УДК 539.3:519.6

Ю.В. ШРАМКО, Т.С. СУШКО, Ю.В. СІРЕНКО, В.А. СИРЄЄВА
Сумський державний університет

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БАГАТОФАЗНИХ ФЕРОМАГНІТНИХ КОМПОЗИТІВ РЕГУЛЯРНОЇ СТРУКТУРИ

Методом регулярних структур побудовано модель багатофазного волокнистого феромагнітного композиту з двоперіодичним укладанням волокон. Знайдено розподіл польових величин в околі волокон. Отримано макромодулі композиту як функціонали, побудовані на розв'язках системи регулярних інтегральних рівнянь, що містять повну інформацію про мікроструктуру комірки. Наведені результати розрахунків.

Ключові слова: композит, метод регулярних структур, метод інтегральних рівнянь, макромодуль.

Ю.В. ШРАМКО, Т.С. СУШКО, Ю.В. СИРЕНКО, В.А. СЫРЕЕВА
Сумский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОФАЗНЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ КОМПОЗИТОВ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

Методом регулярных структур построена модель многофазного волокнистого ферромагнитного композита с двоякопериодической укладкой волокон. Найдено распределение полевых величин в окрестности волокон. Получены макромодули композита в виде функционалов, построенных на решениях системы регулярных интегральных уравнений, которые содержат полную информацию о микроструктуре ячейки. Приведены результаты расчетов.

Ключевые слова: композит, метод регулярных структур, метод интегральных уравнений, макромодуль.

YU.V. SHRAMKO, T.S. SUSHKO, YU.V. SIRENKO, V.A. Sireyeva
Sumy State University

MATHEMATICAL MODEL OF MULTIPHASE FERROMAGNETIC COMPOSITES OF REGULAR STRICTURE

By the regular structures method a model of multiphase fibrous composite with double periodical stack of fibers has been built. The distribution of the field magnitudes in the vicinity of fibers has been found. The macromodules of composites have been obtained via functionals containing full information about the cell microstructure. The results of computation have been given.

Keywords: composite, regular structure method, integral equation method, macromodulus.

Постановка проблеми

Розв'язання найважливіших задач, які стоять перед наукою та промисловістю з метою підвищення надійності, зниження матеріаломісткості конструкцій та споруд тісно пов'язано з розробленням та використанням композитних матеріалів (КМ). Пошук нових сполучень компонентів у композитах, спрямований на отримання необхідних якостей, призводить до розширення спектру структур матеріалів та збільшення фазності. У зв'язку з цим для розроблення ефективного методу проектування складу та структури КМ необхідні аналітичні співвідношення, які описують залежність макровластивостей КМ від геометричних параметрів та фізико-механічних властивостей компонентів. Зокрема під час розгляду волокнистих композитів із феромагнітними компонентами структури необхідно отримати макромодулі такої структури.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В механіці композиційних матеріалів сформовано два головних напрямки – механіка стохастичних [1,2,3] та механіка регулярних структур [4,5,6].

Сучасне виробництво волокнистих КМ дозволяє отримувати двоперіодичні структури або близькі до них. Тому при побудові макромоделей таких матеріалів природно припустити двоперіодичність розподілу відповідних польових величин, які виникають у композиті, і для опису використовувати двоперіодичні функції. Саме ця ідея лежить в основі методу регулярних структур [5]. Крім того цей метод разом з побудовою макромоделі композиту дає вичерпну інформацію про локальні поля в околі неоднорідностей [5,7,8], що є важливим при проектуванні конструкції з КМ.

В даній роботі, яка базується на результатах дослідження [9], із використанням методу регулярних структур проведемо осереднення магнітних властивостей волокнистих багатофазних ферромагнітних композитів з двоперіодичним укладанням волокон. Ці задачі цікаві ще й тому, що є основою для розв'язку більш складних проблем зв'язаної магнітопружності [1,8].

Основна частина

Розглянемо однорідне ізотропне з точки зору магнітних властивостей середовище, регулярно армоване (послаблено) системою однакових груп різнорідних волокон (пор) (рис. 1). Будемо вважати, що поперечний переріз кожного волокна є однозв'язною областю D_j, обмежену достатньо гладким замкненим контуром Γ_j $\left(\Gamma_j \cap \Gamma_i = 0\right)$ $j, i = \overline{1, n}$, кривизна якого задовольняє умові Гельдера [10].

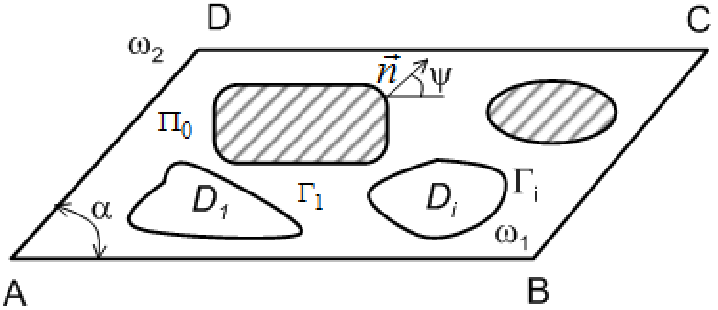

Рис. 1 Структура фундаментальної комірки

Припускаємо, що у межах кожної групи відповідні волокна мають однакові розміри та властивості; напрям армування вздовж вісі $0x_3$; волокна неперервно скріплені з матрицею по всій поверхні контакту; у структурі задані середні значення компонент вектора магнітної індукції $\langle B_1 \rangle$ і $\langle B_2 \rangle$.

Внаслідок геометричної і фізичної симетрії у структурі можна виділити фундаментальну комірку $ABCD$, побудовану на періодах ω_1 і ω_2 $\left(\operatorname{Im}\omega_1 = 0,\ \operatorname{Im}\left(\omega_2/\omega_1\right) > 0\right)$. Властивості армованого середовища (композиту) достатньо вивчити в межах вказаної комірки.

Розглядаються феромагнітні композити з магнітом'яких матеріалів, які знаходяться у слабких магнітних полях, тоді мають місце рівняння магнітостатики [11]:

$$\begin{gathered} \partial_j B_j^{(k)} = 0; \quad H_j^{(k)} = \partial_j \varphi^{(k)}; \\ \mathrm{B}_j^{(k)} = \mu_0 \mu_r^{(k)} \mathrm{H}_j^{(k)}; \ \partial_j = \partial / \partial x_j \quad \left(k = \overline{0, n},\ j = 1,2\right); \end{gathered} \tag{1}$$

Тут та нижче величини з верхнім індексом 0 відносяться до матриці, з верхнім індексом $k = \overline{1, n}$ – до волокна.

У даному випадку зручно ввести комплексні подання польових величин:

$$\begin{gathered} \mu_0 \mu_r^{(k)} \varphi^{(k)} = \operatorname{Re}\left(i f^{(k)}(z)\right) \quad \left(k = 0,1,2,\ldots,n\right); \ z = x_1 + i x_2 \\ \mathrm{B}_1^{(k)} - i \mathrm{B}_2^{(k)} = i F^{(k)}(z); \quad \mu_0 \mu_r^{(k)} \left(\mathrm{H}_1^{(k)} - i \mathrm{H}_2^{(k)}\right) = i F^{(k)}(z); \\ \int\limits_{AB} B_n^{(k)} ds = \operatorname{Re} f^{(k)}(z) \Big|_A^B; \quad B_n^{(k)} = B_1^{(k)} \cos\psi + B_2^{(k)} \sin\psi; \quad F^{(k)}(z) = \frac{d}{dz} f^{(k)}(z), \end{gathered} \tag{2}$$

де $F^{(k)}(z)$ – функції, аналітичні у відповідних областях [10]; ψ – кут додатної нормалі.

Умови спряження магнітних полів на контурі Γ_j ($j = \overline{1, n}$), які полягають у неперервному продовженні нормальної компоненти вектору індукції і дотичної компоненти вектору напруженості магнітного поля [9], запишемо у вигляді:

$$\begin{gathered} \operatorname{Im}\left\{F^{(0)}(z) e^{i\psi}\right\} = \operatorname{Im}\left\{F^{(j)}(z) e^{i\psi}\right\} \\ \mu_r^{(j)} \operatorname{Re}\left\{F^{(0)}(z) e^{i\psi}\right\} = \mu_r^{(0)} \operatorname{Re}\left\{F^{(j)}(z) e^{i\psi}\right\} \end{gathered} \tag{3}$$

Надалі будемо притримуватись процедури отриманої в [7]. Інтегральні подання розв'язків будемо розшукувати у вигляді

$$Az + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \nu(t - z) p(t) ds = \begin{cases} f^{(0)}(z), & z \in \Pi_0 \Big/ \left(\overline{D}_1 \bigcup\limits_{j=2}^{n} \overline{D}_j\right) \\ f^{(j)}(z), & z \in D_j \end{cases} \tag{4}$$

$$A = -\left(\langle B_2 \rangle + i \langle B_1 \rangle\right) - \frac{2\pi i}{F} \operatorname{Im} b + \frac{H \delta_1 b}{F}; \ \nu'(z) = \zeta(z); \quad \operatorname{Im} p(t) = 0; \ b = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma t p(t) ds;$$

де $\zeta(z)$ – дзета-функція Вейерштрасса [10]; $p(t)=\left\{p^{(j)}(t),\, t\in\Gamma_j\right\}$ – шукана "густина", ds – елемент контуру $\Gamma=\Gamma_1\bigcup\limits_{j=2}^{n}\Gamma_j$; напрям інтегрування – проти годинникової стрілки; $F=H\omega_1$ – площа фундаментальної комірки, $\omega_2=h+iH$.

Таким чином, інтегральні подання (4) забезпечують двоперіодичний характер розподілу компонент векторів магнітної індукції та існування у структурі заданих середніх значень $\langle B_1\rangle$, $\langle B_2\rangle$, а також не залежать від вибору "густини" $p(t)$.

Повертаючись до граничної задачі (3), відмітимо, що перша умова спряження виконується автоматично, а друга – приводить до системи регулярних інтегральних рівнянь відносно $p(t)$.

$$
\begin{gathered}
p_k(t_{0k})-\frac{\overset{*}{\mu}_k}{\pi F}\operatorname{Re}\int\limits_{\Gamma} p(t)G(t,t_{0k})ds=N(t_{0k}),\quad (k=1,n)\\
p(t)=\left\{p_j(t),\, t\in\Gamma_j\right\}\ (j=1,n),\ G(t,t_{0k})=\left\{G_{kj}(t,t_{0k}),\ t\in\Gamma_j\right\}\\
G_{kj}(t,t_{0k})=\{\delta_1 Ht-i2\pi\operatorname{Im}t-\zeta(t-t_{0k})F\}e^{i\psi_{0k}},\\
N(t_{0k})=2\mu_k^*\left(\langle B_1\rangle\sin\psi_{0k}-\langle B_2\rangle\cos\psi_{0k}\right),\ \mu_k^*=\frac{\mu_r^{(0)}-\mu_r^{(k)}}{\mu_r^{(0)}+\mu_r^{(k)}},\ \psi_{0k}=\psi(t_{0k}),\ \ t_{0k}\in\Gamma_k
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Процедура знаходження магнітних полів у волокнистому композиті така: чисельно за допомогою метода механічних квадратур [10] розв'язується система (5), потім з використанням (2), (4), визначаються вирази для компонент вектора магнітної індукції у структурі.

При оцінюванні полів в елементах конструкцій з композиційного матеріалу звичайно цей матеріал замінюють деяким гомогенним матеріалом, еквівалентним (у певному розумінні) середовищу з мікроструктурою. Питання такого типу зводяться до так званої проблеми осереднення властивостей композиційних матеріалів [1-7]. Надалі під макромоделлю регулярно армованого феромагнітного середовища будемо розуміти однорідне феромагнітне середовище, рівняння стану якого співпадають із законом зв'язку між середніми значеннями компонент вектора магнітної індукції з одного боку та вектора напруженості магнітного поля - з іншого.

$$
\begin{gathered}
\begin{cases}
<B_1>=<\mu_{11}><H_1>+<\mu_{12}><H_2>,\\
<B_2>=<\mu_{21}><H_1>+<\mu_{22}><H_2>,
\end{cases}\\
\langle\mu_{11}\rangle=\langle\nu_{22}\rangle\Delta^{-1},\ \langle\mu_{12}\rangle=\langle\nu_{21}\rangle\Delta^{-1},\ \langle\mu_{21}\rangle=\langle\mu_{12}\rangle,\ \langle\mu_{22}\rangle=\langle\nu_{11}\rangle\Delta^{-1},\\
<\nu_{11}>=\nu_0(1+2\pi F^{-1}\operatorname{Im}b^{(1)}),\ \ <\nu_{12}>=2\pi F^{-1}\nu_0\operatorname{Im}b^{(2)},\\
<\nu_{21}>=<\nu_{12}>,\ <\nu_{22}>=\nu_0(1-2\pi F^{-1}\operatorname{Re}b^{(2)});\ \nu_0^{-1}=\mu_0\mu_r^{(0)}\\
b^{(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}tp_n(t)ds,\ \ \Delta=\langle\nu_{11}\rangle\langle\nu_{22}\rangle-\langle\nu_{12}\rangle\langle\nu_{21}\rangle;\ p(t)=\langle B_1\rangle p_1(t)+\langle B_2\rangle p_2(t)
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Отже, матеріал володіє анізотропією магнітних властивостей, величини $\langle\mu_{ij}\rangle$ мають зміст ефективних магнітних проникностей [7,9].

Звернемось до результатів розрахунків. Розглядається композит тетрагональної будови ($\omega_1=1$, $\omega_2=i$) з «квадратними» (з заокругленими кутами) волокнами (порами), поперечні перерізи яких, обмежені контурами: $t=a_r(e^{i\theta}+a_3e^{-3i\theta})e^{i\gamma}$, де $a_3=-0{,}12036$, $a_r=1{,}1353\cdot 2l$, $2l$ – середня лінія. Матеріал матриці – ферит F-107 з відносною магнітною проникністю $\mu_r^{(0)}=110$. Матеріал волокон має магнітну проникність $\mu_r=1500$. В модельному середовищі діє осереднене магнітне поле з компонентами $\langle\vec{B}\rangle=(1m\text{Тл};\ 0)$. На рисунках 2а)-г) побудовані лінії рівня компонент вектора магнітної індукції для різних типів армування: 2а) чотири волокна, 2б) пора ($\mu_r=1$) та три волокна; 2в) дві пори та два волокна – «сендвічевий» спосіб армування; 2г)два волокна та дві пори – армування у «шаховий» спосіб. Водночас для описаних структур на рисунку 3 побудовані залежності осереднених макромодулів $\langle\mu_{ii}\rangle/\mu^{(0)}$ ($\mu^{(0)}=\mu_0\mu_r^{(0)}$) у функції параметра $\lambda=2l/\omega_1$: крива 1 відповідає структурі 2а), крива 2 – 2б), криві 3 та 3'– 2в), крива 4 – 2г). Суцільні лінії відносяться до макромодуля $\langle\mu_{11}\rangle$, пунктирна - $\langle\mu_{22}\rangle$. Отже, як випливає з результатів розрахунків модельне середовище буде ізотропним, окрім випадку армування у «сендвічевий» спосіб, коли матеріал стає істотно ортотропним. Аналіз структур 2в) та 2г) свідчить про те, що лише зміна способу армування при незмінній фазності композиту суттєво впливає на осереднені характеристики. Так, при армування типу «шахи» макромодулі майже не змінюються у порівняння з магнітною проникністю матриці, тоді як при «сендвічевому» способі армуванні макромодуль $\langle\mu_{11}\rangle$ зростає майже в чотири рази, а $\langle\mu_{22}\rangle$ зменшується в 10 раз.

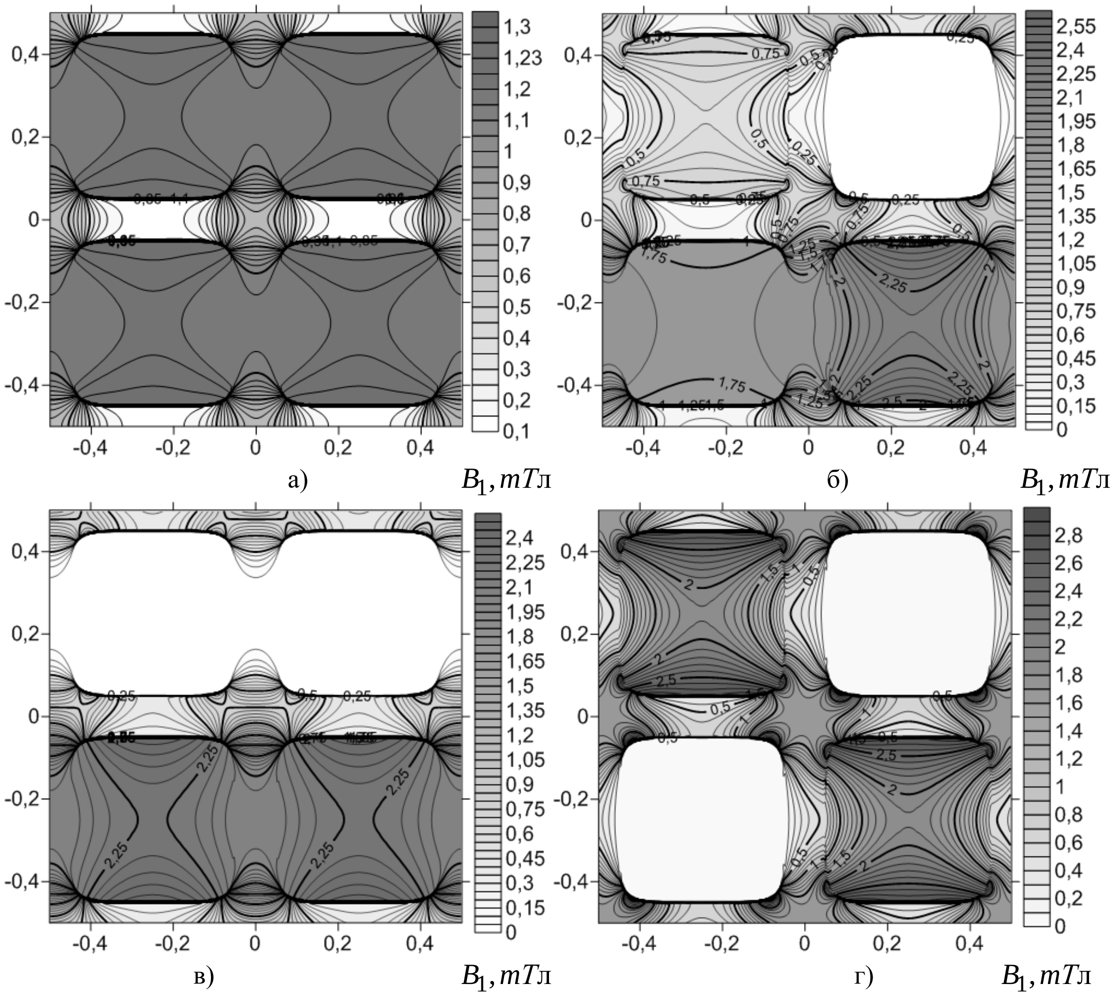

Рис. 2 Лінії рівня компоненти B_1 вектора магнітної індукції.

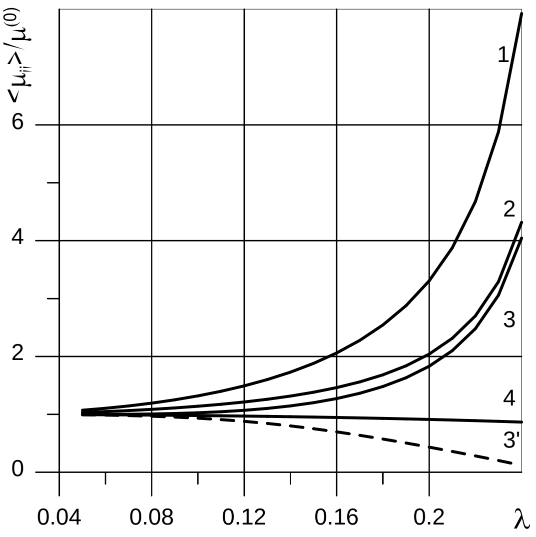

Рис. 3 Осереднені макромодулі композиту в функції параметру $\lambda = 2l/\omega_1$.

Висновки

У роботі досліджено властивості феромагнітних матеріалів, армованих регулярною двоперіодичною системою груп циліндричних волокон, перерізи яких довільні досить гладкі замкнуті контури. Передбачається, що в структурі задані середні значення компонент вектора магнітної індукції.

Загальне представлення розв'язку розшукувалося в класі квазіперіодичних функцій та описувалось дзета-функцією Вейерштрасса. Гранична задача магнітостатики зведена до системи регулярних інтегральних рівнянь, яка реалізована чисельно за схемою метода механічних квадратур.

Схема розв'язання проблеми осереднення була узагальнена на регулярно армовані феромагнітні середовища. Побудовано алгоритм для знаходження макроскопічних параметрів структури через функціонали, які визначені на розв'язках системи регулярних інтегральних рівнянь другого роду відповідної граничної задачі та містять повну інформацію про мікроструктуру комірки. Так, при армування типу «шахи» макромодулі майже не змінюються у порівняння з магнітною проникністю матриці, тоді як при «сендвічевому» способі армуванні макромодуль $\langle \mu_{11} \rangle$ зростає майже в чотири рази, а $\langle \mu_{22} \rangle$ зменшується в 10 раз.

Як випливає з приведених результатів, у випадку, коли в модельованому феромагнітному середовищі діє однорідне магнітне поле, в структурі композиту магнітне поле неоднорідне: мають місце градієнти в околі включень. При цьому для розглянутих конфігурацій фундаментальних комірок максимальні за значенням компоненти вектора магнітної індукції, що виникають в матриці і волокнах, діють у випадку, коли в структурі є пори.

Список використаної літератури

1. Соколкин Ю.В. Электроупругость пьезокомпозитов с нерегулярными структурами / Ю.В. Соколкин, А.А. Паньков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.
2. Хорошун Л.П. Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры /Л.П.Хорошун, Б.П. Маслов – Киев: Наук. думка, 1993. – 131 с.
3. Milton G.W. The theory of composite. / G.W. Milton – Camb. Univ. Press, 2004. – 719 p.
4. Бардзокас Д.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры / Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 376 с.
5. Григолюк Э. И. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами / Э.И. Григолюк, Л.А.Фильштинский – М.: «Физико-матем. лит.», 1994. – 335 с.
6. Manevitch L.I. Mechanics of periodically heterogeneous structures / L.I. Manevitch, I.V. Andrianov I.V., V.G. Oshmyan. — Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer., 2002 — 264 p.
7. Фільштинський Л. А. Усереднення магнетних властивостей волокнистих феромагнетних композитів /Л.А. Фільштинський, Ю. В. Шрамко, Д. С. Коваленко // Фізико-хімічна механіка матеріалів, 2010. – №6 – С. 82 – 90.
8. Yang F. The effective properties of smart composites with linear coupling behaviors./ F Yang, D.Zhang, L. Li, X. Han // Int. J. Mech. Mater Des, 2008 - 4 – P. 255 - 263.
9. Фильштинський Л.А. Усереднення магнітних властивостей пористих феромагнітних волокнистих композитів / Л.А. Фильштинський, Ю.В. Шрамко, Ю.В. Сіренко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій, 2012 –Вип. 20. С. 343 – 349
10. Фильштинский Л. А. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Математический аппарат физических и инженерных наук. Т. 1. / Л.А. Фильштинский, Д.И. Бардзокас, М.Л. Фильштинский – М., Ижевск,, НИЦ РХД, 2010г. - 864 с.
11. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. / В. Новацкий – М.: Мир, 1986. – 159с.