

УДК 532.5

О.Г. ГОМАН, В.А. КАТАН

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛА И ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛОВ В СМЫСЛЕ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ ПО АДАМАРУ

В работе для определения распределенных и суммарных гидродинамических характеристик твердого тела при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости в условиях возникновения отрыва для полученных расходящихся интегралов предлагается метод расчета с использованием формул Адамара – Манглера.

Ключевые слова: удар, отрыв течения, формулы Адамара - Манглера, вертикальная пластинка.

О.Г. ГОМАН, В.О. КАТАН

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УДАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛА І РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕГРАЛІВ В СЕНСІ СКІНЧЕНОЇ ЧАСТИНИ ЗА АДАМАРОМ

В роботі для визначення розподілених та сумарних гідродинамічних характеристик твердого тіла при ударній взаємодії твердого тіла та рідини в умовах виникнення відриву для отриманих розбіжних інтегралів запропоновано метод розрахунку з використанням формул Адамара-Манглера.

Ключові слова: удар, відрив течії, формули Адамара-Манглера, вертикальна пластинка.

O.G. GOMAN, V.A. KATAN

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

THE MATHEMATICAL MODEL OF THE IMPACT INTERACTION OF A BODY AND A LIQUID WITH A FREE SURFACE USING THE HADAMARD INTEGRALS

In this paper the method for definition of the distributed and total hydrodynamic characteristics at the impact interaction of a solid and a liquid with the starting point of separation for obtained divergent integrals is obtained using Hadamard – Manglera formulas.

Keywords: impact, separation of flow, Hadamard-Manglera formulas, vertical plate.

Постановка проблемы

В предыдущей работе [1] обоснован подход к математическому моделированию рабочего элемента рулевого устройства, как тонкой пластины, находящейся на свободной поверхности жидкости и подверженной ударным воздействиям. В данной работе представлены результаты математического моделирования распределенных и суммарных гидродинамических характеристик рабочего элемента рулевого устройства в виде вертикальной пластинки.

Анализ последних исследований и публикаций

Актуальный анализ и библиография по тематике работы указаны в работе авторов [1,2,3].

Формулирование цели исследования

Цель работы заключается в построении математической модели для определения распределенных и суммарных характеристик рабочего элемента рулевого устройства в виде вертикальной пластинки. При ее ударном взаимодействии с жидкостью со свободной поверхностью в условиях возникновения инерционного отрыва течения жидкости.

Изложение основного материала исследования

Подробная физическая постановка задачи удара пластинки с отрывом приведена в работе авторов [1]. Поэтому приведем только основные положения, которые использованы в данной работе.

На рис.1 представлена схема к постановке задачи, из которой следует, что после удара пластинка получает только компоненту скорости вдоль оси Ox , а также угловую скорость вокруг оси, перпендикулярной плоскости Oxy , и на задней стороне пластинки BD образуется зона отрыва BC , которая распространяется от точки B на свободной поверхности сзади пластинки до некоторой точки C .

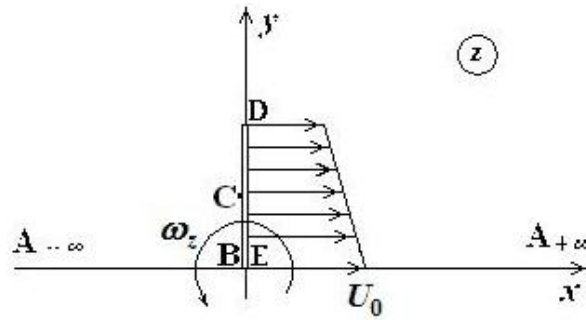


Рис. 1. Схема к постановке задачи удара пластинки с отрывом

Комплексный потенциал, который описывает возникшее в результате удара течение жидкости имеет вид:

$$w = \varphi(z) + i\psi(z),$$

где $\varphi(z)$ – потенциал течения; $\psi(z)$ – функция тока.

Скорость тела в результате удара выражается следующим соотношением:

$$\vec{V} = (V_0 + \omega_z x)\vec{j},$$

где V_0 – поступательная скорость; ω_z – угловая скорость тела.

Условие безотрывности течения распространяется только на участок контура EDC и имеет вид:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{EDC} = \vec{V} \cdot \vec{n}, \text{ или } v_x = V_0 - \omega_z y$$

А для участков ED и DC будет выполняться равенство $\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = U_0 - \omega_z y$, откуда

$\psi = U_0 y - \omega_z \frac{y^2}{2} + C_0$. При этом константу C_0 положим равной нулю, а на свободных границах вдоль оси Ox (участках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$), а также на участке отрыва CB имеем условие равенства нулю импульсного давления, то есть $\varphi = 0$.

После определения положения точки отрыва – параметра q , например, из принципа Огазо [1], распределение импульсного давления на поверхности твердого тела находится по формуле:

$$p_t = -\rho \varphi(\xi_0), \quad \xi_0 \in (-q, 1),$$

где ρ – плотность жидкости; потенциал $\varphi(\xi_0)$ определяется из краевой задачи теории аналитических функций, решение которой может быть представлено в виде квадратур [1]:

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi i} Z(t) \int_{-q}^b Z^{-1}(\xi) \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi, \quad (1)$$

и далее все необходимые интегралы $J_k(\xi_0)$, $k = \overline{1, 2}$ [1] определяются численно, как интегралы в смысле Коши при выбранном значении q по стандартной процедуре [1, 3-6].

Для пересчета распределения импульсного давления и других распределенных гидродинамических параметров в координатах в физической плоскости физические координаты соответствующих точек определяются при помощи конформного отображения:

$$x(\xi_0) = \text{Re } F(\xi_0) = u(\xi_0), \quad y(\xi_0) = \text{Im } F(\xi_0) = v(\xi_0).$$

Для определения присоединенных масс вводим единичные потенциалы

$$\varphi = U_0 \varphi_1 + V_0 \varphi_2 + \omega_z \varphi_6,$$

и соответствующие им функции тока

$$\psi = U_0 \psi_1 + V_0 \psi_2 + \omega_z \psi_6.$$

Формула для присоединенных масс в случае плоского течения имеет вид [3]:

$$\lambda_{ik} = -\rho \int_C \varphi_i d\psi_k, \quad (2)$$

при этом контур C обходится против движения часовой стрелки, а во вспомогательной плоскости это будет интегрирование по верхнему берегу разреза вдоль отрезка $\xi \in (-q, b)$ от точки $\xi = b$ до точки $\xi = -q$.

Интегрирование в (2) может быть осуществлено по любой подходящей квадратурной формуле, при этом значения единичных потенциалов функций $\varphi_i(\xi_0)$, $i = \overline{1,3}$, в узлах квадратурной формулы вычисляются согласно (1).

Поле скоростей внутри области, занятой жидкостью, вычисляется согласно выражению:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = i \frac{d\Theta}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}, \tag{3}$$

где $\frac{dz}{dt} = F(t)$ – производная от функции конформного преобразования.

Для определения компонентов скорости на участке безотрывного обтекания поверхности контура в общем случае, когда вычисление квадратур в интегралах $J_k(t)$, $k = \overline{1,2}$ в замкнутом виде не удастся осуществить, в данной работе было найдено целесообразным применять следующую схему расчета: нормальную компоненту скорости v_n на участке безотрывного обтекания контура СВ считать известной из граничного условия, а для определения касательной компоненты v_s использовать операцию дифференцирования по дуге контура.

Поскольку все интегралы $J_k(\xi_0)$, $k = \overline{1,2}$ являются интегралами в смысле главного значения по Коши и численно вычисляются по стандартным процедурам, производные $\frac{\partial J_k(\xi_0)}{\partial \xi_0}$, $k = \overline{1,2}$ представляют

собой сингулярные интегралы, которые также следует понимать в смысле конечной части по Адамару. Следовательно, описанный алгоритм решения позволяет при известной аналитической функции $z = F(t)$, которая реализует конформное отображение области течения на верхнюю полуплоскость вспомогательной плоскости комплексной переменной t , получить в виде (1) решение задачи об ударном взаимодействии цилиндрического тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости для произвольного набора кинематических параметров в условиях образования одной зоны отрыва с заранее неизвестным параметром q , определяющим положение зоны отрыва.

После определения параметра q из общего решения (1) находим распределение потенциала и импульсного давления, из соотношения (2) – значения присоединенных масс, а также распределение скорости как по поверхности тела так, и на свободной поверхности согласно (3).

На рис. 2 показано распределения компонент скорости при значении кинематического параметра $\Lambda = 0$.

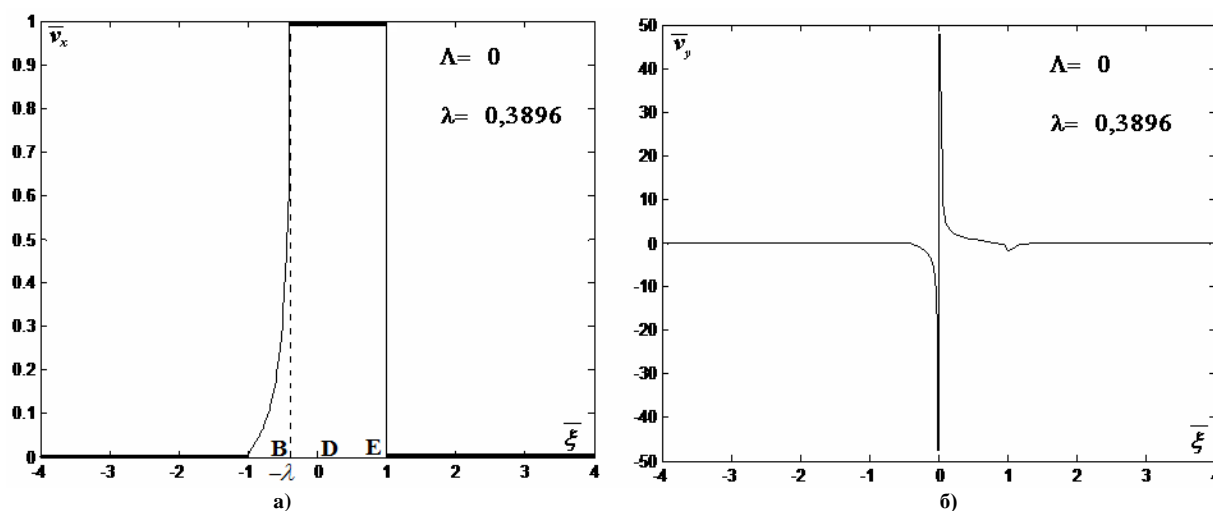


Рис. 2. Распределение компонент скорости: а) $\bar{v}_x(\bar{\xi})$; б) $\bar{v}_y(\bar{\xi})$.

Для распределения компоненты скорости $\bar{v}_y(\bar{\xi})$ характерны существенные различия при максимальных значениях на отдельных участках оси ξ , которые рассмотрены более детально. На свободной поверхности сзади пластинки при $\xi \in (-\infty, -b)$ и перед пластинкой при $\xi \in (b, +\infty)$ распределение $\bar{v}_y(\bar{\xi})$ имеет вид, показанный на рис. 3.

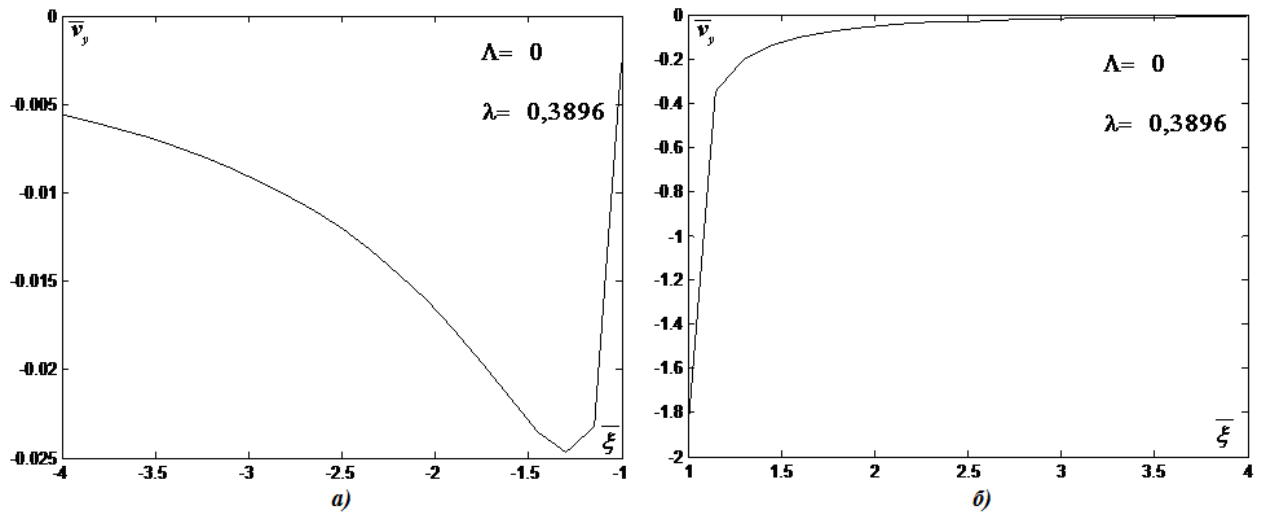


Рис. 3. Распределение вертикальной скорости $\bar{v}_y(\bar{\xi})$ по свободной поверхности: а) за пластинкой; б) перед пластинкой

В отрывной зоне на задней стороне пластинки при $\xi \in (-b, -q)$ компонента скорости $\bar{v}_y(\bar{\xi})$ сохраняет постоянное нулевое значение.

В зоне безотрывного обтекания на задней стороне пластинки при $\xi \in (-q, 0)$ и на передней стороне при $\xi \in (0, b)$ распределение составляющей скорости $\bar{v}_y(\bar{\xi})$ имеет вид, показанный на рис. 4. В точке $\xi = 0$, которая соответствует в физической плоскости погруженному краю пластинки – точке D – происходит разворот течения, и компонента скорости $\bar{v}_y(\bar{\xi})$ имеет особенность и меняет знак.

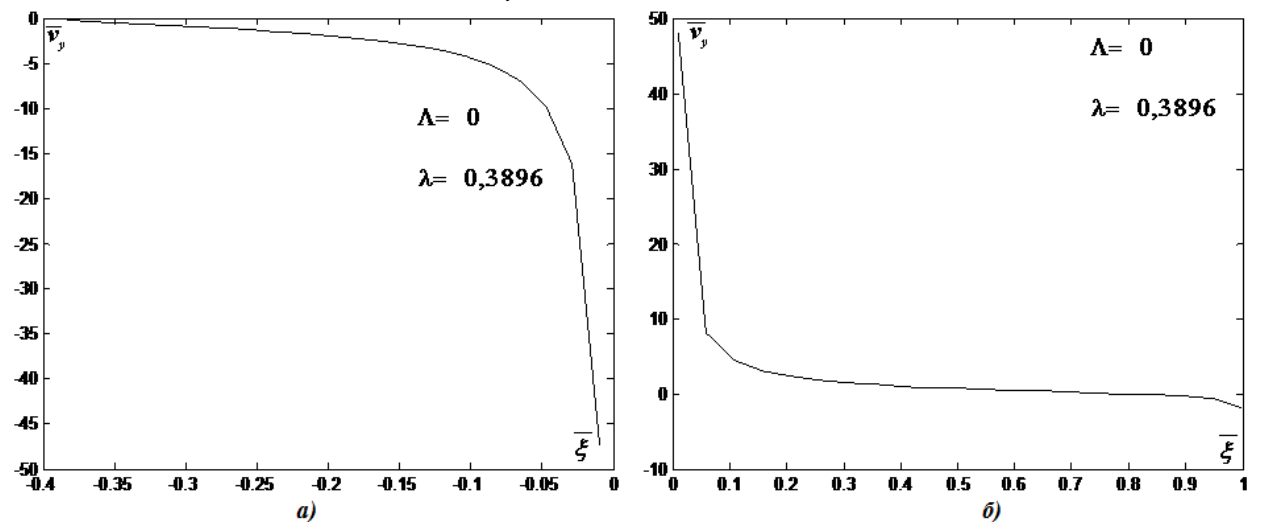


Рис. 4. Распределение скорости жидкости $\bar{v}_y(\bar{\xi})$ вдоль поверхности пластинки: а) на задней стороне; б) на передней стороне

Значения коэффициентов присоединенных масс в зависимости от характерных значений кинематического параметра Λ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Λ	$\bar{\lambda}_{11}$	$\bar{\lambda}_{16}$	$\bar{\lambda}_{66}$
-10	0,3570	-0,1931	0,1164
-5	0,3570	-0,1931	0,1164
-1	0,3570	-0,1931	0,1164
-0,5	0,3570	-0,1931	0,1164
0	0,3570	-0,1931	0,1164
0,5	0,3570	-0,1931	0,1165
1	0,3595	-0,1958	0,1197
1,3	0,3806	-0,2138	0,1349

На рис.5 показано распределение импульсного давления по поверхности пластинки при значении кинематического параметра $\Lambda = 0$.

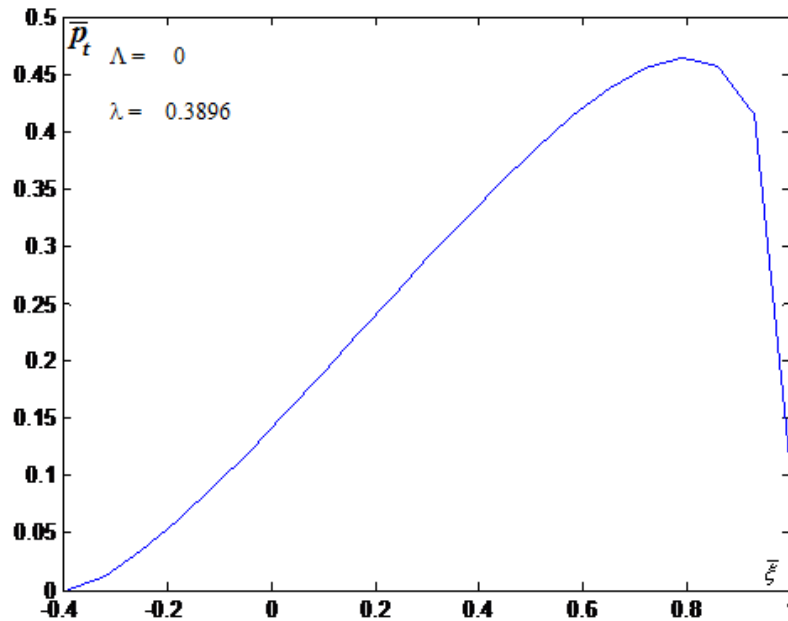


Рис. 5. Распределение импульсного давления по верхности пластинки

Таким образом, проведенные расчеты распределения компонент скорости жидкости, импульсного давления по поверхности пластинки, а также значений коэффициентов присоединенных масс в зависимости от характерных значений кинематического параметра Λ полностью согласуются с соответствующими значениями этих распределенных и суммарных гидродинамических характеристик, полученными после аналитического решения исходной поставленной задачи [1].

Выводы

Построена математическая модель для определения распределенных и суммарных гидродинамических характеристик рабочего элемента рулевого устройства в виде вертикальной пластинки при ее ударном взаимодействии с жидкостью со свободной поверхностью в условиях возникновения инерционного отрыва течения жидкости. Сравнение с соответствующими значениями этих распределенных и суммарных гидродинамических характеристик, полученными после аналитического решения исходной поставленной задачи позволяет сделать вывод в пользу применимости предложенного подхода к определению характеристик отрывных зон при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости.

Список использованной литературы

1. Гоман О.Г. Использование интегралов в смысле конечной части по Адамару в математическом моделировании ударного взаимодействия тела и жидкости со свободной поверхностью / О.Г. Гоман, В.А. Катан //Вестник Херсонского национального технического университета. – 2015. – №3 (54). – С. 27- 31.
2. Норкин М.В. Смешанные задачи гидродинамического удара / М.В. Норкин. – Ростов-на-Дону, 2007. – 136 с.
3. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. / Л.И. Седов – М.: Наука. – 1980. – 448 с.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили – М.: Наука. – 1966. –707с.
5. Общая теория аэродинамики больших скоростей под редакцией У.Р. Сирса – М.: Воениздат. – 1962. – 300 с.
6. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа/ Ж.Адамар – М.: Наука. – 1978. – 352 с.