

**ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА КІНЕМАТИКИ НА ПРИКЛАДІ  
МАНІПУЛЯЦІЙНОГО РОБОТА З П'ЯТЬМА СТЕПЕНЯМИ СВОБОДИ**

*Робота присвячена питанню вирішення оберненої задачі кінематики для заданого положення маніпуляційного робота з п'ятьма степенями свободи. Для вирішення задачі було використано геометричний метод, записані рівняння кінематики.*

*Ключові слова: кінематика, маніпуляційний робот, обернена задача кінематики.*

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ НА ПРИМЕРЕ  
МАНИПУЛЯЦИОННОГО РОБОТА С ПЯТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

*Робота посвящена вопросу решения обратной задачи кинематики для заданного положения манипуляционного робота с пятью степенями свободы. Для решения задачи был использован геометрический метод, записаны уравнения кинематики.*

*Ключевые слова: кинематика, манипуляционный робот, обратная задача кинематики.*

**INVERSE KINEMATICS PROBLEM THE EXAMPLE  
OF A FIVE DEGREES OF FREEDOM MANIPULATION ROBOT**

*This work is devoted to solving the inverse kinematics problem for a given position of the handling operation of five degrees of freedom manipulation robot. To solve the problem was used geometric method, write down the equations of kinematics.*

*Keywords: kinematics, Robot manipulation, inverse kinematics.*

**Постановка проблеми**

Кінематичний аналіз структури маніпулятора стосується опису руху маніпулятора відносно нерухомої декартової системи координат, ігноруючи сили і моменти, які викликають рух структури. Кінематика описує аналітичні відносини між положеннями з'єднань і положенням виконавчого елемента кінця, і його орієнтацією [1].

Формулювання відносин кінематики дозволяє вивчати два ключові завдання робототехніки: пряму і обернену задачу кінематики. Раніше розробники турбувалися про визначення систематичного, загального методу, щоб описати рух виконавчого елемента кінця як функції об'єднаного руху за допомогою лінійних інструментів алгебри [2]. Зараз розробники зацікавлені в зворотній задачі, її рішення має фундаментальне значення, щоб перетворити бажаний рух кінця виконавчого елемента в робочому просторі у відповідний об'єднаний рух [3].

**Метою даної роботи** є вивчення структури маніпуляторів і їх кінематичний аналіз, а також розв'язання оберненої задачі кінематики на прикладі маніпуляційного робота з п'ятьма ступенями свободи.

**Обернена задача кінематики маніпуляційного робота**

Обернена задача кінематики полягає в тому, що при відомих геометричних параметрах ланок знайти всі можливі вектори приєднаних змінних маніпулятора, забезпечують задані положення й орієнтацію схвата відносно абсолютної системи координат. Уміння вирішувати обернену задачу надзвичайно важливо для управління маніпулятором.

Обернена задача кінематики, як і пряма задача, є однією з основних задач кінематичного аналізу та синтезу маніпуляторів. Як правило, обернена задача виявляється більш складною у порівнянні з прямою. Це пояснюється тим, що при вирішенні оберненої задачі кінематики може виникнути кінематична невизначеність, коли для одного і того ж положення схвата може існувати дві або більше конфігурацій маніпулятора.

Обернену задачу кінематики можна сформулювати так: задана кінематична схема маніпулятора і відомі положення і орієнтація схвата в системі координат стійки. Потрібно визначити значення узагальнених координат, які забезпечать задане положення схвата.

У загальному випадку складність оберненої задачі кінематики полягає в тому, що для обраної конфігурації схвата може або взагалі не бути рішень, або може бути тільки одне рішення або їх може бути відразу декілька (іноді навіть нескінченна безліч).

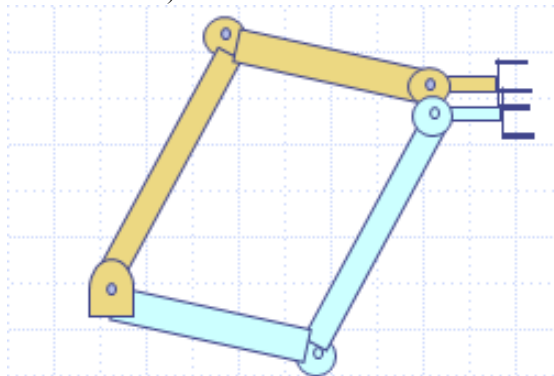


Рис. 1. Два різних вирішення однієї оберненої задачі кінематики.

Існують різні методи отримання рішення оберненої задачі, до числа яких відносяться методи зворотних перетворень, гвинтової алгебри, двоїстих матриць, двоїстих кватерніонів, ітераційний і геометричний підхід, але, в цілому, всі методи розв'язання оберненої задачі кінематики можна розділити на аналітичні та чисельні [4].

Для знаходження розв'язку оберненої задачі кінематики по заданій матриці маніпулятора більш придатним є геометричний підхід, який дає також і спосіб вибору єдиного рішення для конкретної конфігурації маніпулятора. Він включає в себе розділення завдання на декілька 2D рішень та вирішенні кожного окремо.

В роботі розглянуто маніпуляційний робот з п'ятьма степенями свободи. Для даного маніпулятора було виділено дві окремих задачі (рис.2).

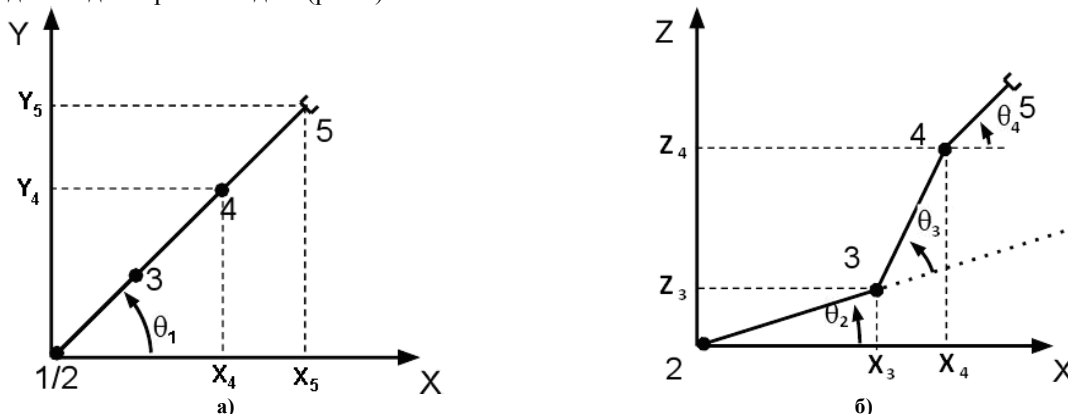


Рис. 2. Маніпулятор: а) - зображений в площині XY; б) - зображений в площині XZ

Перше завдання буде для знаходження  $\theta_1$  при вигляді зверху, тільки з урахуванням площині XY. Друге – для знаходження  $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ . Це робиться враховуючи ланку як 2D завдання в новій площині XZ, де X являє собою гіпотенузу утворену кінцевим положенням в попередній XY площині. Вирішення оберненої задачі дає точки X, Y, Z – координати положення схвату.

Для знаходження  $\theta_1$  використовуємо вираз (1).

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{Y_5}{X_5}\right). \quad (1)$$

Для знаходження  $\theta_2$  і  $\theta_3$  необхідно дізнатися положення четвертої ланки на площині XZ. Це можна зробити, знаючи кінцеве положення, довжину ланки і цільовий кут нахилу, який позначаємо  $\phi$ .

$$X_4 = X_5 - l_4 \cos(\phi);$$

$$Z_4 = Z_5 - l_4 \sin(\phi).$$

Після деяких замінів та спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned} X_4 &= l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2 \cos(\theta_2) \\ Z_4 &= l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (2)$$

Виконавши підстановки та перетворення отримуємо вирази (3) для знаходження кутів  $\theta_2$  і  $\theta_3$ .

$$\theta_3 = \arctg \left( \frac{\pm \sqrt{1 - \left( \frac{Z_4^2 + X_4^2 - l_3^2 - l_2^2}{2l_3 l_2} \right)^2}}{\left( \frac{Z_4^2 + X_4^2 - l_3^2 - l_2^2}{2l_3 l_2} \right)} \right) \quad (3)$$

$$\theta_2 = \arctg \left( \frac{\pm \sqrt{1 - \left( \frac{X_4(l_3 \cos(\theta_3) + l_2) + l_3 \sin(\theta_3) Z_4}{X_4^2 + Z_4^2} \right)^2}}{\frac{X_4(l_3 \cos(\theta_3) + l_2) + l_3 \sin(\theta_3) Z_4}{X_4^2 + Z_4^2}} \right)$$

За допомогою отриманих виразів (3) та використовуючи  $\varphi$  можна визначити  $\theta_4$ .

$$\theta_4 = \varphi - (\theta_2 + \theta_3).$$

Значення кут  $\theta_5$  не знаходиться, оскільки він не впливає на положення кінцевої ланки (схвату), а впливає лише на його орієнтацію.

Числове розв'язання оберненої задачі кінематики для маніпуляційного робота з п'ятьма степенями свободи було проведено в середовищі MatLab. Вихідні данні представлено у табл. 1.

Таблиця 1.

Параметри зчленувань для маніпуляційного робота

Тип рухомої ланки	Номер рухомої ланки	Параметри кінематичної пари		
		$\theta_i$	$l_i$	$\alpha_i$
Основа	1	$\theta_1$	3	0°
Плече	2	$\theta_2$	0	90°
Лікоть	3	$\theta_3$	50	0°
Зап'ястя	4	$\theta_4$	25	0°
Схват	5	$\theta_5$	5	-90°

де  $\alpha_i$  - кут, на який треба повернути вісь  $Z_{i-1}$  навколо осі  $X_i$ , щоб вона стала співнаправленою з віссю  $Z_i$ .

Ланка  $l_2$  не має довжини, бо кожна кінематична пара має один ступінь рухливості, а ця ланка виконує лише функцію повороту. В таблиці 2 наведені значення кутів  $\theta_i, i = \overline{1,4}$  при двох розв'язках однієї задачі.

Таблиця 2.

Значення отриманих кутів при вирішенні оберненої задачі

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$
Задані кути	20°	45°	-30°	45°
Розв'язок 1	20°	16.29°	44.22°	-105.51°
Розв'язок 2	20°	45.09°	-44.22°	-45.87°

В результаті розрахунків отримано координати положення схвату маніпулятора (кінцева точка ланцюга)  $x= 59.98, y= 21.83, z= 42.33, \phi = 45^{\circ}$ .

Отримані положення маніпулятора можна побачити на рисунках 3 та 4.

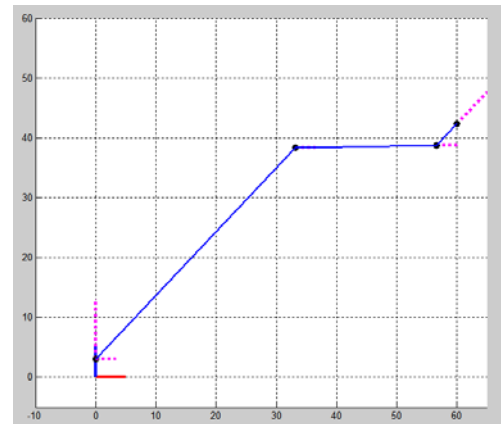
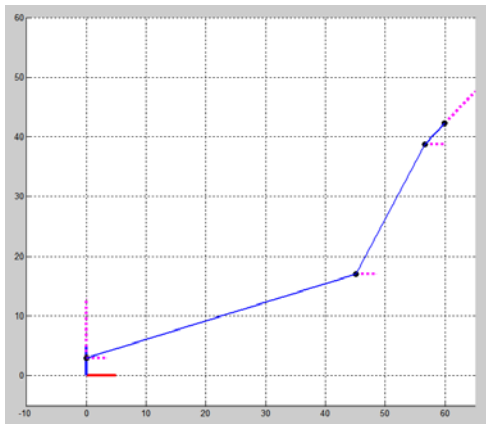


Рис. 3. Для площини XZ: а) – перший розв’язок; б) – другий розв’язок

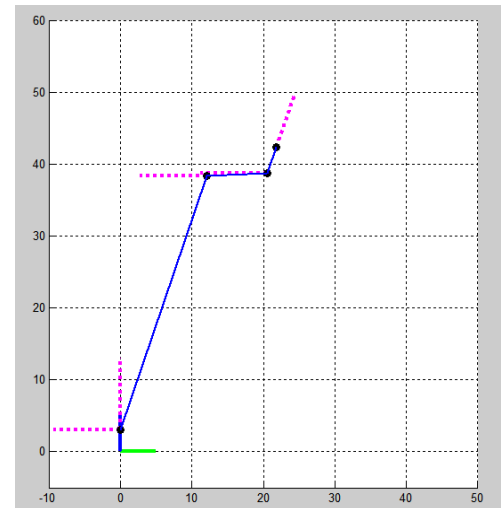
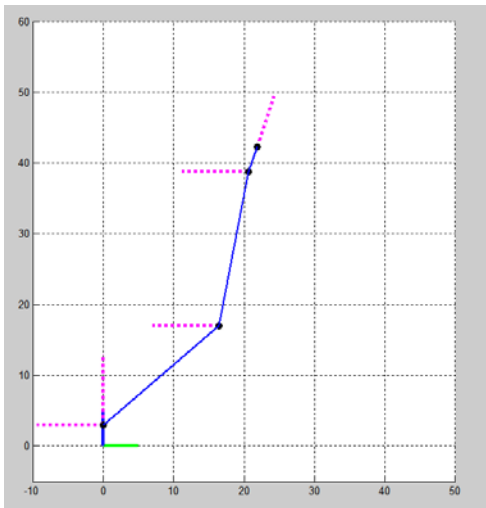


Рис. 4. Для площини YZ: а) – перший розв’язок; б) – другий розв’язок

### Висновки

Представлені рівняння кінематики, що описують обернену кінематику маніпуляційного робота. Вирішена обернена задача кінематики, результати перевірені за допомогою прикладної програми в MatLab, також представлені графіки.

Подальші дослідження пов’язані з дослідженням динаміки маніпуляційного робота.

### Список використаної літератури

1. Юревич Е. И. Основы робототехники / Е. И. Юревич. – С.-П.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
2. Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора / Р. Пол; под ред. Е. П. Попова; перевод с англ. А. Ф. Верещагина, В. Л. Генерозова. – М.: Наука, 1976. – 103 с.
3. Зенкевич С. Л. Основы управления манипуляционными роботами / С. Л. Зенкевич, А. С. Ющенко, – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. – 480 с.
4. Гонсалес Р. Робототехника / К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли; под редакцией В.Г. Градецкого. – М.: Мир, 1989. — 620с.