

УДК 519.3

А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могили

И.А. АСТИОНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

**ГАУССОВА КРИВИЗНА СЕРЕНДИПОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
ИЛИ КАК ПРОГНУТЬ КОНОИД**

В работе на примере конечного элемента биквадратичной интерполяции показана роль гауссовой кривизны поверхностей базисных функций и её влияние на интегральные характеристики конечного элемента. Новые модели получены путём усовершенствования классических методов Уачспресса и Тейлора.

Ключевые слова: серендипов конечный элемент, базисные функции, коноид, гиперболический параболоид.

А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморський національний університет імені Петра Могили

І.О. АСТІОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

ГАУССОВА КРИВИНА СЕРЕНДИПОВИХ ПОВЕРХОНЬ АБО ЯК ПРОГНУТИ КОНОІД

У роботі на прикладі скінченного елемента біквадратичної інтерполяції показана роль гауссової кривини поверхонь базисних функцій та її вплив на інтегральні характеристики скінченного елемента. Нові моделі отримані шляхом удосконалення класичних методів Уачспресса і Тейлора.

Ключові слова: серендипів скінченний елемент, базисні функції, коноїд, гіперболічний параболоїд.

A.N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

I.A. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

GAUSSIAN CURVATURE OF SERENDIPITY SURFACES OR HOW TO DEFLECT CONOID

By the example of finite element of biquadratic interpolation the role of Gaussian surface curvature of basis functions as well as its influence on integral characteristics of finite element are shown. The new models are received by means of improvement of classic methods of Wachspress and Taylor.

Key words: serendipity finite element, basis functions, conoid, hyperbolic paraboloid.

Введение

Статья посвящена анализу явления физической неадекватности интегральных характеристик серендиповых моделей конечных элементов (КЭ). Этот недостаток наблюдается на всех (без исключения) серендиповых КЭ высших порядков. Однако, в монографической литературе по МКЭ этому явлению практически не уделяют должного внимания. Нам известна только одна книга [1], в которой приведены естественные спектры узловых нагрузок от силы тяжести серендиповых элементов второго и третьего порядков. При этом автор [1] советует читателю смириться с аномальными свойствами стандартных серендиповых КЭ, поскольку в математическом обеспечении МКЭ не существует иных интерполяционных базисов. Иллюзия единственности была развеяна в 1982 г. [2], когда удалось найти альтернативные базисы на КЭ третьего порядка. Оказалось, что источником физической неадекватности серендиповых моделей аппроксимации являются неугловые поверхности базиса (коноиды), которые как бы «навязывают» угловым узлам отрицательные нагрузки. Чтобы устранить отрицательные нагрузки, достаточно заменить (полностью или частично) «жесткую» поверхность нулевой гауссовой кривизны (коноид) более «мягкой» поверхностью отрицательной гауссовой кривизны – гиперболическим параболоидом (гипаром). Ниже мы покажем, как прогнуть коноид.

Анализ предшествующих результатов, цель работы

Серендиповы КЭ известны с 1968 г. [3]. По признанию самих авторов, финитные базисные функции были найдены подбором, их назвали стандартным базисом. Самое простое определение серендипова КЭ дано в [4]: серендипов элемент – это лагранжевы элемент того же порядка, только без внутренних узлов. Проблема устранения нежелательных внутренних узлов лагранжевой интерполяции заинтересовала многих специалистов. В теории серендиповых аппроксимаций наряду с методом обратной матрицы стали применять метод конденсации (редукции) [5], метод Тейлора [6] и др. К сожалению, ни один из этих методов не позволил выйти за рамки стандартных моделей [3]. В начале 70-х годов XX столетия

появились интересные результаты геометрического моделирования в работах Уачспресса [7]. Как правило, Уачспресс конструировал дробно-рациональные базисы для КЭ в форме многоугольника. Обнаружив вероятностное содержание его метода «product of planes», мы предложили новый подход [2, 8] к построению полиномиальных базисов для серендиповых КЭ. Наш опыт работы с элементами серендипова семейства показывает, что наилучшие результаты даёт комбинированный метод [9], включающий алгебраическое, геометрическое моделирование и компьютерное экспериментирование.

Цель работы – на примере конечного элемента биквадратичной интерполяции Q_8 показать роль гауссовой кривизны «промежуточных» поверхностей и её влияние на интегральные характеристики КЭ. «Мягкие» (в смысле В. И. Арнольда) модели можно получить путём усовершенствования классических методов Уачспресса и Тейлора.

Основная часть

Из названия статьи нетрудно понять, что в данном случае удобнее воспользоваться геометрическим моделированием. На рис. 1 показан серендипов элемент Q_8 и линии нулевого уровня (пунктиром) «угловой» $N_1(x, y)$ и «промежуточной» $N_5(x, y)$ поверхностей стандартной модели [1, 3, 5].

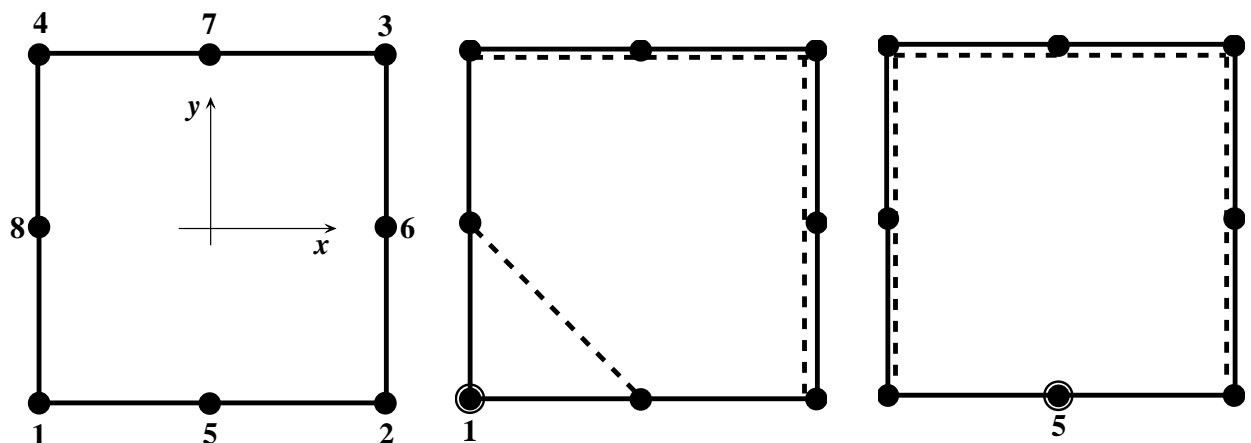


Рис. 1 Элемент Q_8 и линии нулевого уровня финитных поверхностей $N_1(x, y)$ и $N_5(x, y)$ ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$)

Чтобы составить представление о стандартном базисе Q_8 , достаточно привести уравнения двух функций:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y), \\
 N_5(x, y) &= \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Остальные шесть функций легко получить из (1). Это удобная модель для иллюстрации классического метода Уачспресса, хотя сам Уачспресс серендиповы элементы не рассматривал.

Заметим, что автор [7] конструировал финитные поверхности путём «перемножения плоскостей». При этом необходимо соблюдать требования интерполяционной гипотезы Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) = 1,
 \tag{2}$$

где i – номер функции, k – номер узла.

Как видим, $N_1(x, y)$ – это композиция трех плоскостей, проходящих через точку $(-1; -1; 1)$. Остальные две точки для каждой из плоскостей выбираются из условия (2). Аналогично $N_5(x, y)$ – это композиция трех плоскостей, проходящих через точку $(0; -1; 1)$. В серендиповом семействе особый интерес представляют «промежуточные» функции. Это они привели к нарушению физической адекватности спектра узловых нагрузок [1] на всех стандартных элементах высших порядков. Наши предшественники необоснованно ограничили (линейным законом) характер изменения поверхности $N_i(x, y)$ вдоль нормали к стороне, на которой лежит промежуточный узел i . Так возникли коноиды – поверхности с нулевой гауссовой кривизной.

Коноид – это линейчатая поверхность, все прямолинейные образующие которой параллельны одной и той же плоскости и пересекают одну и ту же прямую (ось коноида). Коноид входит в семейство каталановых поверхностей, которые в первой половине 19 века изучал бельгийский математик Е. Catalan. Коноиды господствуют в составе стандартных базисов серендиповых КЭ высших порядков: 4 коноида на $Q 8$, 8 – на $Q 12$ и 12 – на $Q 16$. Поверхности с нулевой гауссовой кривизной делают стандартную серендипову модель «жесткой». Противоестественность поузлового распределения нагрузки от единичной массовой силы [1] обусловлена жесткостью стандартных поверхностей. Например, для модели $Q 8$ нагрузка в угловых узлах равна $\gamma_i = -\frac{1}{12}, i = 1, 2, 3, 4$; в промежуточных – $\gamma_i = \frac{1}{3}, i = 5, 6, 7, 8$. С физической точки зрения под жесткостью понимают избыточную сопротивляемость изгибу. С математической точки зрения – это безальтернативность как результат единственности решения задачи локализации распределенной нагрузки. Так модель «мстит» за идеализацию. Вывод очевиден – нужно прогнуть коноид, т.е. сконструировать альтернативные «промежуточные» поверхности знакопеременной гауссовой кривизны. Понятно, что условия (2) необходимо сохранить.

Покажем, как построить «мягкие» промежуточные поверхности методом «перемножения» плоскостей. Для этого достаточно прямолинейные образующие коноида заменить вогнутыми квадратичными параболоми. По Уачспрессу такая конструкция получается перемножением двух плоскостей, так что теперь $N_5(x, y)$ – это результат «перемножения» двух параболических цилиндров (выпуклого и вогнутого):

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2(1 + \beta)} (1 - x^2) (1 - y) (\beta - y), \tag{3}$$

где $y = 1, y = \beta$ – следы пересечения плоскости носителя параболическим цилиндром.

Для построения поверхности $N_1(x, y)$ нам потребуется ещё одна промежуточная поверхность

$$N_8(x, y) = \frac{1}{2(1 + \beta)} (1 - y^2) (x - 1) (\beta - x). \tag{4}$$

Если распространить идеи Тейлора [6] на нестандартные функции (3) и (4), получим

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4} (1 - x) (1 - y) - \frac{1}{2} (N_5(x, y) + N_8(x, y)). \tag{5}$$

Изменяя параметр β , мы регулируем прогиб промежуточных поверхностей. Нами установлена связь между узловой нагрузкой γ_i и β :

$$\beta = \frac{9\gamma_i - 1}{3 - 9\gamma_i}, \quad i = 5, 6, 7, 8. \tag{6}$$

Теперь покажем примеры «мягких» моделей $Q 8$, реализующих физически адекватные спектры узловых нагрузок. Напомним, что мы стремимся устранить отрицательные нагрузки в угловых узлах элемента.

Естественно начать с угловой нагрузки $\frac{1}{36}$, отвечающей элементу $Q 9$ биквадратичной интерполяции. Достаточно показать две функции серендипова семейства $N_1(x, y)$ и $N_5(x, y)$.

Модель А.

$$(\gamma_i = -\frac{1}{36}, i = 1, 2, 3, 4; \gamma_i = \frac{2}{9}, i = 5, 6, 7, 8):$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4} (1 - x) (1 - y) xy; \quad N_5(x, y) = \frac{1}{4} (1 - x^2) (1 - y)^2.$$

Поверхность $N_5(x, y)$ имеет отрицательную гауссову кривизну над всей областью $Q 8$.

Модель В.

$(\gamma_i = \frac{2}{36}, i = 1, 2, 3, 4; \gamma_i = \frac{7}{36}, i = 5, 6, 7, 8):$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{16}(1-x)(1-y)(5xy + x + y + 1); N_5(x, y) = \frac{1}{16}(1-x^2)(5y^2 - 8y + 3).$$

Теперь $\frac{7}{10}$ поверхности $N_5(x, y)$ имеет отрицательную гауссову кривизну. Остальная часть поверхности имеет положительную гауссову кривизну.

Модель С.

$(\gamma_i = \frac{3}{36}, i = 1, 2, 3, 4; \gamma_i = \frac{1}{6}, i = 5, 6, 7, 8):$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(3xy + x + y + 1); N_5(x, y) = \frac{1}{8}(1-x^2)(3y^2 - 4y + 1).$$

В этом случае $\frac{2}{3}$ поверхности $N_5(x, y)$ имеет отрицательную гауссову кривизну. Заметим, что такое распределение весов встречается в методе конечных разностей на вычислительном шаблоне повышенной точности. К этому распределению приводит стержневая аналогия и правило Симпсона.

Модель D.

$(\gamma_i = \frac{1}{8}, i = 1, \dots, 8):$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(15xy + 7x + 7y + 7);$$

$$N_5(x, y) = \frac{1}{32}(1-x^2)(15y^2 - 16y + 1).$$

Эта модель интересна тем, что нагрузка распределена равномерно. При этом $\frac{8}{15}$ области Q_8 накрыто поверхностью с отрицательной гауссовой кривизной.

Выводы

Жесткие ограничения на поведение промежуточных поверхностей $N_i(x, y)$ внутри носителя приводят к «парадоксу Зенкевича» [1]. Отрицательные нагрузки в угловых узлах элемента можно устранить, если вернуть в интерполяционный базис девятый моном x^2y^2 . Зависимость интегральных характеристик серендиповых полиномов от гауссовой кривизны поверхностей до сих пор не изучалась, хотя нам известны и другие способы восстановления девятого монома. Нетрудно предположить, что во всех случаях конструирования физически адекватных серендиповых моделей коноиды уступают место поверхностям знакопеременной гауссовой кривизны. В этом контексте трудно удержаться от афоризма: «Лучше отрицательная кривизна Гаусса, чем отрицательная нагрузка Зенкевича».

Список использованной литературы

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
2. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. – Ив.-Франковск, 1982. – 6 с. Деп. в ВИНТИ, № 1213.
3. Ergatoudis I. Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz // Int. J. Solids Struct. – V.4. – 1968. – P. 31-42.
4. Немчинов Ю. И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов) / Ю. И. Немчинов. – К. : Будівельник, 1982. – 232 с.
5. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
6. Taylor R. L. On the completeness of shape functions for finite element analysis / R. L. Taylor // J. Num. Meth. Eng. – 4., 1. – P. 17-22.
7. Wachspress E. L. A rational finite element basis / E. L. Wachspress. – Academic Press: New York, 1975. – 344 p.
8. Хомченко А. Н. Метод конечных элементов: стохастический подход / А. Н. Хомченко. – Ив.-Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1982. – 7 с. Деп. в ВИНТИ, № 5167.
9. Астионенко И. А. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика. – № 5(60). Вып. 16. – Белгород: БелГУ, 2009. – С. 15-31.