

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Н.В. СТАРУН, С.І. БЕЗЕРДЯН
Херсонський національний технічний університет
Н.В. ОСИПОВА
Херсонський державний університет

УДОСКОНАЛЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО АЛГОРИТМУ ПОБУДОВИ ГАРМОНІЧНИХ БАЗИСІВ ДЛЯ ТРИКУТНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

В статті розглядаються можливості спрощення геометричного алгоритму побудови гармонічних базисів для скінченних елементів вищих порядків у формі прямокутних рівнобедрених трикутників.

Ключові слова: трикутний скінченний елемент, гармонічні функції.

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Н.В. СТАРУН, С.И. БЕЗЕРДЯН
Херсонский национальный технический университет
Н.В. ОСИПОВА
Херсонский государственный университет

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ БАЗИСОВ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье рассматриваются возможности упрощения геометрического алгоритма построения гармонических базисов для конечных элементов высших порядков в форме прямоугольных равнобедренных треугольников.

Ключевые слова: треугольный конечный элемент, гармонические функции.

G.Ya. TULUCHENKO, N.V. STARUN, S.I. BEZERDYAN
Kherson National Technical University
N.V. OSIPOVA
Kherson State University

IMPROVEMENT OF GEOMETRICAL ALGORITHM FOR CONSTRUCTING THE HARMONIC BASIS FOR TRIANGULAR FINITE ELEMENTS

The possibilities of simplifying the geometric algorithm for harmonic bases constructing for finite elements of higher orders in the form of rectangular isosceles triangles are discusses in the article.

Keywords: triangular finite element, harmonic functions.

Постановка проблеми

При застосуванні методу скінченних елементів (СЕ) до розв'язання ряду граничних та крайових задач є доцільним використання СЕ із гармонічними базисними функціями. У загальному випадку базисні функції є гармонічними тільки для СЕ першого порядку трикутної та прямокутної форми. Гармонічні базисні функції отримують на основі стандартних базисних функцій за допомогою різних методів апроксимації. Пошук більш ефективних методів апроксимації за вказаних умов є актуальною проблемою.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

У роботі [1] Пашковським О.В запропонований оригінальний геометричний алгоритм побудови гармонічних базисів для скінченних елементів у формі прямокутних рівнобедрених трикутників. Недоліком цього алгоритму є надлишкова громіздкість виконуваних перетворень та структури отримуваних при цьому базисних функцій.

У роботі [2] показана ієрархічна процедура побудови базисних функцій скінченних елементів через базисні функції скінченних елементів попередніх порядків та базисні функції скінченного елемента поточного порядку.

Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є доведення можливості спрощення геометричного алгоритму побудови гармонічних базисів для СЕ у формі прямокутних рівнобедрених трикутників. Доцільно також показати, що запропоновані спрощення не призводять до погіршення апроксимаційних властивостей отримуваних базисів.

Викладення основного матеріалу дослідження

У роботі [1] відзначаються такі позитивні якості СЕ у формі прямокутних рівнобедрених трикутників:

- 1) можливість їх застосування в сітках із прямокутними СЕ;
- 2) кращі показники обумовленості матриці жорсткості при використанні СЕ такого виду у порівнянні із використанням СЕ у формі різносторонніх трикутників.

Головна ідея алгоритму Пашковського О.В. полягає у доповненні прямокутного рівнобедреного трикутника до квадрата, заданні граничних умов на сторонах квадрата спеціальними способами і розв'язанні задачі Діріхле методом відокремлення змінних. За рахунок спеціально сформованих граничних умов отриманий розв'язок для квадратної області є для початкового трикутника базисною функцією.

Найпростіше за цим алгоритмом утворюються гармонічні базисні функції, які асоційовані з вузлами всередині катетів. В цьому випадку заданий трикутний скінченний елемент доповнюється до квадрата як показано на рис. 1. На двох суміжних сторонах квадрата задаються нульові граничні умови, а на двох інших – протилежні за знаком. Одна із двох останніх умов співпадає із стандартною базисною функцією на стороні СЕ.

Складно утворюються базисні функції, які набувають ненульових значень на гіпотенузі трикутника, оскільки в цьому випадку потрібно будувати допоміжну поверхню на квадраті, який складається із чотирьох трикутників так, щоб гіпотенузи трикутників утворювали сторони квадрата (рис. 2). Саме цей етап побудови базисних функцій автори пропонують спростити.

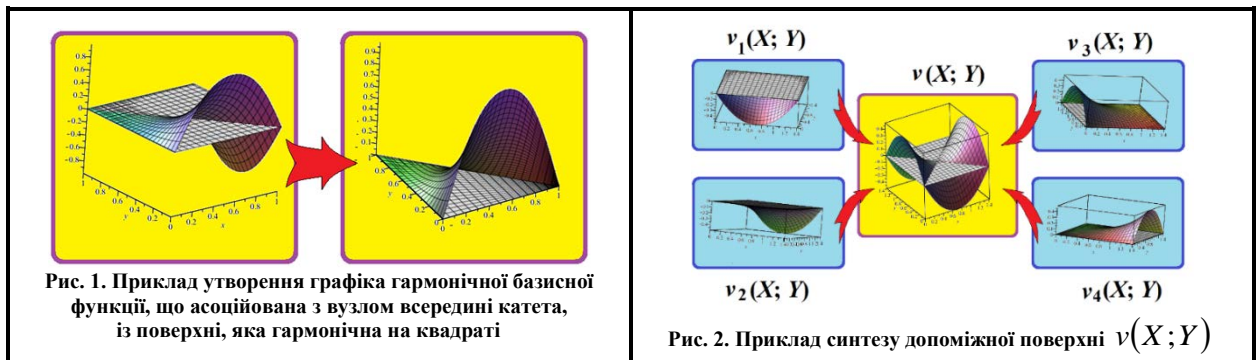


Рис. 1. Приклад утворення графіка гармонічної базисної функції, що асоційована з вузлом всередині катета, із поверхні, яка гармонічна на квадраті

Рис. 2. Приклад синтезу допоміжної поверхні $v(X; Y)$

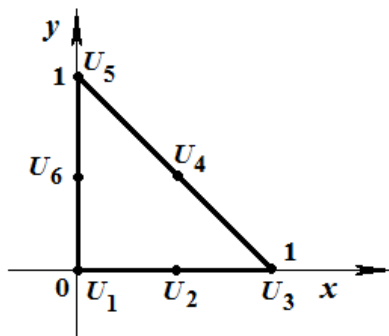


Рис. 3. Трикутний СЕ II порядку у формі прямокутного рівнобедреного трикутника

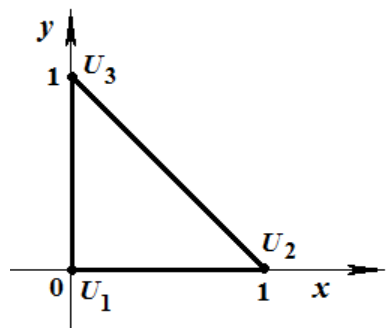


Рис. 4. Трикутний СЕ I порядку у формі прямокутного рівнобедреного трикутника

Розглянемо трикутний СЕ другого порядку у формі прямокутного рівнобедреного трикутника із катетами довжиною 1. Для наочності подальших перетворень наведемо вирази його базисних функцій $NS_i^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 NS_1^{(2)} &= (1-2x-2y)(1-x-y); & NS_2^{(2)} &= 4x(1-x-y); \\
 NS_3^{(2)} &= -x \cdot (1-2x); & NS_4^{(2)} &= 4xy; \\
 NS_5^{(2)} &= -y \cdot (1-2y); & NS_6^{(2)} &= 4y(1-x-y).
 \end{aligned} \quad (1)$$

Відзначимо, що базисна функція $NS_4^{(2)}$ є гармонічною і її непотрібно розкладати в ряд Фур'є при реалізації алгоритму Пашковського О.В. [1]. Крім того, базисні функції $NS_5^{(2)}$ і $NS_6^{(2)}$

можна отримати із базисних функцій $NS_3^{(2)}$ і $NS_2^{(2)}$, відповідно, за допомогою заміни $x = y$ і $y = x$.

Наведемо також вирази базисних функцій $NS_i^{(1)}$ трикутного СЕ першого порядку у формі прямокутного рівнобедреного трикутника (рис. 4):

$$NS_1^{(1)} = 1-x-y; \quad NS_2^{(1)} = x; \quad NS_3^{(1)} = y. \quad (2)$$

Очевидно, що базисні функції СЕ першого порядку є гармонічними.

Неважко помітити [2], що між базисними функціями (1) і (2) існують співвідношення:

$$NS_1^{(2)} = NS_1^{(1)} - \frac{1}{2} \cdot (NS_2^{(2)} + NS_6^{(2)}), \quad NS_3^{(2)} = NS_2^{(1)} - \frac{1}{2} \cdot (NS_2^{(2)} + NS_4^{(2)}), \quad (3)$$

$$NS_5^{(2)} = NS_3^{(1)} - \frac{1}{2} \cdot (NS_4^{(2)} + NS_6^{(2)})$$

В силу всіх зроблених вище зауважень за алгоритмом Пашковського О.В. необхідно знайти тільки одну гармонічну базисну функцію $NH_2^{(2)}$.

В табл. 1 наведені деякі локальні характеристики стандартного $\{NS_i\}$ та гармонічного $\{NH_i\}$ (побудованого за спрощеним алгоритмом) базисів.

Таблиця 1

Обчислювальні характеристики різних базисів трикутного СЕ II порядку

Базис	Структура базисних функцій		Число обумовленості матриці Грама у нормі L_2	Величина сліду матриці жорсткості
Стандартний $\{NS_i\}$	Степінь полінома	2	17,209	10,000
Гармонічний, побудований за спрощеним алгоритмом $\{NH_i\}$	Кількість доданків у частинних сумах	3	18,676	8,530
		5	18,839	8,536
		7	18,869	8,538

Спрощення алгоритму не привело до суттєвих змін оцінок локальних характеристик порівняно із локальними характеристиками гармонічного базису, побудованого за алгоритмом О.В. Пашковського [3-5]. Також зберігається суперечливий характер цих оцінок [4]. Оскільки в роботі [5] показано, що оцінка апроксимаційних властивостей базису за числом обумовленості матриці Грама має більшу потужність, тому побудуємо ще один базис $\{NM_i\}$ за рахунок модифікації базисних функцій, які асоційовані із вузлами у серединах сторін трикутника. Будемо шукати нові базисні функції у вигляді:

$$NM_2^{(2)} = NS_2^{(2)} \cdot (a_{00} + a_{10}x + a_{01}y);$$

$$NM_4^{(2)} = NS_4^{(2)} \cdot (b_{00} + b_{10}(x + y)),$$
(4)

де a_{ij} та b_{ij} – невідомі коефіцієнти.

Вираз для одного із невідомих коефіцієнтів у формулах (4) знайдемо із вимоги рівності в своєму вузлі базисної функції одиниці:

$$a_{10} = 2 \cdot (1 - a_{00}); \quad b_{10} = 1 - b_{00}.$$
(5)

Отже, в нашому випадку число обумовленості матриці Грама і величина сліду матриці жорсткості є функціями від трьох аргументів: a_{00} , a_{01} і b_{00} . Для візуалізації їх графіків необхідно використовувати чотирьохвимірний простір, тому для наочності викладення результатів досліджень зафіксуємо значення параметра $b_{00}=1$. На рис. 5-6 наведені перерізи графіків функцій: числа обумовленості матриці Грама і величини сліду матриці жорсткості, – коли $b_{00}=1$ в околі точки $a_{00}=1$, $a_{01}=0$.

За своєю структурою функція величини сліду матриці жорсткості є поліномом другого степеня і має один мінімум у точці $a_{00}=128/113$, $a_{01}=-177/113$, $b_{00}=1$, який наближено дорівнює 8,56. Розходження із табл. 1 викликано тим, що функції виду (3-4) є степеневими, а не тригонометричними поліномами.

В околі точки $a_{00}=1$, $a_{01}=0$, $b_{00}=1$ (при цих значеннях параметрів маємо стандартний базис) число обумовленості матриці Грама має локальний мінімум, який наближено дорівнює 17,209. Тому в околі точки, що визначає стандартний базис, характеристика базису за числом обумовленості матриці Грама не може бути покращена. В той же час функція числа обумовленості матриці Грама має інші локальні мінімуми (рис. 7).

Таким чином, перехід від стандартного базису до гармонічного для трикутного СЕ другого порядку не може приводити до покращення апроксимаційних властивостей, що на практичних задачах показано у роботі [5].

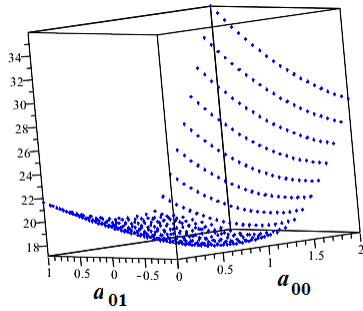


Рис. 5. Переріз графіка функції числа обумовленості матриці Грама, коли $b_{00}=1$ в околі точки $a_{00}=1, a_{01}=0$.

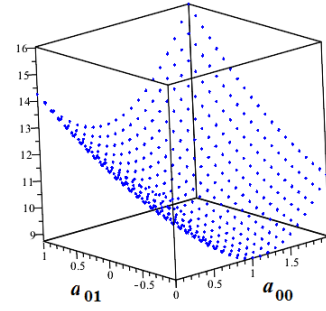


Рис. 6. Переріз графіка функції величини сліду матриці жорсткості, коли $b_{00}=1$ в околі точки $a_{00}=1, a_{01}=0$.

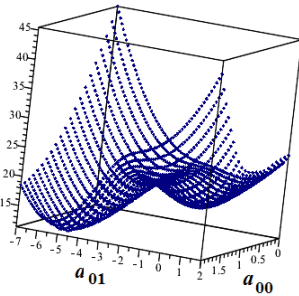


Рис. 7. Приклади існування локальних мінімумів на перерізі графіка функції числа обумовленості матриці Грама, коли $b_{00}=1$.

Висновки та перспективи подальших досліджень

Запропоноване спрощення алгоритму О.В. Пашковського, крім показаної у статті розрахункової ефективності, дозволяє поширити названий алгоритм на СЕ другого порядку у формі різносторонніх прямокутних трикутників, оскільки виключає потребу складання квадрата із чотирьох рівнобедрених прямокутних трикутників.

В роботі також показано, що вимога гармонічності базису не є вирішальною для покращення його апроксимаційних властивостей

навіть при розв'язанні задачі Діріхле, оскільки приводить до погіршення числа обумовленості матриці Грама.

Логічним продовженням даної роботи є дослідження властивостей базисів виду (4), що відповідають локальним мінімумам функції числа обумовленості відповідної матриці Грама (рис. 7).

Список використаної літератури

1. Пашковський А.В. Численно-аналитические методы стандартных элементов для моделирования стационарных физических полей в линейных кусочно-однородных и нелинейных средах : дис. ... доктора техн. наук : 05.13.18 / Александр Владимирович Пашковский. — Новочеркасск, 2014. — 364 с.
2. Taylor R.L. On completeness of shape functions for finite element analysis / R.I. Taylor // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1972. — Vol. 4. — P. 17—22.
3. Тулученко Г.Я. Побудова базисів трикутних скінченних елементів, які адаптовані до виду граничної задачі (повідомлення 1) / Г.Я. Тулученко, О.В. Котова, С.І. Безердян // Вісник Херсонського національного технічного університету. — 2014. — Вип. 3 (50). — С. 502—505.
4. Безердян С.І. Суперечливі оцінки апроксимаційних властивостей гармонічних базисів трикутного скінченного елемента II порядку / С.І. Безердян, Г.Я. Тулученко // Тези доповідей III Міжнародного форуму студентів, аспірантів і молодих вчених (м. Дніпропетровськ, 23-24 квітня 2015). — Дніпропетровськ: ДНУ, 2015. — С. 475—477.
5. Безердян С.І. Практична перевірка прогнозованих властивостей модифікованих базисів трикутного скінченного елемента II порядку / С.І. Безердян, Т.П. Білоусова, Г.Я. Тулученко // Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" (м. Київ, 25-26 червня 2015 р.). — К.: НУХТ, 2015. — С.188—189.