УДК 517.958:536.2

В.П. ЛЯШЕНКО, Е.Б. КОБИЛЬСКАЯ
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
О.П. ДЕМЬЯНЧЕНКО
Азовский морской институт Одесской национальной морской академии

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ ИСТОЧНИКОВ

В работе рассмотрена математическая модель температурного поля в сферической области с импульсными условиями теплообмена с окружающей средой. Рассмотрены модели нагрева и охлаждения области. Решение нелинейной начально-краевой задачи сведено к решению интегрального уравнения типа Гаммерштейна

Ключевые слова: краевая задача, сферическая область, импульсный источник тепла

V.P. LYASHENKO, E.B. KOBILSKAYA
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University
O.P. DEMYANCHENKO
Mariupol, Azov maritime institute of National university "Odessa maritime academy"

MODELING OF HEAT DISTRIBUTION IN THE SPHERICAL AREA UNDER THE INFLUENCE IMPULSIVE HEAT SOURCES

A mathematical model of the temperature field in spherical area with impulsive conditions of heat exchange with the environment is considered in the work. Models heating area and the cooling area are considered in the work. The solution of the nonlinear initial boundary value problem is reduced to the solution of the integral equation of Hammerstein type

Key words: boundary value problem, spherical area, impulsive heat sources

В.П. ЛЯШЕНКО, О.Б. КОБИЛЬСЬКА
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
О.П. ДЕМ’ЯНЧЕНКО
Азовський морський інститут Національного університету "Одеська морська академія"

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОШИРЕННЯ ТЕПЛА У СФЕРИЧНІЙ ОБЛАСТІ ПІД ДІЄЮ ІМПУЛЬСНИХ ДЖЕРЕЛ

У роботі розглянута математична модель температурного поля у сферичній області з імпульсними умовами теплообміну з навколишнім середовищем. Розглянуто моделі нагріву і охолодження області. Розв'язок нелінійної початково-крайової задачі зведено до розв'язання інтегрального рівняння типу Гаммерштейна

Ключові слова: крайова задача, сферична область, імпульсне джерело тепла

Постановка проблемы

Исследование процессов теплообмена, как правило, связано с проведением натурных экспериментов по измерению температуры и теплофизических параметров поверхности и внутренних областей исследуемого объекта. Поэтому информацию о температурном поле получают из ограниченного множества точек наблюдения, расположенных внутри или на поверхности исследуемого объекта[1]. Учитывая данные наблюдений, на основе математической модели, путём решения прямой или обратной задачи теплопроводности, определяются температурные распределения, восстанавливаются параметры теплового процесса [2].

В астрофизике и геофизике одной из важных задач есть задача моделирования температурного поля $U = U(r, \theta, \varphi, t)$ во вращающемся с угловой скоростью $\omega = const$ шаре $r \le R$, когда направление теплового потока интенсивностью $q = const$ ортогонально оси вращения. С математической точки зрения большинство космических объектов можно рассматривать как шары, – тела, ограниченные сферой.

Формулировка цели работы

Целью работы является построение математической модели температурного поля сферической области с импульсными условиями теплообмена с окружающей средой.

Изложение основного материала исследования

Рассмотрим температурное поле планеты или астероида, облучаемого тепловым потоком со стороны звезды. Предположим, что на облучаемой поверхности имеет место теплообмен по закону Ньютона, а на не облучаемой – по законам Ньютона и Стефана-Больцмана. Тогда для определения температуры шара $U(r,\theta,\varphi,t)$ получаем следующую нелинейную начально-краевую задачу в области $\Omega\times t=\{0<r<R, 0<\theta<\pi, 0<\phi<2\pi, t>0\}$

$$\Delta U-\frac{1}{a^2}U_t=0,\qquad 0<r<R,\quad 0<\theta<\pi,\quad 0<\phi<2\pi,\quad t>0$$

$$U(r,\theta,\phi,0)=U_0=const,\quad U(r,\theta,\phi,t)=U(r,\theta,\phi+2\pi,t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}+h_2U\Big|_{r=R}=\begin{cases}\left(h_2U_c+\frac{q}{\lambda}\sin\theta\sin\phi\right)f(z) & 0<\theta<\pi,\ \omega t<\phi<\omega t+\pi\\ \left((h_2-h_1)U+h_1U_c+\kappa\left(U_c^4-U^4\right)\right)f(z) & 0<\theta<\pi,\ \omega t+\pi<\phi<\omega t+2\pi\end{cases}. \tag{1}$$

Здесь: Δ – оператор Лапласа в сферической системе координат; $a^2=\frac{\lambda}{c\rho}$, $h_i=\frac{\alpha_i}{\lambda}$, $\kappa=\frac{\xi\sigma}{\lambda}$, λ – коэффициент теплопроводности, c – теплоемкость, ρ – плотность, α_i – коэффициент теплообмена, σ – постоянная Стефана-Больцмана, ξ – степень черноты поверхности шара, U_c – температура охлаждающей среды, R – радиус шара, $f(z)$ – периодическая безразмерная кусочно- монотонная функция.

Решение задачи ищем в виде решения эквивалентного интегрального уравнения типа Фредгольма по угловым координатам $0<\varphi<2\pi$ и $0<\theta<\pi$ и типа Вольтерра по времени для $t>0$. Перейдем к сферическим координатам воспользовавшись второй формулой Грина и проинтегрировав по r, получим

$$\int_0^{\tau+0}\int_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}V\left(\Delta U-\frac{1}{a^2}U_t\right)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\,dt=$$

$$=\int_0^{\tau+0}\int_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}V\,\Delta U r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\,dt-\frac{1}{a^2}\int_0^{\tau+0}\int_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}V\,U_t r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\,dt,$$

Составим разность

$$\int_0^{\tau+0}\int_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\left[V\left(\Delta U-\frac{1}{a^2}U_t\right)-U\left(\Delta V+\frac{1}{a^2}V_t\right)\right]r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\,dt=$$

$$=\int_0^{\tau+0}\int_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi}\left(V\frac{\partial U}{\partial r}-U\frac{\partial V}{\partial r}\right)\Bigg|_0^R R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dt-\frac{1}{a^2}\int_0^{\tau+0}\int_{\omega t}^{\omega t+2\rho}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(UV)_t'\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\,dt.$$

Получаем искомую вторую формулу Грина

$$\int_0^{\tau+0}\int_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\left[V\left(\Delta U-\frac{1}{a^2}U_t\right)-U\left(\Delta V+\frac{1}{a^2}V_t\right)\right]r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\,dt=$$
$$=\int_0^{\tau+0}\int_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi}\left[V\left(\frac{\partial U}{\partial r}-h_2U\right)-U\left(\frac{\partial V}{\partial r}-h_2V\right)\right]_{r=R}R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dt- \tag{2}$$
$$-\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\int_0^{R}(UV)\Big|_0^{\tau+0}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta.$$

Кроме формулы Грина для решения задачи введем также функцию Грина $G=G(r,\theta,\phi,t)$. Ее можно получить как решение сопряженной задачи

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{r,\theta,\phi}G+\frac{1}{a^2}G_t=-\delta(r-\rho)\delta(\theta-\xi)\delta(\phi-\psi)\delta(t-\tau),\\
&0<r,\rho<R,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\phi<2\pi,\quad t,\tau>0\\
&G=0,\qquad t>\tau;\ G<\infty,\ r=0\\
&G_r+h_2G\big|_{r=R}=0\quad,\qquad G\big|_{\phi+2\pi}=G\big|_{\phi}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь: $\delta(r-\rho)$, $\delta(\theta-\varsigma)$, $\delta(\phi-\psi)$ - дельта-функции Дирака в сферической системе координат.

Полагая в (2) $V=G$ и учитывая (1) и (3), получаем искомое интегральное уравнение относительно $W(\theta,\varphi,t)$, когда $0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi,\ \ t>0$.

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^{\tau+0}\int\limits_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{R}G\cdot 0+U\,\delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(\phi-\psi)\delta(t-\tau)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\,dt=\\
&=\int\limits_0^{\tau+0}\int\limits_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[G\left(f(z)(h_2U_c+\frac{q}{\lambda}\sin\theta)\right)\right]\Bigg|_{r=R}R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dt+\\
&+\int\limits_0^{\tau+0}\int\limits_{\omega t}^{\xi t+2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[G\left(\left((h_2-h_1)U+h_1U_c+\kappa\left(U_c^4-U^4\right)\right)f(z)\right)\right]\Bigg|_{r=R}R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dt+\\
&+\frac{1}{a^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{R}U_0G(r,\rho;\theta,\zeta;\phi-\psi;0-\tau)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi.
\end{aligned}
$$

Откуда

$$
\begin{aligned}
&U(\rho;\zeta;\psi;\tau)=U_л(\rho;\zeta;\psi;\tau)-\\
&-\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\omega t}^{\omega t+2\pi}\int\limits_0^{\pi}G(R,\rho;\theta-\zeta;\varphi-\psi;t-\tau)\left[(h_1-h_2)W+\kappa W^4\right]R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dt,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&U_л(\rho,\zeta,\psi,\tau)=\frac{U_0}{a^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{R}G(r,\rho;\theta-\zeta;\phi-\psi;0-\tau)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi+\\
&+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\omega t}^{\omega t+\pi}\int\limits_0^{\pi}G(R,\rho;\theta-\zeta;\phi-\psi;t-\tau)\left(h_2U_c+\frac{q}{\lambda}\sin\theta\right)f(z)R_2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dt+\\
&+\left(h_1U_c+\kappa U_c^4\right)f(z)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi}\int\limits_0^{\pi}G(R,\rho;\theta-\zeta;\phi-\psi;t-\tau)R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dt.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Обозначив

$$
\begin{aligned}
&U(R,\theta,\phi,t)=W(\theta,\phi,t);\ G(\rho;\theta-\zeta;\phi-\psi;t-\tau)=R^2G(R,\rho;\theta-\zeta;\phi-\psi;t-\tau),\\
&G(\theta-\zeta;\phi-\psi;t-\tau)=G(R;\theta-\zeta;\phi-\psi;t-\tau);\ \left(h_1-h_2+\kappa W^3\right)W=\varPhi\left[W(\theta,\phi,t)\right],
\end{aligned}
$$

получим распределение температуры на поверхности шара в виде

$$
W(\zeta,\psi,\tau)=W_л(\xi;\psi;\tau)-\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi}\int\limits_0^{\pi}G(\theta-\zeta;\phi-\psi;t-\tau)\varPhi\left[W(\theta,\phi,t)\right]\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dt\,. \tag{6}
$$

По найденному значению $W(\zeta;\phi;\tau)$ из (6) можно квадратурой (4) найти температуру в любой точке шара.

Функцию Грина - решение задачи (3), ищем в виде

$$
G(r,\rho;\theta,\zeta;\phi-\psi;t-\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}g_{jc}(r,\theta,t)\cos j\phi+g_{js}(r,\theta,t)\sin j\phi\,.
$$

Условию периодичности $G\big|_{\phi+2\pi} = G\big|_{\phi}$ она удовлетворяет, причем j – целое, $j=\overline{0,\infty}$. Подставив предполагаемую форму решения в уравнение задачи (3), определим функции $g_{jc}(r,\theta,t)$ и $g_{js}(r,\theta,t)$.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\Delta_{r,\theta}-\frac{j^2}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(g_{j,c}(r,\theta,t)\cos j\phi+g_{j,s}(r,\theta,t)\sin j\phi\right)=-\delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(\phi-\psi)\delta(t-\tau).$$

Умножим обе части полученного равенства на $\cos k\varphi$ и проинтегрируем по φ в пределах от 0 до 2π. Затем поступим так же, предварительно умножив равенство на $\sin k\varphi$, получим

$$\int_0^{2\pi}\cos k\phi\sum_{j=0}^{\infty}\left(\Delta_{r,\theta}-\frac{j^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(g_{j,c}(r,\theta,t)\cos j\phi+g_{js}(r,\theta,t)\sin j\phi\right)d\phi=$$
$$=-\delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(t-\tau)\int_0^{2\pi}\cos k\phi\delta(\phi-\psi)d\phi,$$
$$\int_0^{2\pi}\sin k\phi\sum_{j=0}^{\infty}\left(\Delta_{r,\theta}-\frac{j^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(g_{jc}(r,\theta,t)\cos j\phi+g_{js}(r,\theta,t)\sin j\phi\right)d\phi=$$
$$=-\delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(t-\tau)\int_0^{2\pi}\sin k\phi\delta(\phi-\psi)d\phi,$$
$$\begin{cases}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\Delta_{r,\theta}-\frac{j^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\pi g_{jc}(r,\theta,t)=-\cos j\psi\,\delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(t-\tau)\\ \sum_{j=0}^{\infty}\left(\Delta_{r,\theta}-\frac{j^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\pi g_{js}(r,\theta,t)=-\sin j\psi\,\delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(t-\tau)\end{cases}.$$

Пусть $g_{jc}(r,\theta,t)=\frac{1}{\pi}\overline{g}_{jc}(r,\theta,t)\cos j\psi,\qquad g_{js}(r,\theta,t)=\frac{1}{\pi}\overline{g}_{js}(r,\theta,t)\sin j\psi$, тогда

$$\begin{cases}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\Delta_{r,\theta}-\frac{j^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\overline{g}_{jc}(r,\theta,t)=-\delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(t-\tau)\\ \sum_{j=0}^{\infty}\left(\Delta_{r,\theta}-\frac{j^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\overline{g}_{js}(r,\theta,t)=-\delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(t-\tau),\end{cases}$$

Откуда следует, что $\overline{g}_{jc}(r,\theta,t)=\overline{g}_{js}(r,\theta,t)=\overline{g}_{j}(r,\theta,t)$.

Тогда выражение для функции Грина G имеет вид

$$G=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}(\overline{g}_j(r,\theta,t)\cos j\psi\,\cos j\phi+\overline{g}_j(r,\theta,t)\sin j\psi\,\sin j\phi)\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\cos j(\phi-\psi)\,\overline{g}_j(r,\theta,t),$$ где

$\overline{g}_j(r,\theta,t)$ решение уравнения

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{j^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\overline{g}_j(r,\theta,t)=$$
$$=-\delta(r-\rho)\delta(\theta-\zeta)\delta(t-\tau). \tag{7}$$

После преобразований получим функцию Грина в виде

$$G\left(r,\rho;\theta,\zeta;\phi-\psi;t-\tau\right)=\eta\left(\tau-t\right)\frac{a^2}{\pi R^2}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}r\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\rho\right)P_{nj}\left(\cos\theta\right)P_{nj}\left(\cos\zeta\right)\cos j\left(\phi-\psi\right)}{\frac{\sqrt{r\rho}}{2n+1}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}\left(1+\frac{\left(h_2R-n-1\right)\left(h_2R+n\right)}{\mu_{nm}}\right)J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{nm}\right)}e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2(t-\tau)}. \tag{8}$$

В результате преобразований уравнения (4) и (6) превращаются в нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна, которое решается численными методами

$$U\left(\rho,\zeta,\psi,\tau\right)=U_л\left(\rho,\zeta,\psi,\tau\right)-$$
$$\frac{a^2}{\pi\sqrt{R}}\int_0^T\int_{\omega t+\pi}^{\omega t+2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}{}'\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\rho\right)P_{nj}\left(\cos\theta\right)\cos j\left(\phi-\psi\right)\,\Phi\left(W\right)}{\frac{\sqrt{\rho}}{2n+1}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}\frac{\left(h_2R-n-1\right)\left(h_2R+n\right)}{\mu^2_{nm}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{nm}\right)}\times$$
$$\times e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2\left(t'-\tau'\right)}\cdot\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2T}}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2T}-1} & t'<\tau' \\ \dfrac{1}{e^{a^2\left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2T}-1} & t'>\tau'\end{array}\right\}\times\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dt.$$

Выводы

Предложен алгоритм численно – аналитического решения начально-краевой задачи определения температурного поля сферической области со сложными граничными условиями. В результате интегральных преобразований начально-краевые задачи для уравнений теплопроводности преобразованы в нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна и соответствующую квадратуру для определения периодического квазистационарного температурного поля.

Список использованной литературы

1. Weill A., Shitzer A., Baryoseph P. (1993): Finite element analysis of the temperature field around two adjacent cryo-probes. J. Biomech. Eng. 115, 374 – 379.
2. Lyashenko V., Kobilskaya E., Control of heat source in a heat conduction problem”, in Application of Mathematics in technical and Natural Sciences (AMiTaNS’14), AIP CP, edited by Michail D. Todorov, American Institute of Physics, Melville, NY, 2014, pp. 651-654.