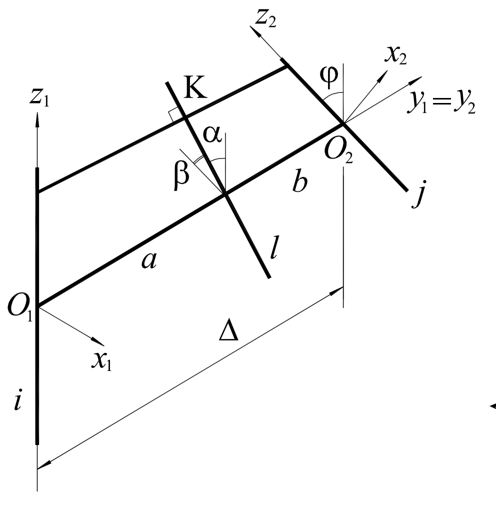

Рис. 1.

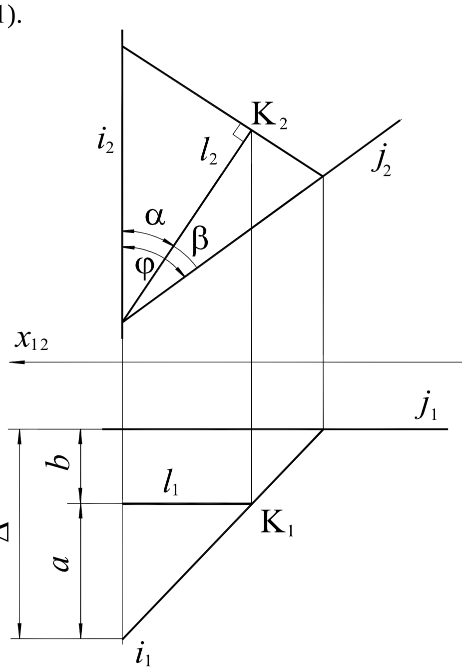

Рис. 2.

Задана: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2 ctg^2\alpha} = 1$ (координати $O_1x_1y_1z_1$)

(2)

Шукана: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2 ctg^2\beta} = 1$ (координати $O_2x_2y_2z_2$).

(3)

Запишемо рівняння (3) шуканої поверхні в координатах $O_1x_1y_1z_1$:

$$\frac{(x\cos\varphi - z\sin\varphi)^2}{b^2} + \frac{(y-\Delta)^2}{b^2} - \frac{(x\sin\varphi + z\cos\varphi)^2}{b^2 ctg^2\beta} = 1. \qquad (4)$$

Зробимо заміну $b = \Delta - a$ та $\beta = \varphi - \alpha$:

$$\frac{(x\cos\varphi - z\sin\varphi)^2}{(\Delta - a)^2} + \frac{(y-\Delta)^2}{(\Delta - a)^2} - \frac{(x\sin\varphi + z\cos\varphi)^2}{(\Delta - a)^2 ctg^2(\varphi - \alpha)} = 1. \qquad (5)$$

Система з двох рівнянь (2) та (5) визначає в просторі твірну *l*.

Комп'ютерна модель цих двох поверхонь зводиться до побудови двох осей *i* і *j* та твірної *l* (рис.1) яка за допомогою команди "Моделювання сітки обертання" утворює обидві поверхні (рис. 3).

Для аналітичного визначення спряжених криволінійних поверхонь пропонуємо наступний алгоритм:

1. Задається змінний параметр α (кут нахилу аксоїдної твірної) заданої поверхні, визначається залежний від нього параметр *a* за формулою (1).

2. На відстані *y* = *a* маємо переріз поверхні (коло, еліпс, тощо).

3. Точка *K* перетину аксоїдної твірної *l* і утвореного перерізу визначається системою: $\begin{cases} f(x,z) = 0 \\ z = -x\mathrm{ctg}\alpha \end{cases}$.

4. Отримані координати точки *K* переводяться з системи $O_1x_1y_1z_1$ до $O_2x_2y_2z_2$ (рис. 4).

5. При необхідності пункти 1-4 повторюються.

6. За даними координатами отриманих точок визначаються необхідні параметри кривої (наприклад, радіус, координати центра та інші).

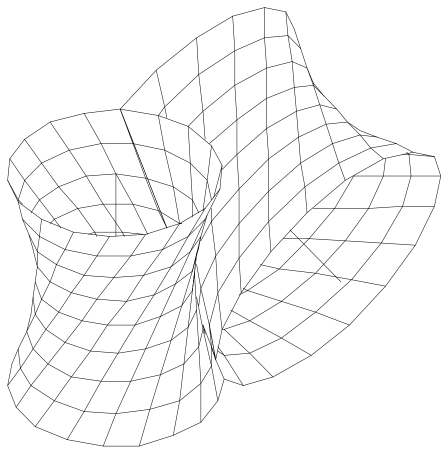

Рис. 3.

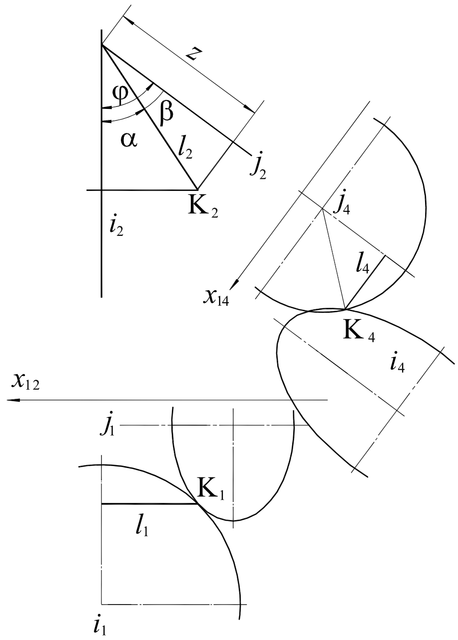

Рис. 4.

А зараз розглянемо алгоритм побудови двох спряжених поверхонь на прикладі, де однією з них є сфера з радіусом *R*. Звісно, спряженою поверхнею буде поверхня обертання, твірна якої є дугою з таким самим радіусом *R*. Але докажемо це аналітично. Нехай задано Δ і φ. Задамо змінний α і визначимо параметр *a*. На відстані *y* = *a* маємо переріз сфери: $x^2 + z^2 = R^2 - a^2$. Точку перетину утвореного кола і аксоїдної твірної *l* визначаємо системою:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 - a^2 \\ z = -x\mathrm{ctg}\alpha \end{cases}. \qquad (6)$$

Координати шуканої точки К: $(\sqrt{R^2 - a^2}\sin\alpha; a; \sqrt{R^2 - a^2}\cos\alpha)$. Переводимо ці координати у систему координат шуканої спряженої поверхні. Для того, щоб отримати профіль шуканої поверхні обертання визначимо координати по осі *z* та радіус кола, яке утворюється при оберті точки *K* навколо осі *j*.

Координата *z*: $z = -\sqrt{R^2 - a^2}\cos\beta$.

Радіус *r*: $r = \sqrt{(R^2 - a^2)\sin^2\beta + (\Delta - a)^2}$.

Щоб визначити характер кривої (коло або еліпс), було задано три аксоїдних твірних і відповідно визначимо три точки шуканої кривої. Склавши систему з трьох рівнянь з трьома невідомими (x_0, мала та велика осі еліпса), визначаємо, що велика і мала осі рівні, тобто крива є частиною кола.

Для визначення радіуса кола, в нашому випадку, достатньо мати дві точки на площині – ($\Delta - a$;0) (точка дотику на коротшій відстані між поверхнями) і довільна точка з координатами ($\sqrt{(R^2 - a^2)\sin^2\beta + (\Delta - a)^2}$; $-\sqrt{R^2 - a^2}\cos\beta$). Склавши систему рівнянь, отримуємо $r = R$ з центом в точці (Δ ,0,0). Тобто, маємо глобоїд – внутрішню частину тора (рис. 5). Класичне рівняння тора:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Так як у нашому випадку $R = \Delta$ і $r = R$, то рівняння отриманої поверхні в системі $O_2x_2y_2z_2$:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + \Delta^2 - R^2)^2 = 4\Delta^2(x^2 + y^2). \qquad (7)$$

Тепер розглянемо обернену задачу – для заданого глобоїда побудуємо спряжену поверхню обертання. Якщо центр твірного кола збігається з віссю шуканої спряженої поверхні, то шуканою спряженою поверхнею буде сфера з радіусом твірного кола глобоїда (рис. 5).

Розглянемо випадок, коли відстань між поверхнями $\Delta < R$, тобто шуканою спряженою поверхнею буде закритий тор. Розв'язуємо задачу згідно з запропонованим алгоритмом: задаємо α, визначаємо a і складаємо систему:

$$\begin{cases} (x^2 + a^2 + z^2 + R^2 - r^2) = 4R^2(x^2 + a^2) \\ z = -\mathrm{xctg}\alpha \end{cases}.$$

Ця система зводиться до біквадратного рівняння:

$$x^4 + (2\sin^2\alpha(R^2 + a^2 - r^2) - 4R^2\sin^4\alpha)x^2 + ((R^2 + a^2 - r^2)^2 - 4R^2a^2)\sin^4 a = 0. \qquad (8)$$

Так як твірною шуканої поверхні є дуга кола і відома точка контакту на коротшій відстані між осями ($\Delta - a$;0;0) , то достатньо визначити лише одну точку контакту, її координати: (x; a; -xctgα). Перевівши координати у систему $O_2x_2y_2z_2$, визначаємо радіус та центр кола.

В нашому випадку при $\Delta = 25$, $\varphi = 20$ та рівнянні заданого глобоїда в системі $O_1x_1y_1z_1$:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 35^2 - 25^2)^2 = 4 \cdot 35^2(x^2 + y^2)$$

маємо рівняння шуканого закритого тора в системі $O_2x_2y_2z_2$:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 13^2 - 28^2)^2 = 4 \cdot 13^2(x^2 + y^2).$$

Дві спряжені поверхні представлено на рис. 6.

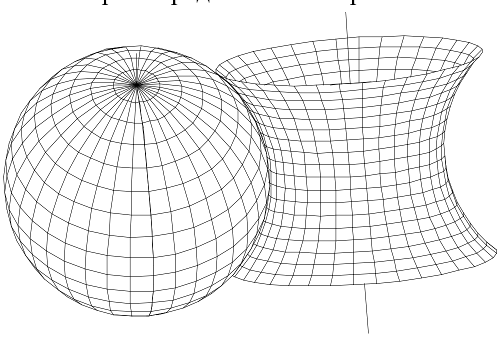

Рис. 5.

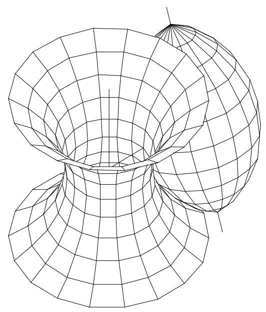

Рис. 6.

Висновки та перспективи подальшої роботи

В роботі було запропоновано алгоритм для аналітичного опису спряжених криволінійних поверхонь обертання. Цей алгоритм базується на використання лінійчатих аксоїдів – одно порожнинних гіперболоїдів обертання. Були розглянуті такі пари спряжених поверхонь: два гіперболоїда, сфера та глобо їд, глобо їд та закритий тор. Розглянуті поверхні були побудовані графічному редакторі AutoCAD за допомогою команди "Моделювання сітки обертання".

Наступним кроком цієї роботи буде побудова комп'ютерної моделі спряжених криволінійних поверхонь, у яких твірні – криві другого порядку.

Список використаної літератури

1. Подкорытов А.Н. Кинематический метод образования сопряженных винтовых поверхностей с применением диаграммы винта. / А.Н. Подкорытов // Труды Московского научно-методического семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. – 1963. – Вип. 2. – С. 36 - 45.
2. Потишко А.В. Справочник по инженерной графике под редакцией /А.В. Потишко. – Киев. Будивельник, 1983. – 264 с.
3. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. / П.Ф. Фильчаков – К.: Наукова думка, 1973. – 743 с.