

УДК 539.3

Р.С. МУСІЙ, Н.Б. МЕЛЬНИК, Х.Т. ДРОГОМИРЕЦЬКА
Національний університет "Львівська політехніка"**ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ЦИЛІНДРА З ТОНКИМ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМ ПОКРИТТЯМ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ**

Сформульовано динамічну задачу термомеханіки для довгого порожнистого електропровідного циліндра із зовнішнім тонким електропровідним покриттям за однорідної нестационарної електромагнітної дії. Чисельно проаналізовано термонапружений стан розглядуваного циліндра за дії електромагнітного імпульсу. Математичну модель задачі побудовано на основі моделі термомеханіки двошарового електропровідного циліндра, в якого товщина зовнішнього шару суттєво менша за товщину внутрішнього. Для побудови розв'язку задачі використано квадратичну апроксимацію всіх визначальних функцій за радіальною змінною.

Ключові слова: електропровідний циліндр, тонке покриття, нестационарна електромагнітна дія, термонапружений стан, електромагнітний імпульс.

Р.С. МУСІЙ, Н.Б. МЕЛЬНИК, Х.Т. ДРОГОМИРЕЦЬКА
Национальный университет "Львовская политехника"**ТЕРМОНАПРЯЖЕННЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ЦИЛИНДРА С ТОНКИМ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

Сформулирована динамическая задача термомеханики для длинного полого электропроводного цилиндра с внешним тонким электропроводным покрытием при однородном нестационарном электромагнитном воздействии. Численно проанализировано термонапряженное состояние рассматриваемого цилиндра при воздействии электромагнитного импульса. Математическая модель задачи построена на основе модели термомеханики двухслойного электропроводного цилиндра, у которого толщина внешнего слоя существенно меньше толщины внутреннего. Для построения решения задачи использована квадратическая аппроксимация всех определяющих функций по радиальной переменной.

Ключевые слова: электропроводный цилиндр, тонкое покрытие, нестационарное электромагнитное воздействие, термонапряженное состояние, электромагнитный импульс.

R.S.MUSIY, N.B.MELNYK, H.T. DRONOMYRETSKA
Lviv Polytechnic National University**THERMOSTRESSED STATE OF ELECTROCONDUCTIVE CYLINDER WITH A THIN ELECTROCONDUCTIVE COATING UNDER NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC ACTION**

The thermomechanic dynamic task for long hollow electroconductive cylinder with thin external electroconductive coating under the homogeneous non-stationary electromagnetic action was formulated. Numerical analysis of the thermostressed state of the proposed cylinder under electromagnetic action was done. The mathematical model of the problem was based on a thermomechanic model of two-layer conductive cylinder in which the thickness of the outer layer is substantially less than the inside one. To construction of the solution of the problem was based on quadratic approximation of all the defining features for radial variable.

Keywords: electroconductive cylinder, thin coating, nonstationary electromagnetic action, thermostressed state, electromagnetic impulse.

Постановка проблеми

У різних пристроях як конструктивний елемент часто використовують довгий порожнистий електропровідний циліндр з тонким електропровідним покриттям, фізико-механічні характеристики якого мають певні відмінності від таких для основи (коефіцієнти електро-, тепло-, температуропровідності тощо). В процесі роботи та експлуатації ці елементи піддаються дії електромагнітних полів (ЕМП), зокрема імпульсних [1]. Такі імпульсні ЕМП (ІЕМП) створюють в циліндрі об'ємні нестационарні джерела джоулевого тепла Q і пондеромоторні сили \vec{F} , які зумовлюють поля температури T , переміщень \vec{U} і напружень $\hat{\sigma}$. Компоненти тензора $\hat{\sigma}$ динамічних напружень та їх інтенсивності σ_i за певних параметрів імпульсного ЕМП та властивостей матеріалів основи і покриття можуть досягати в даному циліндрі відповідних значень, аж до втрати його несучої здатності. Тому задача визначення термонапруженого стану

елемента конструкції у вигляді порожнистого електропровідного циліндра з тонким електропровідним покриттям з матеріалу інших фізико-механічних властивостей, ніж основа, за імпульсної електромагнітної дії та впливу покриття на напружений стан і несучу здатність є актуальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій та формулювання мети досліджень

У літературі відомі дослідження термонапруженого стану (ТНС) однорідних порожнистого і суцільного електропровідних циліндрів за нестационарних теплових [2] і електромагнітних дій [3] та біметалевого порожнистого циліндра за дії ІЕМП [4]. Проте вплив ІЕМП на термомеханічну поведінку порожнистого циліндра з тонким покриттям вивчений недостатньо. Нижче розглянуто формулювання задачі термомеханіки для такого циліндра за однорідної нестационарної електромагнітної дії, запропоновано методику її розв'язування та чисельно проаналізовано розв'язок за дії електромагнітного імпульсу (ЕМІ).

Виклад основного матеріалу досліджень

Математичну модель термомеханіки порожнистого електропровідного циліндра з тонким зовнішнім електропровідним покриттям будуємо з використанням моделі задачі термомеханіки двошарового електропровідного циліндра, в якого товщина зовнішнього шару суттєво менша за товщину внутрішнього.

Розглянемо довгий порожнистий електропровідний циліндр з тонким електропровідним покриттям, віднесений до циліндричної системи координат (r, φ, z) , вісь Oz якої співпадає з віссю симетрії циліндра. Внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_1$ радіуси основи і зовнішній $r = r_2$ радіус поверхні покриття циліндра знаходяться за умов теплоізоляції з довкіллям і вільні від силового навантаження. Даний циліндр зазнає однорідної дії нестационарного ЕМП, яке задається значеннями осьової компоненти $H_z^{(n)}$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)}(r, t)$ на цих поверхнях

$$H_z^{(1)}(r_0, t) = H_z^-(t), \quad H_z^{(2)}(r_2, t) = H_z^+(t). \tag{1}$$

Тут $H_z^\pm(t)$ - задані функції часу t , індекси $n=1$ і $n=2$ відповідають основі і покриттю. Приймається, що матеріали основи і покриття циліндра однорідні, ізотропні і неферромагнітні, а їх фізико-механічні характеристики сталі. На поверхні $r = r_1$ контакту основи і покриття виконуються умови ідеальних електромагнітного, теплового і механічного контактів.

За таких умов розрахункова модель визначення ТНС розглядуваного циліндра складається з трьох етапів [4]: на першому етапі з рівнянь електродинаміки визначається вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)}$ в основі і покритті циліндра та зумовлені ним джоулеві тепловиділення $Q^{(n)}$ і пондеромоторні сили $\vec{F}^{(n)}$; на другому - з рівнянь теплопровідності визначається розподіл температурного поля $T^{(n)}$; на третьому - з рівнянь динамічної термопружності за відомою температурою і об'ємними силами визначаються компоненти вектора переміщень $\vec{U}^{(n)}$ та тензора напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$.

Визначення ЕМП. Відмінну від нуля осьову компоненту $H_z^{(n)}(r, t)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)} = \{0; 0; H_z^{(n)} \equiv H_z^{(n)}(r, t)\}$ в основі та покритті визначаємо з рівняння

$$\frac{\partial^2 H_z^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

за граничних умов (1) на зовнішніх поверхнях циліндра і умов ідеального електромагнітного контакту

$$H_z^{(1)}(r_1, t) = H_z^{(2)}(r_1, t), \quad \frac{\partial H_z^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} = k_\sigma \frac{\partial H_z^{(2)}(r_1, t)}{\partial r}, \tag{3}$$

на поверхні з'єднання основи і покриття та нульовій початковій умові $H_z^{(n)}(r, 0) = 0$. Тут $k_\sigma = \sigma_1 / \sigma_2$, σ_n і μ_n - коефіцієнти електропровідності і магнітна проникливість матеріалів основи і покриття циліндра.

За знайденою функцією $H_z^{(n)}(r, t)$ питомі густини джоулевих тепловиділень $Q^{(n)}(r, t)$ та пондеромоторної сили $\vec{F}^{(n)} = \{F_r^{(n)}(r, t); 0; 0\}$ в основі і покритті визначаються співвідношеннями:

$$Q^{(n)} = \frac{1}{\sigma_n} \left(\frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} \right)^2, \quad F_r^{(n)} = -\mu_n H_z^{(n)} \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r}. \tag{4}$$

Визначення температурного поля. Температурне поле $T^{(n)}(r, t)$ в основі і покритті циліндра знаходимо з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = - \frac{Q^{(n)}}{\lambda_n} \quad (5)$$

за граничних умов теплоізоляції поверхонь $r = r_0$ і $r = r_2$

$$\frac{\partial T^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} = \frac{\partial T^{(2)}(r_2, t)}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

та умов ідеального теплового контакту на поверхні $r = r_1$ з'єднання основи і покриття

$$T^{(1)}(r_1, t) = T^{(2)}(r_1, t), \quad \frac{\partial T^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} = k_\lambda \frac{\partial T^{(2)}(r_1, t)}{\partial r}, \quad (7)$$

а також нульовій початковій умові $T^{(n)}(r, 0) = 0$. Тут κ_n , λ_n - коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалів складових шарів циліндра, $k_\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$.

Визначення термонапруженого стану. Радіальну компоненту $U_r^{(n)}(r, t)$ вектора переміщень $\vec{U}^{(n)} = \{U_r^{(n)}(r, t); 0; 0\}$ в основі і покритті циліндра визначаємо з рівняння [2]

$$\frac{\partial^2 U_r^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(n)}}{\partial r} - \frac{U_r^{(n)}}{r^2} - \frac{1}{c_n^2} \frac{\partial^2 U_r^{(n)}}{\partial t^2} = \alpha_n \frac{1 + \nu_n}{1 - \nu_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}{E_n(1 - \nu_n)} F^{(n)} \quad (8)$$

за граничних умов

$$\frac{\partial U_r^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} + \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \frac{U_r^{(1)}(r_0, t)}{r_0} = \alpha_1 \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} T^{(1)}(r_0, t), \quad (9)$$

$$\frac{\partial U_r^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \frac{\nu_2}{1 - \nu_2} \frac{U_r^{(2)}(r_2, t)}{r_2} = \alpha_2 \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} T^{(2)}(r_2, t)$$

на поверхнях $r = r_0$ і $r = r_2$ і умов ідеального механічного контакту при $r = r_1$

$$U_r^{(1)}(r_1, t) = U_r^{(2)}(r_1, t), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & (1 - \nu_1) \frac{\partial U_r^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_1 \frac{U_r^{(1)}(r_1, t)}{r_1} - \alpha_1 (1 + \nu_1) T^{(1)}(r_1, t) = \\ & = \frac{E_2(1 - 2\nu_1)}{E_1(1 - 2\nu_2)} \left[(1 - \nu_2) \frac{\partial U_r^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_2 \frac{U_r^{(2)}(r_1, t)}{r_1} - \alpha_2 (1 + \nu_2) T^{(2)}(r_1, t) \right] \end{aligned}$$

та нульових початкових умов

$$U_r^{(n)}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial U_r^{(n)}(r, 0)}{\partial r} = 0. \quad (11)$$

Тут $c_n = \sqrt{E_n(1 - \nu_n) / (\rho_n(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n))}$ - швидкість пружної хвилі розширення; $k_E = E_1 / (1 + \nu_1) / (E_2 / (1 + \nu_2))$; ν_n , α_n - коефіцієнти Пуассона і лінійного теплового розширення, E_n - модуль Юнга, ρ_n - густина матеріалу основи і покриття циліндра. За знайденими функціями $U_r^{(n)}(r, t)$ радіальну $\sigma_{rr}^{(n)}$, колову $\sigma_{\phi\phi}^{(n)}$ і осьову $\sigma_{zz}^{(n)}$ компоненти тензора напружень визначаємо за формулами

$$\sigma_{rr}^{(n)} = \frac{2E_n}{1 - 2\nu_n} \left[(1 - \nu_n) \frac{\partial U_r^{(n)}}{\partial r} + \nu_n \frac{U_r^{(n)}}{r} - \alpha_n (1 + \nu_n) T^{(n)} \right], \quad (12)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(n)} = \frac{2E_n}{1 - 2\nu_n} \left[(1 - \nu_n) \frac{U_r^{(n)}}{r} + \nu_n \frac{\partial U_r^{(n)}}{\partial r} - \alpha_n (1 + \nu_n) T^{(n)} \right], \quad (13)$$

$$\sigma_{zz}^{(n)} = \nu_n (\sigma_{rr}^{(n)} - \sigma_{\phi\phi}^{(n)}) - \alpha_n E_n T^{(n)}. \quad (14)$$

Методика розв'язування сформульованих задач. Для побудови розв'язків сформульованих початково-крайових задач (1) – (4), (5) – (7) і (8) – (14) апроксимуємо ключові функції $H_z^{(n)}(r,t)$, $T^{(n)}(r,t)$, $U_r^{(n)}(r,t)$ за радіальною змінною в основі і покритті циліндра квадратичними многочленами [4]:

$$\Phi^{(n)}(r,t) = \sum_{i=0}^2 a_i^{(n)}(t)r^i. \tag{15}$$

Коефіцієнти $a_i^{(n)}$ апроксимаційних поліномів (15) подаємо у вигляді лінійної комбінації

$$a_i^{(n)}(t) = a_{i1}^{(n)}\Phi_1(t) + a_{i2}^{(n)}\Phi_2(t) + a_{i3}^{(n)}\Phi^+(t) + a_{i4}^{(n)}\Phi^-(t) + a_{i5}^{(n)}\Phi_0(t) \tag{16}$$

граничних значень $\Phi^\pm(t)$ шуканих функцій на поверхнях $r = r_0$, $r = r_2$ і $r = r_1$ та сумарних по основі і покритті циліндра інтегральних характеристик

$$\Phi_s(t) = \sum_{n=1}^2 \int_{r_{n-1}}^{r_n} \Phi^{(n)}(r,t)r^{s+l} dr, \quad s = 1,2 \tag{17}$$

ключових функцій $\Phi^{(n)}(r,t)$. Рівняння на інтегральні характеристики $\Phi_s(t)$ отримуємо, інтегруючи рівняння (3), (6), (9) згідно формули (17). Тоді початково-крайові задачі стосовно ключових функцій зводяться до задач Коші на інтегральні характеристики. Розв'язки задач Коші отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа на всьому числовому інтервалі нестационарної електромагнітної дії [4].

Числовий аналіз задачі за дії ЕМІ. Дію ЕМІ математично описуємо функцією [3]

$$H_z^\pm(t) = kH_0(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}). \tag{18}$$

Тут k – нормувальний коефіцієнт, H_0 – максимальне значення напруженості магнітного поля на поверхнях β_1 і β_2 – параметри, що відповідають часам фронтів наростання $\tau_{ф.н.}$ і спадання $\tau_{ф.с.}$ імпульсу. Підставляючи (18) замість граничних умов (1) у розв'язки задачі термомеханіки для двошарового електропровідного порожнистого циліндра, отримуємо розв'язок цієї задачі за дії ЕМІ. Основа виготовлена зі сталі Х18Н9Т, покриття – з міді. Числовий аналіз даної задачі виконано для електропровідного циліндра з покриттям з радіусами поверхонь $r_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $r_1 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $r_2 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Тривалість імпульсу t_i приймалась рівною $\tau_i = 10^{-4} \text{ с}$. Параметри β_1 і β_2 вибирались таким чином, що $\tau_{ф.н.}/\tau_{ф.с.} \approx 0.1$.

На рис.1–6 показано зміну в часі радіальної компоненти $F_r^{(n)}(r,t)$ вектора пондеромоторної сили і температури $T^{(n)}(r,t)$, радіальної $\sigma_{rr}^{(n)}$ і колової $\sigma_{\phi\phi}^{(n)}$ компонент тензора динамічних напружень, зумовлених дією пондеромоторної сили і джоулевым теплом посередині шарів основи і покриття. Лінії 1, 2 на рисунках відповідають значенням величин в основі і покритті відповідно. Отримано, що термонапружений стан даного циліндра за вибраних параметрів електромагнітної дії в основному визначається напруженнями, зумовленими джоулевым теплом.

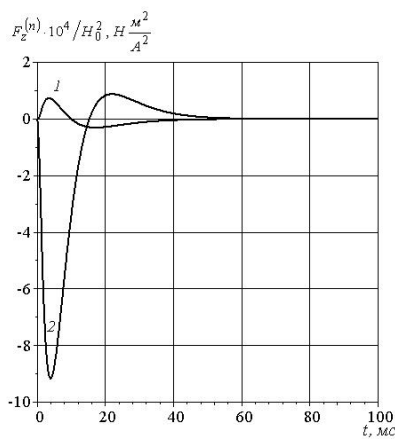


Рис. 1. Зміна в часі пондеромоторної сили

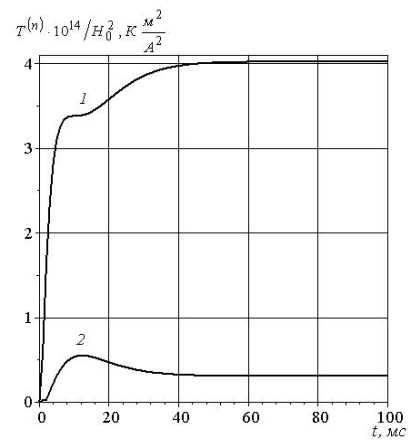


Рис. 2. Зміна в часі температурного поля

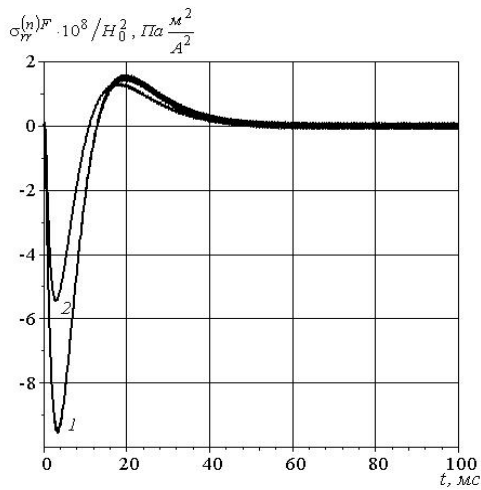


Рис. 3. Зміна в часі складників радіальних напружень, зумовлених дією пондеромоторної сили

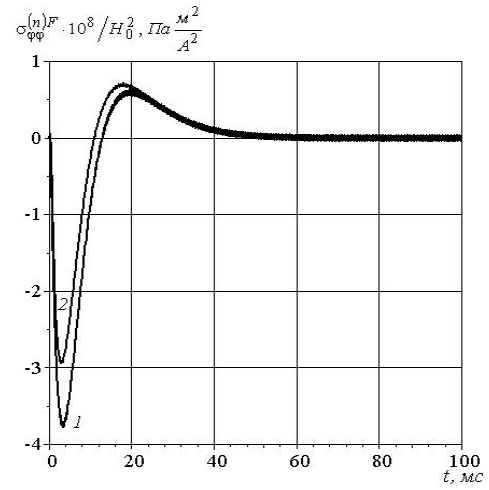


Рис. 4. Зміна в часі складників колових напружень, зумовлених дією пондеромоторної сили

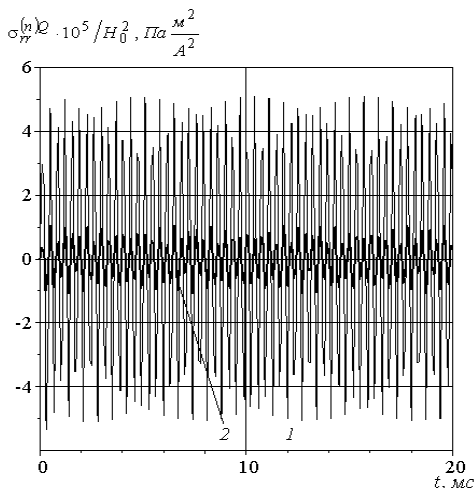


Рис. 5. Зміна в часі складників радіальних напружень, зумовлених дією джоулевого тепла

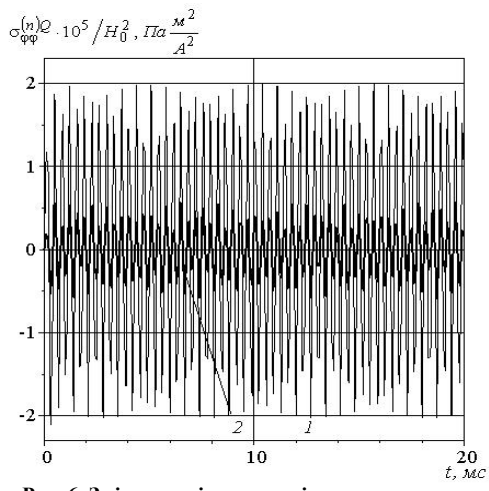


Рис. 6. Зміна в часі складників колових напружень, зумовлених дією джоулевого тепла

Висновки

Вплив мідного покриття проявляється в зростанні максимальних значень всіх величин порівнянно з такими ж значеннями для аналогічного сталевого циліндра без покриття, а також у тому, що радіальні напруження, зумовлені як пондеромоторною силою, так і джоулевым теплом, у циліндрі з покриттям стають приблизно вдвічі більшими за колові напруження.

Список використаної літератури

1. Батыгин Ю.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю.В. Батыгин, В.И. Лавинский, Л.Т. Хищенко. — Харьков: МОСТ-Торнадо, 2003. — 288с.
2. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика. / Я. Подстригач, Ю. Коляно. — К.: Наукова думка, 1976. — 310 с.
3. Гачкевич О.Р. Термомеханика неферромагнитных электропроводных тел за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. / О.Р. Гачкевич, Р.С. Мусій, Д.В. Тарлаковський. — Львів: СПОЛОМ, 2011. — 216 с.
4. Мусий Р.С. Термонапряженное состояние и несущая способность биметаллических цилиндров при импульсных электромагнитных воздействиях / Р.С. Мусий, Н.Б. Мельник, Р.Ф. Терлецкий, И.И. Шимчак // Теоретическая и прикладная механика. — 2013. — № 6 (52). — С. 89—98.