

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ І  
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І  
ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ**

УДК 531.314.2:621.9.06

Є.О. БАГАНОВ, Ю.М. БАРДАЧОВ, С.А. РУСАНОВ  
Херсонський національний технічний університет**ЗАСТОСУВАННЯ ВІРТУАЛЬНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ  
ПРОСТОРОВИХ МЕХАНІЗМІВ ІЗ В'ЯЗЯМИ**

*В роботі запропонований підхід до математичного опису просторових механізмів із в'язями на основі введення віртуального потенціалу. Визначений його вигляд для ідеальних голономних в'язів, а також для неголономних в'язів, які створюються поверхнями, що обмежують середовище, вільне для руху. Проведено тестування запропонованого підходу на простих системах з відомими розв'язками.*

*Ключові слова: в'язь, віртуальний потенціал, просторовий механізм, моделювання.*

Е.А. БАГАНОВ, Ю.Н. БАРДАЧЕВ, С.А. РУСАНОВ  
Херсонский национальный технический университет**ПРИМЕНЕНИЕ ВИРТУАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ СО СВЯЗЯМИ**

*В работе предложен подход математического описания пространственных механизмов со связями на базе введения виртуального потенциала. Определен его вид для идеальных голономных связей, а также для неголономных связей, создаваемых ограничивающими свободное движение поверхностями. Проведено тестирование предложенного подхода на простых системах с известными решениями.*

*Ключевые слова: связь, виртуальный потенциал, пространственный механизм, моделирование.*

Ye.A. BAGANOV, Yu. M. BARDACHOV, S.A. RUSANOV  
Kherson National Technical University**USE OF VIRTUAL POTENTIAL FOR SIMULATION OF SPATIAL MECHANISMS WITH  
CONSTRAINTS**

*In the paper the approach of mathematical formulation for spatial mechanisms with constraints is suggested that is based on introduction of virtual potential. It was defined for ideal holonomic constraints and for nonholonomic constraints, caused by surfaces that confine free motion. Tests of suggested approach were carried out using simple systems with well-known solutions.*

*Keywords: constraint, virtual potential, spatial mechanism, simulation.*

**Постановка проблеми**

Формоутворюючі рухи виконавчих органів просторових механізмів сучасного технологічного обладнання інколи можуть бути визначені тільки шляхом математичного моделювання. Така ситуація має місце, наприклад, для верстатів паралельної структури, які не мають матеріальних координатних напрямних (триподи, гексаподи, ножиці), а тільки віртуальні [1]. Проблема моделювання руху всіх рухомих ланок, вузлів та агрегатів постає також під час прогнозування необхідних функціональних можливостей компоновки верстатів і забезпечення їх технічних характеристик на ранніх стадіях проектування [2].

Розробка гнучких програмних комплексів розрахунку просторових механізмів потребує автоматичного генерування вихідної системи рівнянь, що враховує закони динаміки, інерційність та геометричні в'язі компонентів механізмів. Така ситуація вимагає алгоритмічного синтезу математичної моделі просторового механізму з точки зору його формального опису та наступної обробки цієї інформації.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Традиційно динамічна модель опису руху механічних систем з ідеальними голономними в'язями створюється на основі рівняння Лагранжа I роду [3, 4]:

$$\frac{\partial L}{\partial r_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial r_j} = 0, \quad (1)$$

або, що більш розповсюджено, II роду (рівняння Ейлера-Лагранжа) в узагальненій системі координат [3, 5].

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad (2)$$

де  $f_i(\vec{r}, t) = 0$  - рівняння  $i$ -ї в'язі з  $m$  в'язів, що накладені на систему,  $\lambda_i$  — невизначені множники Лагранжа,  $r_j$  - компонента радіус-вектора  $\vec{r}$ ,  $L$  - функція Лагранжа,  $Q_j$  - результуюча узагальнених непотенціальних сил які прикладені до ланок і шарнірів механізму. Повна кількість рівнянь складається з  $n$  рівнянь (1) або (2), кількість яких визначається кількістю ступенів вільності системи та кількістю рівнянь в'язів, тобто  $m+n$ .

Наявність в системі обмежуючих поверхонь, які описуються умовою типу  $f_i(\vec{r}, t) > 0$ , призводить до необхідності урахування неголономних в'язей. В цьому випадку система додатково ускладнюється і описується рівняннями [6]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \omega_j^i(q); \\ \sum_{j=1}^n \omega_j^i(q) \dot{q}_j = 0. \end{cases}, \quad (3)$$

де  $\omega_j$  - узагальнені швидкості.

Необхідність створення різних типів рівнянь (геометричних, Лагранжа-Ейлера тощо) призводить до ускладнення як математичної моделі, так і процедури автоматичного генерування системи рівнянь руху і, тим самим, зменшує гнучкість відповідного програмного коду щодо синтезу просторових механізмів.

#### Формулювання мети дослідження

Аналіз підходів до математичного опису просторових механізмів з наявністю голономних ідеальних в'язів та поверхонь, які обмежують середовище, вільне для руху, показав відсутність для таких систем простого ефективного формалізму, зручного для автоматичного генерування системи рівнянь. Тому метою даної роботи є розробка уніфікованого підходу до формального опису голономних ідеальних в'язів та неголономних в'язів, які створюються обмежуючими поверхнями, для спрощення автоматичної генерації системи рівнянь, що описують динаміку просторового механізму та перевірка коректності його застосування на простих тестових системах.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Відмінності у формуванні вихідної системи рівнянь пов'язані з чинниками, що враховуються правими частинами рівнянь (2) і (3), а також геометричними рівняннями, які описують в'язі. Прибрати геометричні рівняння можна було б застосувавши до них силовий опис. Однак для жорстких в'язів відхилення за нормаллю від дозволеної для руху поверхні або кривої викликає появу нескінченних за модулем сил, що діють проти відхилення. Внаслідок цього силовий опис має дві проблеми: нескінченний модуль сил важко стикується з розрахунковими алгоритмами, а варіювання напрямку сили уздовж дозволеної в'язями поверхні (кривої) ускладнює математичний опис задачі.

Для спрощення формалізму пропонується описувати сили реакції в'язей вводячи, за аналогією з віртуальними голономними в'язями [5], віртуальний потенціал (ВП). Для голономних в'язей ВП повинен мати мінімум у дозволених в'язями точках простору, а при відхиленні від них стрімко зростати (в ідеалі – стрибкоподібно). Це забезпечує нульове значення сили у дозволених точках і появу нескінченної сили при намаганнях руху по нормалі до дозволеної для руху поверхні (кривої), що описується рівнянням.

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (4)$$

Таким вимогам до ВП задовольняє функція:

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{\delta(f(x, y, z, t))}, \quad (5)$$

де дельта-функція визначається співвідношенням:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Опис неголономних в'язей, які створюються наявністю поверхонь, що обмежують рух системи, можна проводити аналогічно (5), приймаючи ВП нульовим в дозволений для руху частині простору:

$$V(x, y, z, t) = \frac{1 \pm \text{sign}(f(x, y, z, t))}{2\delta(f(x, y, z, t))}, \quad (7)$$

де функція визначення знаку числа визначається наступним чином:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (8)$$

а знак  $\pm$  визначає, з якого боку від поверхні, що задана рівнянням  $f(x, y, z, t) = 0$ , знаходиться дозволена для руху частина простору.

При наявності у системі  $n_1$  в'язів типу (5) та  $n_2$  в'язів типу (7), ВП описується функцією:

$$V(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\delta(f_i(x, y, z, t))} + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{1 \pm \text{sign}(f_i(x, y, z, t))}{2\delta(f_i(x, y, z, t))} \quad (9)$$

Тоді, вводячи замість геометричного енергетичний опис в'язів, можна включити їх безпосередньо у функцію Лагранжа, яка буде визначатися [7]:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - (V(x, y, z, t) + U(x, y, z, t)) \quad (10)$$

Перший доданок у (10) визначає кінетичну енергію  $M$  точок, інерційні властивості яких необхідно врахувати, з  $N$  точок, траєкторії яких підлягають визначенню,  $V(x, y, z, t)$  визначається за (9), а  $U(x, y, z, t)$  являє собою сумарну потенціальну енергію системи в полі потенціальних сил.

Кінцева система диференціальних рівнянь, що описує динаміку просторового механізму, можна отримати аналогічно рівнянням (2) підстановкою функції Лагранжа у рівняння Ейлера, що складені по всім  $N$  ступеням вільності [7]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = Q_{x_j}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} - \frac{\partial L}{\partial y_j} = Q_{y_j}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} - \frac{\partial L}{\partial z_j} = Q_{z_j}. \end{cases} \quad j = 1, \dots, N \quad (11)$$

Система (11) доповнюється початковими умовами координат і швидкостей  $M$  точок, інерційні властивості яких враховуються.

Для реалізації чисельної процедури розрахунку використовувати опис дельта-функції у вигляді (6) неможливо, тому необхідно застосувати одну з наступних апроксимацій дельта-функції [8]: поліноміальну

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi(1 + \alpha^2 x^2)}, \quad (12)$$

або експоненціальну:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 x^2), \quad (13)$$

де керуючи значенням параметра  $\alpha$  можна досягнути необхідного ступеня наближення.

Тригонометричну апроксимацію:

$$\delta(x, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right) \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}$$

застосовувати неможна, внаслідок наявності додаткових локальних максимумів і мінімумів, в яких сили обертаються в нуль і, тим самим, обумовлюють появу хибних дозволених траєкторій.

Функція  $\text{sign}$  не потребує апроксимації, так як, по-перше, системи комп'ютерної математики на кшталт Maple або Mathematica мають правила її диференціювання, і, по-друге, функція знаходиться у чисельнику і після диференціювання не вносить проблем у чисельні алгоритми.

Необхідно додатково обговорити можливість застосування замість дельта-функції у вигляді (6) апроксимацій типу (12) або (13), що робить в'язі не абсолютно жорсткими (сили не миттєво отримують нескінченне значення при порушенні дозволених траєкторій). Лагранжева механіка базується на тому, що зі всіх можливих траєкторій реалізуються лише ті, для яких дія:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{x, y, z\}, \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}, t)$$

є мінімальною (екстремальною) [9]. Тому, якщо початкові умови не містять складових, які з самого початку порушують геометричні обмеження (проекції швидкості по нормалі до дозволених поверхонь руху, початкові положення точок поза межами цих поверхонь), то еволюція системи повинна йти шляхом найменших енергетичних положень, які відповідають дозволеним в'язям точкам. Однак навіть при наявності в системі початкових збурень результат завжди може бути перевірений і уточнений шляхом збільшення параметра  $\alpha$  в рівняннях (12) або (13), що робить в'язі «жорсткішими».

Для перевірки коректності запропонованого підходу для голономних в'язів була обрана наступна система: невагомий циліндричний шарнір, з рухомим центром в точці з координатами  $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$  зі штоком довжиною  $R=1$ , на кінці якого розташоване точкове масивне тіло з координатами  $(x, y, z)$ . Ось шарніра, що задана вектором  $\vec{l} = (l_x(t), l_y(t), l_z(t))$ , може довільно рухатися (рис. 1). Поле сили тяжіння не враховується. Розглядається тривимірна задача.

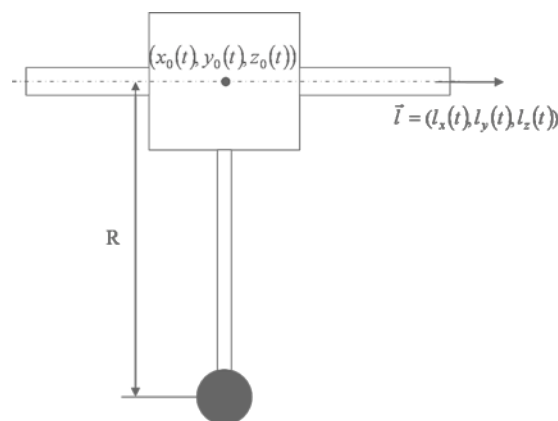


Рис. 1. Циліндричний блок зі штоком та масивним точковим тілом

Геометричними рівняннями в'язей є:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, t) = (x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 + (z - z_0(t))^2 - R^2 = 0; \\ f_2(x, y, z, t) = \vec{l} \cdot \vec{r} = l_x(t) \cdot (x - x_0(t)) + l_y(t) \cdot (y - y_0(t)) + l_z(t) \cdot (z - z_0(t)) = 0. \end{cases}$$

Тоді функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \left( \frac{1}{\delta((x-x_0(t))^2 + (y-y_0(t))^2 + (z-z_0(t))^2 - R^2)} + \frac{1}{\delta(l_x(t) \cdot (x-x_0(t)) + l_y(t) \cdot (y-y_0(t)) + l_z(t) \cdot (z-z_0(t)))} \right)$$

Рівняння (11) мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Моделювання проводилося в системі комп'ютерної математики Maple. Апроксимація дельта-функції застосовувалася за формулою (12) при  $\alpha=1000$ . Початкові умови розглядаються нижче.

Тест №1. Вісь шарніра нерухома, тіло має початкову швидкість, перпендикулярну до штоку та осі шарніра. У даному випадку траєкторією має бути коло. Результати розрахунку наведені на рис. 2 (а, б). Як видно з рис. 2, траєкторією є коло, усі точки знаходяться в одній площині.

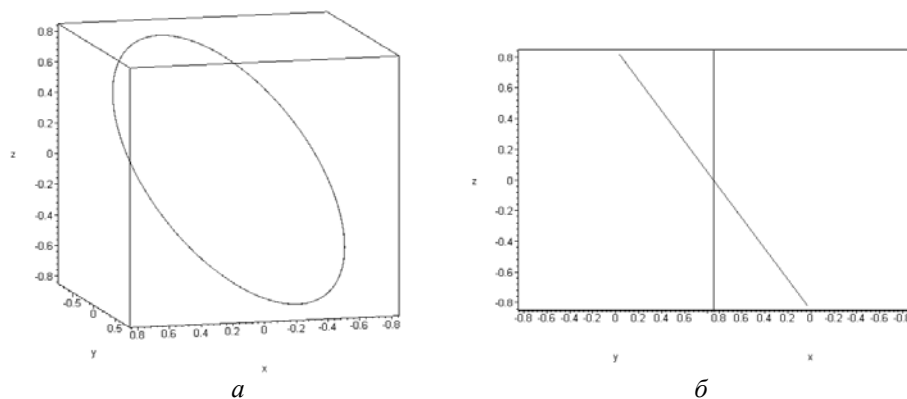


Рис. 2. Результати розрахунку для тесту №1

Тест №2. Початкова швидкість тіла нульова, шарнір рухається за напрямком власної осі. У даному випадку траєкторією має бути пряма. Результати розрахунку наведені на рис. 3 (а, б). Як видно з рис. 3, траєкторією є пряма.

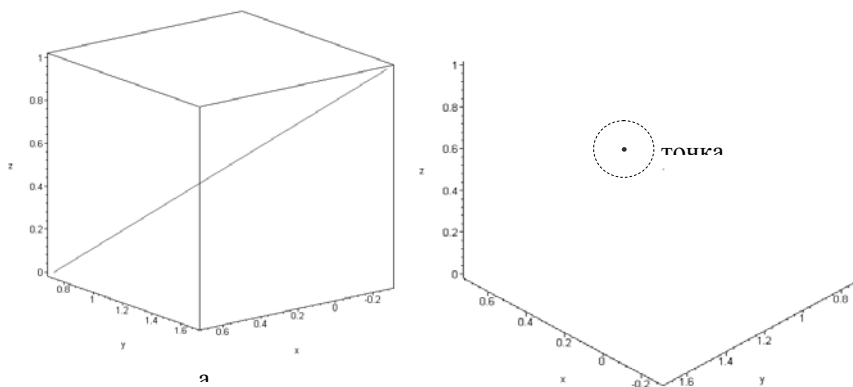


Рис. 3. Результати розрахунку для тесту №2

Тест №3. Початкова швидкість тіла нульова, тіло має ненульову координату  $y$ , вісь шарніру паралельна осі  $Oz$ . Система починає рухатися з постійною швидкістю в напрямку осі  $Ox$ . Результатом, залежно від початкового відхилення, повинна бути циклоїда (якщо шток шарніра складає  $90^\circ$  з віссю  $Ox$ ) або, в інших випадках, скорочена циклоїда. Результат можна легко отримати, якщо перейти в систему координат, пов'язану з центром шарніра. Тоді у початковий момент тіло отримує швидкість, що дорівнює проекції переносної швидкості на напрямок, перпендикулярний до штока шарніра. Повертаючись до лабораторної системи координат легко отримати рівняння зміни швидкості, що притаманне циклоїді.

Результат розрахунку наведено на рис. 4, *a* – це скорочена циклоїда (кут з віссю  $Ox$  складає  $80^\circ$ ). Тіло під час руху описує повне коло навколо центру шарніра (координата  $y$  змінюється в межах від  $-1$  до  $1$ ).

Під час цього тесту було визначено додаткову перевагу застосування ВП. Абсолютно жорсткі в'язі визначають несумісність початкових швидкостей тіла  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$  з ненульовою початковою швидкістю центру шарніра. При використанні ВП, внаслідок математичної відсутності абсолютно жорстких в'язів, ця проблема знімається без впливу на результат розрахунку.

Тест №4. Початкова швидкість тіла нульова, тіло має ненульову координату  $y$ , вісь шарніру паралельна осі  $Oz$ . Система починає рухатися з постійним прискоренням в напрямку вісі  $Ox$ . У даному випадку траєкторією має бути синусоїда з періодом, що збільшується у часі. Результати розрахунку наведені на рис. 4, *б*. Отримана залежність відповідає очікуваним результатам. Амплітуда коливань дорівнює початковому відхиленню тіла від осі  $Ox$ .

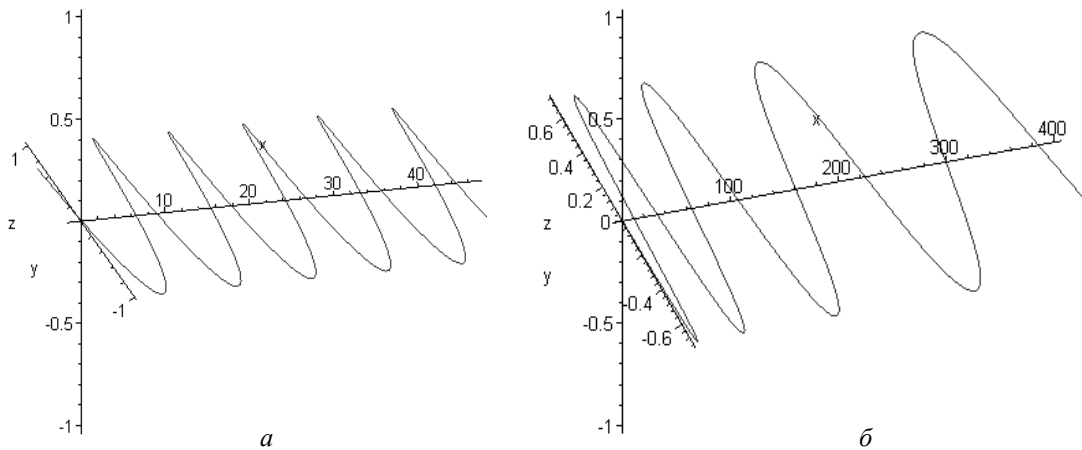


Рис. 4. Результати розрахунку для тесту №3 (*a*) та №4 (*б*)

Для перевірки коректності запропонованого підходу для неголономних в'язів, які створюються наявністю поверхонь, що обмежують рух системи, була обрана наступна система.

Тест №5. У сферичній порожнині з жорсткими стінками знаходиться матеріальна точка, яка в початковий момент має довільну швидкість. Система знаходиться в полі тяжіння Землі.

Обмежуюча поверхня сфери (прийемо, що центр сфери співпадає з початком координат) описується рівнянням:

$$f(x, y, z, t) = (x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 + (z - z_0(t))^2 - R^2 = 0$$

Тоді ВП для дозволеного руху всередині сфери:

$$V(x, y, z, t) = \frac{1 + \text{sign}((x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 + (z - z_0(t))^2 - R^2)}{2\delta((x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 + (z - z_0(t))^2 - R^2)}$$

і функція Лагранжа буде мати вигляд:

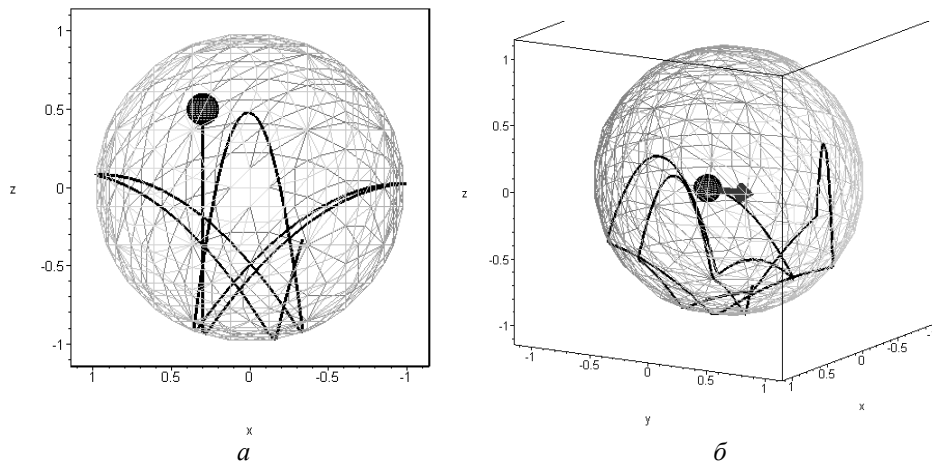
$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \left( \frac{1 + \text{sign}((x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 + (z - z_0(t))^2 - R^2)}{2\delta((x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 + (z - z_0(t))^2 - R^2)} + mgz \right),$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння.

Рівняння (11) мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = -mg. \end{cases}$$

Апроксимація дельта-функції застосовувалася за формулою (12) при  $\alpha=50000$ . Результати розрахунку при нульовій початковій швидкості наведені на рис. 5, *а*. Траєкторія має вигляд плоскої кривої, координата  $z$  якої не перевищує початкової висоти матеріальної точки. На рис. 5, *б* наведена траєкторія руху при ненульовій початковій швидкості. У даному випадку траєкторія має вигляд просторової кривої, координата  $z$  якої на деяких ділянках перевищує початкову висоту матеріальної точки внаслідок наявності у початковий момент часу ненульової кінетичної енергії. В обох випадках траєкторія матеріальної точки не виходить за межі сфери, кути падіння дорівнюють кутам відбиття, траєкторії між ударами є параболами. Все це повністю відповідає законам руху тіла в полі тяжіння землі та абсолютно пружному удару.



**Рис. 5. Результати розрахунку для тесту №5. Кулька відображає початкове положення матеріальної точки, стрілкою показаний напрямок початкової швидкості**

Перевірка коректності застосування ВП при синтезі голономних в'язів з поверхнями, що обмежують рух системи, проводилася наступним чином.

Тест №6. Циліндричний шарнір зі штоком та масивним точковим тілом (рис. 1) обмежений двома площинами  $y = 0.9$  і  $y = -0.5$ . Початкова швидкість тіла нульова, тіло має ненульову координату в межах  $-0.5 < y(0) < 0.9$ , вісь шарніру паралельна осі  $Oz$ . Система починає рухатися з постійною швидкістю в напрямку осі  $Ox$ . Тіло має меншу координату  $x$ , ніж центр шарніра.

Результатом, повинна бути ламана в площині  $xOy$ , що складається з елементів циклоїд. Залежність  $x(t)$  повинна мати виломи при  $y = -0.5$  і  $y = 0.9$  і тіло повинно постійно бути позаду центру шарніра.

Результати розрахунку наведені на рис.6. Отримані залежності відповідають очікуваним результатам. Амплітуда коливань повністю визначається площинами, що обмежують рух.

Необхідно відмітити, що перехід від необмеженої моделі циліндричного шарніра до обмеженої потребував лише додавання двох стандартних доданків у функцію Лагранжа. Така особливість використання ВП дозволяє легко застосовувати запропонований підхід для автоматичного генерування системи рівнянь.

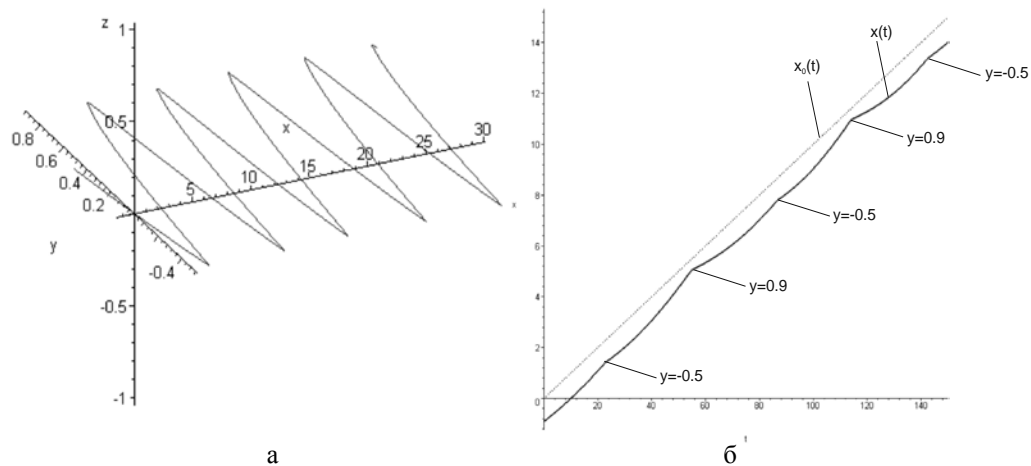


Рис. 6. Результати розрахунку для тесту №6, а – траєкторія, б – часова залежність положення центру шарніра ( $x_0(t)$ ) та тіла ( $x(t)$ ). Позначені дотикування тіла до обмежувачих площин

#### Висновки

Застосування запропонованого віртуального потенціалу дозволяє переносити рівняння в'язів безпосередньо у функцію Лагранжа у вигляді відокремлених уніфікованих доданків, що робить підхід перспективним для автоматичного генерування системи рівнянь, які описують динаміку просторового механізму. В роботі визначений вигляд віртуального потенціалу для голономних в'язів, а також неголономних в'язів, які створюються обмежувачими поверхнями.

Проведення тестових розрахунків з використанням віртуального потенціалу показали відповідність отриманих результатів очікуванню, алгоритмічність побудови розрахункової системи рівнянь, легкість синтезу моделі при поєднанні різних типів в'язів.

Додатково запропонований підхід дозволяє знімати миттєві невідповідності між заданими початковими швидкостями у системі, що неможливо при використанні геометрично фіксованих співвідношень у стандартних підходах.

#### Список використаної літератури

1. Кузнецов Ю.М. Візуалізація формуютьуючих рухів механізмами паралельної структури у верстатах нових компоновок / Ю.М. Кузнецов, Д.О. Дмитрієв // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль:ТДТУ, 2008.-№1, Том 13. - С. 61-70.
2. Кузнецов Ю.М. Компоновки верстатів з механізмами паралельної структури. Монографія. / Ю.М. Кузнецов, Д.О. Дмитрієв, Г.Ю. Діневич– Херсон: ПП Вишемирський, 2009. – 456 с.
3. Braun D. Simulation of Constrained Mechanical Systems – Part I: An Equation of Motion/ D. Braun, M. Goldfarb. // J. Appl. Mech. – 2012. – 79(4). – p. 041017-1 – 041017-9.
4. Vlasenko D. Method for distributed forward dynamic simulation of constrained mechanical systems // Proceedings of the Eurosim Conference – September 6 – 10, 2004, Noisy-le-Grand, France.
5. Maggiore M. Virtual Holonomic Constraints for Euler–Lagrange Systems/ M. Maggiore; L. Consolini // IEEE Transactions on Automatic Control – 2013. – 58(4). – p. 1001 – 1008.
6. Franke M. Simulation of nonholonomic mechanical systems using algorithmic differentiation / M. Franke, T. Zaiczek, K. Röbenack // 7<sup>th</sup> Vienna International Conference on Mathematical Modelling. – February 14 – 17, 2012, Vienna, Austria. – p. 228-233
7. Іро Г. Класична механіка. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 1999. – 464 с.
8. Arfken G. Mathematical Methods for Physicists, Seventh Edition: A Comprehensive Guide 7<sup>th</sup> Edition./ G. Arfken, H. Weber, F. Harris. – Academic Press. – 2012. - 1220 p.