УДК 621.793

А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ
Государственный экономико-технологический университет транспорта
Н.Н. КРЮКОВ
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
И.В. СМИРНОВ
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»
Н.Н. ЗАЩЕПКИНА
Киевский национальный университет технологий и дизайна

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЧАСТИЦ ПРИ ПЛАЗМЕННОМ НАПЫЛЕНИИ (УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ)

Данная статья посвящена проблеме определения температуры частиц порошка в процессе плазменного напыления. С этой целью рассмотрена третья краевая задача для уравнения теплопроводности в однородном шаре. Для аппроксимации температуры плазменного потока использованы эрмитовы кубические сплайны. Приведено аналитическое решение данной задачи. Рассмотрен комплексный подход к определению температуры частицы с учётом изменения её агрегатного состояния.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, температура частиц, плазменная струя, дистанция напыления, краевая задача, метод Фурье, сплайн.

А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ
Державний економіко-технологічний університет транспорту
М.М. КРЮКОВ
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
І.В. СМИРНОВ
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»
Н.М. ЗАЩЕПКІНА
Київський національний університет технологій та дизайну

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ ЧАСТИНОК ПРИ ПЛАЗМОВОМУ НАПИЛЮВАННІ (УТОЧНЕНА МОДЕЛЬ)

Дана стаття присвячена проблемі визначення температури частинок порошку в процесі плазмового напилювання. З цією метою розглянуто третю крайову задачу для рівняння теплопровідності в однорідній кулі. Для апроксимації температури плазмового потоку застосовані ермітові кубічні сплайни. Наведено аналітичний розв'язок даної задачі. Розглянуто комплексний підхід до визначення температури частинки з урахуванням зміни її агрегатного стану.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, температура частинок, плазмовий струмінь, дистанція напилювання, крайова задача, метод Фур'є, сплайн.

A.Yu. ANDREYTSEV
State Economic and Technological University of Transport
N.N. KRYUKOV
National Academy of Sciences of Ukraine S.P. Timoshenko Institute of Mechanics
I.V. SMYRNOV
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"
N.N. ZASHCHEPKINA
University Kyiv National Technology and Design

NUMERICALLY-ANALYTICAL DETERMINATION OF THE PARTICLE TEMPERATURE FOR PLASMA SPRAYING (REFINED MODEL)

The paper deals with the problem of determining the temperature of the powder particles in plasma spraying. To this end, we consider the third boundary problem for the heat equation in a homogeneous sphere. To approximate the temperature of the plasma jet used Hermitian cubic splines. The analytical solution of this problem is given. An integrated approach to the determination of the temperature of the particles, taking into account changes its aggregate state are considered.

Keywords: heat equation, temperature of the particles, the plasma jet, spraying distance, boundary value problem, method of Fourier, spline.

Постановка проблемы

Повышение качественных характеристик плазменно-порошковых покрытий во многом определяется правильным установлением температурного режима частиц напыляемого порошка. Как правило, для обеспечения надежной прочности сцепления данных покрытий необходимо, чтобы напыляемые частицы достигали поверхности основы в расплавленном состоянии. При этом важно минимизировать потери напыляемых материалов, возникающие из-за перегрева и, как следствие, интенсивного испарения с поверхности частиц. Это обуславливает необходимость построения и исследования эффективных математических моделей определения температуры частицы в процессе напыления.

Анализ публикаций

Исследованию температурного режима частиц при газотермическом напылении посвящен ряд работ. В [1,2] определение температуры в плазменной струе проведено на основе уравнения теплового баланса на поверхности частицы. В [3,4] применены численные методы и разработаны пакеты компьютерных программ для расчета температуры частицы в плазменном потоке. Ограниченность используемых в данных пакетах баз данных напыляемых материалов, технологических режимов, конструктивных параметров плазмотронов не позволяет проводить исследование процесса напыления в нестандартных условиях за пределами предлагаемых диапазонов.

При решении задач связанных с газотермическим напылением необходимо знать строение плазменной струи, а также законы изменения температуры и скорости по радиусу и по оси струи. Результаты данных исследований, в том числе с помощью математического моделирования представлены в работах [5]. Аналитическому определению температуры сферической частицы посвящена работа [6], в которой рассмотрена третья краевая задача для уравнения теплопроводности. Однако, в данной работе авторы ограничились случаем, постоянной температуры плазменного потока, а также аппроксимацией температуры только первым членом ряда. В [7] проведено исследование изменения температуры в предположении, что температура плазменной струи аппроксимируется квадратичным полиномом, а также установлено необходимое количество членов ряда для обеспечения необходимой точности. В [8] предложен комплексный подход к определению температуры напыляемых частиц, учитывающий изменение их агрегатного состояния в процессе полета. В [9] для увеличения точности расчётов предложено разбиение дистанции напыления на участки, на каждом из которых температура плазменной струи достаточно точно аппроксимируется квадратичным полиномом. Там же приведены результаты определения изменения температуры частиц никеля и оксида алюминия вдоль дистанции напыления с учётом изменения их агрегатного состояния.

Цель работы заключается в уточнении аналитического определения температуры напыляемой частицы при помощи методов математической физики с учётом использования эрмитовых кубических сплайнов для интерполирования температуры плазменного потока.

Основная часть

При построении математической модели определения температуры частицы в плазменном потоке будем исходить из следующих предположений. Во-первых, частица является однородным телом (в данной статье не рассматриваются композиционные порошки). Далее, будем считать, что частицы порошка имеют идеальную сферическую форму. Как установлено в [6], время сфероидизации частицы не превосходит 10^{-8}с, что существенно меньше времени достижения температуры плавления порядка 10^{-4}с. Поскольку частица в потоке, кроме поступательного, подвержена ещё и вращательному движению, и температура плазмы в ее окрестности постоянна, то поток тепла через поверхность одинаков в каждой её точке, и можно считать, что распределение температур в частице зависит только от расстояния до её центра и времени пребывания в потоке, т.е. $T = T(r,t),\ 0 \le r \le R,\ t \ge 0$.

В этих предположениях температура частицы может быть найдена как решение уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial t}\right) = 0, \quad 0 \le r \le R \tag{1}$$

где $a^2 = \dfrac{\lambda}{c\rho}$; λ – коэффициент теплопроводности частицы; c – теплоемкость частицы; ρ – плотность частицы; R – радиус частицы,

В начальный момент времени температура частицы постоянна:

$$T(r,0) = T_0 = const \tag{2}$$

а на её поверхности происходит конвективный теплообмен с плазмой, температура которой $T_g(t)$ зависит от времени пребывания частицы в потоке:

$$\lambda \frac{\partial T(R,t)}{\partial r} = \alpha\left(T_g(t) - T(R,t)\right) \tag{3}$$

где α – коэффициент теплообмена между частицей порошка и газом.

К данному краевому условию добавим условие ограниченности температуры в центре частицы

$$T(0,t) < +\infty \tag{4}$$

В [6] была рассмотрена аналогичная задача. Однако температура плазмы считалась постоянной, что оказывает влияние на конечный результат и приводит к расхождениям с экспериментальными данными, особенно для тугоплавких частиц оксидов.

Решение задачи (1)–(4) будем искать в виде

$$T = T_g(t) - \frac{U}{r} \tag{5}$$

где $U \approx U(r,t)$ новая неизвестная функция, являющаяся решением следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = rT_g'(t) \\
\frac{\partial U(R,t)}{\partial r} = \left(\frac{1}{R} - \frac{\alpha}{\lambda}\right)U(R,t) \\
U(0,t) = 0 \\
U(r,0) = r(T_g(0) - T_0)
\end{gathered} \tag{6}$$

Применяя к решению задачи (6) метод Фурье, с учетом (5), получаем решение задачи (1) – (4)

$$T = T_g(t) - 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin k_i - k_i \cos k_i}{k_i - \sin k_i \cos k_i} \frac{\sin \frac{k_i r}{R}}{\frac{k_i r}{R}} \left(\left(T_g(0) - T_0\right) e^{-\frac{a^2 k_i^2 t}{R^2}} + \int_0^t T_g'(\tau) e^{-\frac{a^2 k_i^2 (t-\tau)}{R^2}} d\tau \right)$$

где k_i – корни трансцендентного уравнения

$$tgk_i = \frac{k_i}{1 - Bi}$$

где $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ – число Био, определяющее характер процесса теплопередачи на границе раздела твердое тело – газ.

Таким образом, для окончательного решения задачи (1)–(4) необходимо иметь аналитическое выражение для определения температуры плазмы. Однако, решение этой задачи, сформулированной в[4], получено не было. На основе численного определения температуры плазмы (см. [4,5]) в ряде работ [7–9] предложена аппроксимация $T_g(t)$ полиномом второй степени. Полученные в них результаты достаточно точно описывают изменение температуры частиц металлов диаметром от 30 мкм на участке разогрева до температуры плавления. Для частиц меньшего диаметра, а также на участке полёта частицы в расплавленном состоянии погрешность аппроксимации возрастает. В связи с чем, в **[9]** было предложено разбить дистанцию напыления на отдельные участки, на каждом из которых квадратичная аппроксимация была допустимой. Однако, в данном случае, при переходе от одного участка к другому функция, аппроксимирующая температуру плазмы терпит разрыв, что может существенно повлиять на адекватность модели, особенно для частиц металлов диаметром меньше 30 мкм, оксидов, а также при анализе температур расплавленных частиц.

Данный недостаток можно устранить, используя для аппроксимации $T_g(t)$ эрмитовы кубические сплайны, которые по построению являются непрерывными на заданном интервале. Для этого зададим на дистанции напыления неравномерное разбиение $0 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots z_N = L$ и определим $T_g(z_j),\ j = \overline{0,N}$.

Далее нам необходимо определить время, за которое преодолеет расстояние z_j частица:

$$t_j = \int_0^{z_j} \frac{dz}{W(z)}$$

где $W(z)$ – скорость частицы. Определению скорости частиц вдоль дистанции напыления посвящен ряд работ (см. например [10]). Таким образом, мы проводим согласование времени пребывания частицы в плазменной струе с температурой плазмы в её окрестности: $T_g(t_j) = T_g(z_j)$ на отрезке $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = t(L)$. $t(L)$ – общее время полета частицы от места ввода в плазменную струю до основы.

Проведем интерполяцию функции $T_g(t)$ эрмитовыми кубическими сплайнами:

$$S_{3j} = \frac{\left(t_{j+1} - t\right)^2 \left(2\left(t - t_j\right) + h_j\right)}{h_j^3} f_j + \frac{\left(t - t_j\right)^2 \left(2\left(t_{j+1} - t\right) + h_j\right)}{h_j^3} f_{j+1} + \\ + \frac{\left(t_{j+1} - t\right)^2 \left(t - t_j\right)}{h_j^2} f'_j + \frac{\left(t - t_j\right)^2 \left(t - t_{j+1}\right)}{h_j^2} f'_{j+1} \tag{7}$$

Здесь f_j, f_{j+1} – значения функции в узлах интерполяции, а f'_j, f'_{j+1}– значения её производной, $h_j = t_{j+1} - t_j$. В нашем случае – $f_j = T_g(t_j)$.

Отметим, что сплайн является непрерывно дифференцируемой на $[0; t(L)]$ функцией. Поскольку значения нам неизвестны, то для их аппроксимации используем разделенные разности второго порядка точности.

$$\tilde{f}'_j = \lambda_j \frac{f_j - f_{j-1}}{h_{j-1}} + \mu_j \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j}, \quad j = \overline{1, N-1}$$

$$\tilde{f}'_0 = \left(1 + \mu_1\right) \frac{f_1 - f_0}{h_0} + \mu_1 \frac{f_2 - f_1}{h_1}, \tag{8}$$

$$\tilde{f}'_N = -\lambda_{N-1} \frac{f_{N-1} - f_{N-2}}{h_{N-2}} + \left(1 + \lambda_{N-1}\right) \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}},$$

$$\mu_j = h_{j-1}\left(h_j + h_{j-1}\right)^{-1}, \quad \lambda_j = 1 - \mu_j$$

Аппроксимация $\tilde{f}'_N$ в дальнейшем не используется, поскольку при достижении поверхностью частицы температуры плавления вычислительный процесс прерывается.

Перейдём к построению решения задачи (1)–(4). На каждом из промежутков $[t_j; t_{j+1}]$ заменим функцию $T_g(t)$ полиномом $P_{3j}(t) = A_j t^3 + B_j t^2 + C_j t + D_j$. Тогда

$$\int_0^t T'_g(\tau) e^{-\frac{a^2 k_i^2 (t-\tau)}{R^2}} d\tau \approx \int_0^{t_1} P'_{30}(\tau) e^{-\frac{a^2 k_i^2 (t-\tau)}{R^2}} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} P'_{31}(\tau) e^{-\frac{a^2 k_i^2 (t-\tau)}{R^2}} d\tau + \cdots + \int_{t_k}^{t} P'_{3k}(\tau) e^{-\frac{a^2 k_i^2 (t-\tau)}{R^2}} d\tau .$$

Обозначим через $I_{j,k_i} = \int_{t_j}^{t} P'_{3j}(\tau) e^{-\frac{a^2 k_i^2 (t-\tau)}{R^2}} d\tau$

Тогда

$$I_{j,k_i} = \int_{t_j}^{t} P'_{3j}(\tau) e^{-\frac{a^2 k_i^2 (t-\tau)}{R^2}} d\tau = \int_{t_j}^{t} \left(3A_j \tau^2 + 2B_j \tau + C_j\right) e^{-\frac{a^2 k_i^2 (t-\tau)}{R^2}} d\tau =$$

$$= \left(3A_j \left(\left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right) t^2 - 2\left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right)^2 t + 2\left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right)^3\right) + 2B_j \left(\left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right) t - \left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right)^2\right) + C_j \left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right)^2\right) -$$

$$- e^{-\frac{a^2 k_i^2 \left(t - t_j\right)}{R^2}} \left(3A_j \left(\left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right) t_j^2 - 2\left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right)^2 t_j + 2\left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right)^3\right) + 2B_j \left(\left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right) t_j - \left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right)^2\right) + C_j \left(\frac{R^2}{a^2 k_i^2}\right)^2\right)$$

Следовательно

$$\int_0^t T_g'(\tau)\, e^{-\frac{a^2 k_i^2 (t-\tau)}{R^2}}\, d\tau \approx \sum_{j\ge 0} \left(\eta\left(t-t_j\right)-\eta\left(t-t_{j+1}\right)\right) I_{j,k_i}\ .$$

Здесь $\eta(t)$ – функция Хевисайда;

$$\eta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\ge 0 \end{cases}\ .$$

Окончательно получаем решение задачи (1)–(4):

$$T = T_g(t) - 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin k_i - k_i \cos k_i}{k_i - \sin k_i \cos k_i} \frac{\sin \frac{k_i r}{R}}{\frac{k_i r}{R}} \left(\left(T_g(0) - T_0\right) e^{-\frac{a^2 k_i^2 t}{R^2}} + \sum_{j\ge 0} \left(\eta\left(t-t_j\right)-\eta\left(t-t_{j+1}\right)\right) I_{j,k_i} \right) \tag{9}$$

Из (7), (8) определяем

$$A_j = \frac{2 f_j - 2 f_{j+1} + h_j \tilde{f}_j' + h_j \tilde{f}_{j+1}'}{h_j^3},$$

$$B_j = \frac{\left(-2t_j - 4t_{j+1} + h_j\right) f_j + \left(2t_{j+1} + 4t_j + h_j\right) f_{j+1} + \left(-t_j - 2t_{j+1}\right) h_j \tilde{f}_j' + \left(-2t_j - t_{j+1}\right) h_j \tilde{f}_{j+1}'}{h_j^3},$$

$$C_j = \frac{\left(2t_{j+1}^2 + 4t_j t_{j+1} - 2h_j t_{j+1}\right) f_j + \left(-2t_j^2 + 4t_j t_{j+1} - 2h_j t_j\right) f_{j+1} + \left(t_{j+1}^2 + 2t_j t_{j+1}\right) h_j \tilde{f}_j' + \left(t_j^2 + 2t_j t_{j+1}\right) h_j \tilde{f}_{j+1}'}{h_j^3}.$$

Отметим, что количество точек разбиения дистанции напыление до достижения частицей температуры плавления, в зависимости от её диаметра, колеблется от пяти до восьми. Поскольку на начальном этапе нет резкого уменьшения температуры плазмы, то погрешность сплайн-интерполяции не превышает 50 К.

При достижении поверхностью частицы температуры плавления переходим к следующему этапу: определению времени плавления частицы.

Для этого применим упрощенный подход и, вместо решения задачи Стефана, рассмотрим уравнение теплового баланса при условии, что поток тепла через поверхность является постоянным (см. [9]). В этом случае

$$Q = 4\pi R^2 \sigma\rho \frac{dR_k}{d\tau},$$

а время плавления частицы

$$\tau_{пл} = \frac{R\rho\sigma}{3\alpha(T_g - T_{пл})},$$

где σ – теплота плавления; $T_{пл}$ – температура плавления частицы. R_k – радиус твёрдого ядра.

После чего переходим к третьему этапу: определение температуры расплавленной частицы. В случае металлов мы можем воспользоваться формулой (9), поскольку в силу высокой теплопроводности для них можно считать, что $T(r, t_{пл} + \tau_{пл}) = T_{пл} = const$, $t_{пл}$ – время достижения поверхностью частицы температуры плавления. Что же касается оксидов, то для них температура в центре и на поверхности частицы может существенно отличаться, что приводит к необходимости решения более сложной краевой задачи.

Четвёртый этап – затвердевание частицы – аналогичен второму и рассмотрен в [9]. В случае, если частица достигает поверхности основы в твёрдом состоянии, не будет обеспечена прочность сцепления, поэтому рассматривать этап остывания твердой частицы нет смысла.

Выводы

Таким образом, сплайн-интерполяция температуры плазменного потока позволяет более точно определить температуру частиц металлов вдоль дистанции напыления и устранить недостатки, связанные с возможными разрывами, возникающим при квадратичной аппроксимации. В случае же использования для напыления порошков оксидов она эффективна лишь на участке разогрева частиц до температуры плавления.

Отметим так же, что формула (9) может быть использована в случае применения линейных сплайнов. Для этого достаточно положить в (9) $A_j = 0, B_j = 0$. При этом $C_j = \dfrac{f_{j+1} - f_j}{h_j}$.

Однако в этом случае погрешность интерполяции будет достаточно большой, что приводит к необходимости существенного уменьшения шага интерполяции. Это затруднительно в связи с низкой точностью определения температуры плазмы через промежутки времени меньше 10^{-5}с.

Дальнейшие исследования будут посвящены использованию сплайн-интерполяции температуры плазмы для определения температуры частиц с оболочкой. Для данной задачи возникает необходимость рассмотрения дополнительно этапов плавления и затвердевания оболочки, а также разогрева ядра до температуры его плавления.

Список использованной литературы

1. Кудинов В.В. Нанесение покрытий плазмой / В.В. Кудинов, П.Ю. Пекшев, В.Е. Белащенко и др.– М.: Наука, 1990. – 406 с.
2. Remesh K. Computational Study and Experimental Comparison of the In-Flight Particle Behavior for an External Injection Plasma Spray Process // K. Remesh, S.C.M. Yu, H.W. Ng, C.C. Berndt // Journal of Thermal Spray Technology. – 2003. –Vol. 12(4). – P. 508-522.
3. Компьютерное моделирование процессов плазменного напыления покрытий/ С.П. Кундас, А.П. Достанко, А.Ф. Ильющенко и др.–Мн.: Бестпринт, 1998.–212с.
4. Борисов Ю.С. Компьютерное моделирование процесса плазменного напыления/ Ю.С. Борисов, И.В. Кривцун, А.Ф. Мужиченко и др. // Автоматическая сварка. – 2000. – № 12. – С. 42-51.
5. Cheng K. Comporson of laminar and turbulent plasma jet characteristics – a modeling study/ Kai Cheng, Xi Chen, Wenxia Pan // Plasma Chem Plasma Process. – 2006. – № 26. – P. 211-235.
6. Лохов Ю.Н. Нагрев и испарение частиц в струе низкотемпературной плазмы// Ю.Н. Лохов, В.А. Петруничев, А.А. Углов, И.И. Швыркова // Физ. и хим. обраб. материалов. — 1974. – №6. – С. 52-56.
7. Смирнов И.В. Моделирование процесса нагрева частиц порошка в плазменной струе при напылении композиционных покрытий/ И.В. Смирнов, А.Ю. Андрейцев, А.В. Чорний, В.И. Копылов // Вестник ХНТУ. – Херсон. – 2008. – №2(31). – С.449-455.
8. Андрейцев А. Ю. Аналітичне визначення температури частинок порошку при плазмовому напиленні композиційних покриттів / А.Ю Андрейцев, М.М. Крюков, Т.В. Крижановська, Т.М. Семененко / Вестник ХНТУ. – Херсон, 2011. – №3(42) – С.33-37.
9. Андрейцев А.Ю. Нагрів та плавлення частинок порошку в плазмовому струмені/ А.Ю. Андрейцев, І.В. Смирнов, А.В. Чорний // Математичне та комп'ютерне моделювання Серія: Технічні науки: зб. наук. праць Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова. – 2011. – Вип.5. – С. 3-10.
10. Андрейцев А.Ю. Аналіз динаміки руху дрібнодисперсних частинок при плазмовому напилюванні/ А.Ю. Андрейцев, И.В. Смирнов, А.В. Чорний // Збірник наукових праць ДЕТУТ. – 2009. – №11. – С 100-103.