УДК 532.5

О.Г. ГОМАН, В.А. КАТАН
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В СМЫСЛЕ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ ПО АДАМАРУ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛА И ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В работе задача об определении положения зоны отрыва течения при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости сведена к решению трансцендентного уравнения относительно координаты начальной точки отрыва с использованием формул Адамара-Манглера для полученных расходящихся интегралов. Для случая удара вертикальной пластинки проведено сравнение с аналитическим решением поставленной задачи.

Ключевые слова: отрыв течения, удар, трансцендентное уравнение, формулы Адамара Манглера, вертикальная пластинка.

О.Г. ГОМАН, В.О. КАТАН
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛІВ В СЕНСІ СКІНЧЕННОЇ ЧАСТИНИ ЗА АДАМАРОМ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ УДАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛА І РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

В роботі задача про визначення положення зони відриву течії при ударній взаємодії твердого тіла та рідини зведена до розв΄язання трансцендентного рівняння відносно координати початкової точки відриву з використанням формул Адамара-Манглера для отриманих розбіжних інтегралів. Для випадку удару вертикальної пластини проведено порівняння з аналітичним розв΄язком поставленої задачі.

Ключові слова: відрив течії, удар, трансцендентне рівняння, формули Адамара Манглера, вертикальна пластина.

O.G. GOMAN, V.A. KATAN
Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

THE USE OF THE HADAMARD INTEGRALS FOR THE MATHEMATICAL MODELLING OF THE IMPACT INTERACTION OF A BODY AND A LIQUID WITH A FREE SURFACE

In this paper, the problem of determining the position of the flow separation zone at the impact interaction of a solid and a liquid is reduced to the solution of the transcendental equation for the coordinates of the starting point of separation using Hadamard Manglera formulas for obtained divergent integrals. The case of impact of vertical plate compared with the analytical solution of the problem.

Keywords: separation of flow, impact, transcendental equation, Hadamard Manglera formulas, vertical plate.

Постановка проблемы

Рулевые устройства надводных и подводных гидродинамических аппаратов специального назначения работают в условиях пересечения свободной границы жидкости или границы раздела слоев жидкости различной плотности. Конструктивно эти устройства представляют собой тонкие тела небольшого утолщения, которые в процессе эксплуатации испытывают различного рода ударные нагрузки, обусловленные как внешними причинами, например, ударами волн, так и необходимостью их внезапного резкого движения для изменения курса гидродинамического аппарата. При этом на поверхности непосредственных рабочих рулевых элементов может возникать явление отрыва течения жидкости в связи с ее инертностью. Это приводит к необходимости математического моделирования ударного взаимодействия жидкости и тонких тел, находящихся на свободной поверхности жидкости, в условиях возникновения на части их поверхности явления отрыва течения.

Анализ последних исследований и публикаций

Значительный вклад в постановку и решения ударных задач гидродинамики осуществили классики Н.Е. Жуковский, Л.И. Седов, М.А. Лаврентьев и М.В. Келдыш. Дальнейшее развитие широкого класса ударных задач гидромеханики связаны с такими известными именами авторов как Э.Л. Блох, Я.Р. Берман, Г.В. Логвинович, И.С. Риман, Р.Л. Крепс, В.С. Сабанеев, И.И. Ворович та Л.С. Ворович, Н.А. Кудрявцева, В.И. Юдович, А.М. Полунин, Н.М. Бородачов, Б.М. Ботвинков, В.С. Корчагин, Н.А. Веклич, В.А. Ерошин, Ю.Л. Якимов, О.Г. Гоман, М.В. Поляков, В.В. Попов, О.П. Шоригин, Н.В. Норкин, Д.Б. Рохмин, а также Хикс В.М., Триллинг Л., Мей А., Уитмен А.М., Вендер В.М., Кошер Б.Р., Милох Т., Могыши М., Кувабара Г. и другие ученые. Всесторонний детальный анализ и библиография по вопросам гидродинамического удара содержит монография Н.В. Норкина [1].

Из анализа известных исследований и публикаций по тематике можно сделать вывод, что с точки зрения практики полезно иметь решение задачи в аналитическом виде, чтобы это позволило в дальнейшем использовать полученные гидродинамические характеристики для математического моделирования всего процесса движения гидродинамического аппарата специального назначения. Модельное тело в виде пластинки позволяет, с одной стороны, получить решение задачи в аналитическом виде, а с другой - выявить наиболее существенные моменты гидродинамического процесса: количество, размеры и расположение отрывных зон. Учитывая вышеизложенное, проблема получения аналитического решения задачи об ударе наклонной пластинки, находящейся на свободной поверхности жидкости под произвольным углом к ней в плоской постановке не потеряла своей актуальности.

Формулирование цели исследования

Цель работы заключается в построении математической модели ударного взаимодействия тела и жидкости со свободной поверхностью в условиях возникновения инерционного отрыва течения жидкости.

Изложение основного материала исследования

Пусть вертикальная пластина ширины b плавает на свободной поверхности несжимаемой идеальной жидкости, находящейся в покое и занимающей нижнее полупространство. Ось Oy системы декартовых координат направим по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутрь последней вдоль пластинки, а ось Ox направим вдоль свободной поверхности перпендикулярно плоскости пластинки (рис.1). Предполагается, что ударные импульсы действуют так, что после удара пластинка получает только компоненту скорости вдоль оси Ox, а также угловую скорость вокруг оси, перпендикулярной плоскости Oxy, и на задней стороне пластинки BD образуется зона отрыва BC, которая распространяется от точки B на свободной поверхности сзади пластинки до некоторой точки C (положение которой заранее неизвестно).

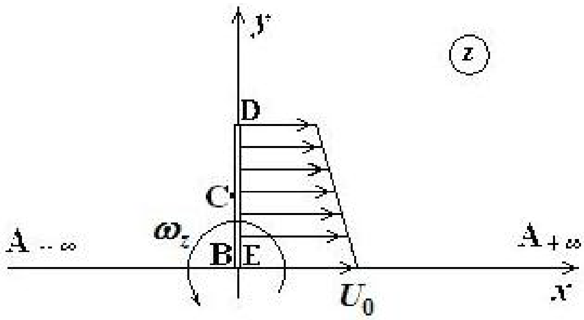

Рис. 1. Схема к постановке задачи удара пластинки с отрывом

Возникшее в результате удара течение жидкости будет потенциальным и описывается комплексным потенциалом

$$w = \varphi(z) + i\psi(z),$$

где $\varphi(z)$ – потенциал течения; $\psi(z)$ – функция тока.

В результате удара тело приобретает скорость

$$\overline{V} = (V_0 + \omega_z x)\bar{j},$$

где V_0 – поступательная скорость; ω_z – угловая скорость тела.

В предположении о наличии отрыва условие безотрывности течения распространяется только на участок контура EDC и имеет вид

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{EDC} = \overline{V}\cdot\overline{n} \text{ или } v_x = v_0 - \omega_z y$$

Таким образом, на участках ED и DC

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x = U_0 - \omega_z y,$$

откуда $\psi = U_0 y - \omega_z \dfrac{y^2}{2} + C_0$.

Причем несущественную константу C_0 положим равную нулю. На свободных границах – участках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ оси *Ox*, а также на участке отрыва *CB* – имеем условие равенства нулю импульсного давления, то есть $\varphi = 0$.

Как показано в [6], поставленная задача сводится к краевой задаче теории аналитических функций, решение которой может быть представлено в виде квадратур

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi i} Z(t) \int_{-q}^{b} Z^{-1}(\xi) \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi,$$

где $Z(t) = \sqrt{(t+q)(t-b)}$ и $Z(\xi) = \sqrt{(\xi+q)(b-\xi)}$.

Следовательно, решение задачи сводится к вычислению интеграла

$$I(t) = \int_{-q}^{b} Z^{-1}(\xi) \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi = -i \int_{-q}^{b} \frac{1}{\sqrt{(q+\xi)(b-\xi)}} \frac{U_0\sqrt{b^2 - \xi^2} - \omega_z \frac{b^2 - \xi^2}{2}}{\xi - t} d\xi.$$

Представим этот интеграл в виде

$$I(t) = -iJ(t),$$

где $J(t) = U_0 J_1(t) - \frac{\omega_z}{2} J_2(t)$ и введены обозначения

$$J_1(t) = \int_{-q}^{b} \sqrt{\frac{b+\xi}{q+\xi}} \frac{d\xi}{\xi - t}, \qquad J_2(t) = \int_{-q}^{b} \frac{b^2 - \xi^2}{\sqrt{(q+\xi)(b-\xi)}} \frac{d\xi}{\xi - t}.$$

Тогда

$$J(t) = U_0 J_1(t) - \frac{\omega_z}{2} J_2(t).$$

Как известно, эта задача допускает аналитическое решение [6].

В предположении о наличии только одной зоны отрыва, найдем ее положение по принципу Огазо [7] с использованием сингулярных интегралов в смысле Адамара [4-5]. Для определения положения отрыва – координаты *q* – согласно принципу Огазо необходимо определить потенциал течения $\varphi(t)$ на участке безотрывного обтекания $t = \xi + i0, \xi \in (-q,1)$. Интегралы $J_1(t)$ и $J_2(t)$ являются интегралами типа Коши по отрезку действительной оси $\xi \in (-q,1)$. По формулам Племеля-Сохоцкого при переходе из верхней полуплоскости в точку ξ_0 на отрезке $(-q,1)$ получим

$$J_1^+(\xi_0) = \pi i \frac{(\xi_0 + 1)^{1/2}}{(\xi_0 + q)^{\frac{1}{2}}} + J_1(\xi_0), \tag{1}$$

$$J_2^+(\xi_0) = \pi i \frac{(\xi_0 + 1)}{(\xi_0 + q)^{\frac{1}{2}}} + J_2(\xi_0), \tag{2}$$

где $J_1(\xi_0)$ и $J_2(\xi_0)$ – особые интегралы в смысле главного значения Коши. Выделяя действительные и мнимые части в решении, приходим к следующим выражениям для функции тока и потенциала течения на смоченной части пластинки:

$$\psi(\xi_0) = (\xi_0 + 1)^{1/2} (1 - \xi_0)^{1/2} \left[bU_0 - \frac{\omega_z b^2}{2} (\xi_0 + 1)^{1/2} (1 - \xi_0)^{1/2} \right], \tag{3}$$

$$\varphi(\xi_0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{(\xi_0 + q)(1 - \xi_0)} \left[bU_0 J_1(\xi_0) - \frac{\omega_z b^2}{2} J_2(\xi_0) \right]. \tag{4}$$

Формула (3), как и следовало ожидать, представляет граничное условие на участке $(-q < \xi_0 < 1)$.

Согласно принципу Огазо положение точки отрыва *q* находим из условия $\lim\limits_{\xi_0 \to -q+0} \frac{\partial \varphi(\xi_0)}{\partial q} = 0$.

Из (4) имеем

$$\frac{\partial\varphi(\xi_0)}{\partial q}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1-\xi_0}{\xi_0+q}}\left[bU_0J_1(\xi_0)-\frac{\omega_z b^2}{2}J_2(\xi_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sqrt{(\xi_0+q)(1-\xi_0)}\left[bU_0\frac{\partial J_1(\xi_0)}{\partial q}-\frac{\omega_z b^2}{2}\frac{\partial J_2(\xi_0)}{\partial q}\right].$$

Переходя к пределу $\xi_0\to -q+0$, приходим к следующему уравнению для определения параметра q

$$bU_0J_1(-q)-\frac{\omega_z b^2}{2}J_2(-q)=0\,, \tag{5}$$

(в предположении, что интегралы $\frac{\partial J_k}{\partial q}(\xi_0),\quad k=1{,}2$, при $\xi_0\to -q+0$ ограничены или возрастают не быстрее, чем $\frac{1}{(\xi_0+q)^{\frac{1}{2}}}$, что будет показано в дальнейшем).

При этом, при непосредственной подстановке $\xi_0=-q$ в выражения для интегралов $J_k(\xi_0),\quad k=1{,}2$ они превращаются в сингулярные интегралы вида

$$J_1(-q)=\int_{-q}^{1}\frac{(\xi+1)^{1/2}}{(\xi+q)^{\frac{3}{2}}}d\xi\,,\qquad J_2(-q)=\int_{-q}^{1}\frac{(\xi+1)}{(\xi+q)^{\frac{3}{2}}}d\xi\,, \tag{6}$$

которые являются расходящимися, и их будем понимать в смысле конечной части по Адамару.

Уравнение для определения q (5) может быть записано в виде зависимости кинематического параметра Λ_n от неизвестного q

$$\Lambda_n=\frac{\omega_z b}{U_n}=\frac{2J_1(-q)}{J_2(-q)}. \tag{7}$$

При помощи преобразований, описанных в [7], для интегралов $J_k(-q),\quad k=1{,}2$, будем иметь формулы

$$J_k(-q)=\frac{2}{(1+q)^{1-k/2}}JJ_k(-q),\quad k=1{,}2\,, \tag{8}$$

где

$$JJ_1(-q)=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\left(1+t^2-q(1-t^2)\right)^{1/2}-(1-q)^{1/2}}{t^2}dt+(1-q)^{1/2}\left[\frac{1}{2}(1+q)\varepsilon-(1-q)\right],$$

$$JJ_2(-q)=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\left(1+t^2-q(1-t^2)\right)-(1-q)}{t^2}dt+\left[\frac{1}{2}(1+3q)\varepsilon-(1-q)\right],$$

где ε - малая величина.

Следовательно, зависимость кинематического параметра от неизвестного параметра q имеет вид

$$K=\frac{U_0}{\omega_z b}=\frac{(1+q)^{1/2}}{2}\frac{JJ_2(-q)}{JJ_1(-q)}. \tag{9}$$

По приведенным формулам было построено зависимость кинематического параметра $K=\frac{U_0}{\omega_z b}$ от положения начальной точки отрыва q. Проведено сравнение для случая горизонтального удара с вращением вертикальной пластины. Аналитические решения и решения, полученные через интегралы в смысле Адамара, сравнивались по зависимости кинематического параметра $\mathrm{K}=\frac{U_0}{\omega_z b}$ от положения начальной точки отрыва q/b. Результаты расчетов для вертикальной пластинки представлены в виде графика зависимости кинематического параметра $\Lambda=\frac{\omega_z b}{U_0}=\frac{1}{K}$ от безразмерного геометрического параметра q (рис. 2). Совпадение результатов хорошее.

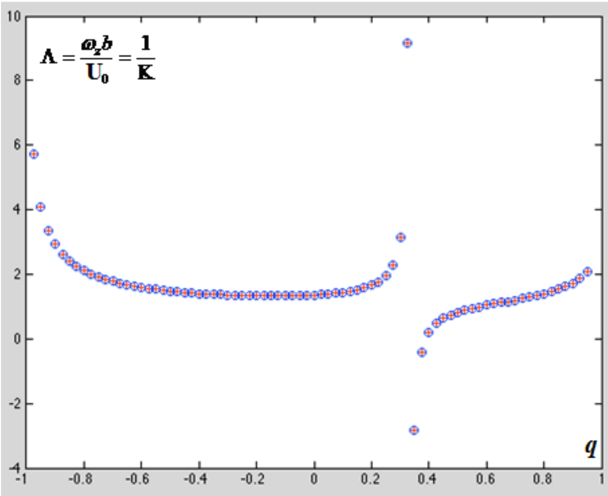

Рис. 2. Зависимость кинематического параметра от положения точки отрыва для горизонтального удара с вращением вертикальной пластинки: «+» – расчет по формулам Адамара-Манглера (ε=0.001); «о» – аналитическое решение

Выводы

Хорошее совпадение данных аналитического решения и решения, полученного через интегралы в смысле Адамара, позволяет сделать вывод о применимости данного подхода к определению характеристик отрывных зон при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости.

Список использованной литературы

1. Норкин М.В. Смешанные задачи гидродинамического удара / М.В. Норкин. – Ростов-на-Дону, 2007. – 136 с.
2. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л.И. Седов – М.: Наука, 1980. – 448с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили – М.: Наука, 1966. – 707 с.
4. Общая теория аэродинамики больших скоростей под редакцией У.Р. Сирса. – М.: Воениздат, 1962. – 300 с.
5. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж.Адамар – М.: Наука, 1978. – 352 с.
6. Гоман О.Г. Математическое моделирование взаимодействия несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности при ударе с вращением в условиях отрыва / О.Г Гоман, В.А. Катан // Вісник ДНУ. Серія: Механіка. – 2012. – Т. 20. – № 5. – Вип. 16, Т.1. – С. 87 – 93.
7. Гоман О.Г. Ударное взаимодействие несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности, в условиях образования одной зоны отрыва и наличии вращения / О.Г. Гоман, В.А. Катан // Вісник ДНУ. Серія: Механіка. – 2013. – Т. 21. – № 5. – Вип. 17, Т.1. – С. 191 – 205.