УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ, Л.О. ТУЛУПОВА
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка
І.В. ВОРОНЦОВА
Полтавський коледж нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

ВИЗНАЧЕННЯ ОДНОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ ЛАНЦЮГОМ ПОСЛІДОВНИХ СУПЕРПОЗИЦІЙ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ВЕЛИЧИНИ РЕКУРЕНТНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ

В роботі проведено дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій пар точок для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів із врахуванням величини рекурентної залежності, що є прообразом зовнішнього формоутворюючого навантаження у статико-геометричному способі дискретного геометричного моделювання.

Ключові слова: статико-геометричний спосіб, геометричний апарат суперпозицій, величина рекурентної залежності, коефіцієнти суперпозиції.

О. В. ВОРОНЦОВ, Л.А. ТУЛУПОВА
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка
И.В. ВОРОНЦОВА
Полтавский колледж нефти и газа Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ЦЕПЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СУПЕРПОЗИЦИЙ С УЧЕТОМ ВЕЛИЧИНЫ РЕКУРРЕНТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

В работе проведено исследование организации цепи последовательных суперпозиций пар точек для дискретного моделирования одномерных геометрических образов с учетом величины рекуррентной зависимости, которая является прообразом внешней формообразующей нагрузки в статико-геометрическом способе дискретного геометрического моделирования.

Ключевые слова: статико-геометрический способ, геометрический аппарат суперпозиций, величина рекуррентной зависимости, коэффициенты суперпозиции.

O.V. VORONTSOV, L.A. TULUPOVA
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University
I.V. VORONTSOVA
Poltava Petroleum Geological College of PoltavaNational Technical Yuri Kondratyuk University

DETERMINATION OF ONE-DIMESIONAL GEOMETRIC IMAGES BY A CHAIN OF SUCCESSIVE SUPERPOSITIONS CONSIDERING A VALUE OF RECURRENT DEPENDENCE

In the article we have investigated an organization of a chain of successive superpositions of pairs of some points for discrete modeling of one-dimensional geometric images, considering a value of recurrent dependence. This dependence is a prototype of some external forming load in the static – geometrical method of discrete geometrical modeling.

Keywords: static-geometric method, geometrical apparatus of superpositions, value of recurrent dependence, superposition coefficients.

Постановка проблеми

Формування дискретних моделей геометричних образів статико-геометричним способом, зокрема моделей просторових покриттів, на стадії ескізного проектування, керування формою модельованих поверхонь, зміна окремих параметрів вимагає повторної операції складання і вирішення великих систем лінійних рівнянь. Залучення математичного апарату числових послідовностей і геометричного апарату суперпозицій для формування геометричних образів значно розширює можливості статико-геометричного способу дискретного моделювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Дослідженню властивостей суперпозицій дискретних точкових множин присвячено дисертацію [1], у якій, зокрема, було розглянуто можливість керування формою розтягнутих сіток на основі функціонального додавання, статті [2–4], в яких доведено ряд властивостей вищезазначених суперпозицій та зроблено висновок про перспективність всебічного дослідження геометричного апарату суперпозицій. У статті [5] показано, що суперпозиція n точок може бути замінена ланцюгом послідовних суперпозицій.

Актуальними є дослідження можливих варіантів ланцюгів суперпозицій з метою виведення аналітичних залежностей визначення координат довільного вузла двовимірного геометричного образу, як суперпозиції координат заданих вузлів.

Формулювання мети дослідження

Метою даної роботи є дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій пар точок для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів, оскільки властивості, які має одновимірна множина точок, можуть бути узагальнені до двовимірної множини, що формується за тими ж законами, якщо одновимірну множину розглядати як складову каркаса двовимірної. Властивості дискретної моделі двовимірного геометричного образу також можуть бути одержані узагальненням відповідних властивостей одновимірного.

Викладення основного матеріалу дослідження

Одним з принципів статико-геометричного способу конструювання кривих ліній (одновимірних геометричних образів) є управління формою кривої шляхом зміни типу розподілу зовнішнього формоутворюючого навантаження.

При формуванні дискретних образів на основі геометричного апарату суперпозицій формоутворюючою величиною є величина рекурентної залежності, що тотожна зовнішньому навантаженню у статико-геометричному способі.

Розглянемо можливість формування дискретного каркасу заданої функціональної залежності шляхом заміни суперпозиції *n* заданих точок ланцюгом послідовних суперпозицій пар точок із врахуванням формоутворюючої величини рекурентної залежності.

Суперпозиція *2* пари точок *1* і *3* числової послідовності

$$y_i = 0{,}2i^2 \, , \tag{1}$$

що показана на рис. 1, може бути представлена у вигляді [2]:

$$u_2 = u_1 \cdot k_2^{13} + u_3 \cdot \left(1 - k_2^{13}\right) + P_i^2 \, , \tag{2}$$

де u – узагальнене позначення відповідної координати, що одержана в результаті суперпозиції точок *1* і *3*,

k_2^{13} – перший із двох коефіцієнтів суперпозиції точок *1* і *3* для точки *2*,

а P_i^2 – величина рекурентної залежності, що є аналогом дискретної величини зовнішнього формоутворюючого навантаження, прикладеного до вузлової точки *2*.

Суперпозиція трьох точок послідовності (1) запишеться у вигляді:

$$y_4^{1\text{-}3\text{-}5} = k_1 y_1 + k_2 y_3 + \left(1 - k_1 - k_2\right) y_5 \, . \tag{3}$$

Покажемо, що при певній залежності між коефіцієнтами, суперпозицію (3) можна одержати як послідовність двох суперпозицій:

$$y_2 = k_2^{1\text{-}3} y_1 + \left(1 - k_2^{1\text{-}3}\right) y_3 + P_i^2 \, , \tag{4}$$

$$y_4 = k_4^{3\text{-}5} y_3 + \left(1 - k_4^{3\text{-}5}\right) y_5 + P_i^4 \, . \tag{5}$$

Із (4):

$$y_3 = \frac{1}{1 - k_2^{1\text{-}3}} \left(y_2 - k_2^{1\text{-}3} y_1 - P_i^4 \right) \tag{6}$$

Підставляючи (6) до (5), одержимо:

$$y_4 = \frac{-k_2^{1\text{-}3} k_4^{3\text{-}5}}{1 - k_2^{1\text{-}3}} y_1 + \frac{k_4^{3\text{-}5}}{1 - k_2^{1\text{-}3}} y_2 + \left(1 - k_4^{3\text{-}5}\right) y_5 + \left[P_i^4 - \frac{k_4^{3\text{-}5} P_i^2}{1 - k_2^{1\text{-}3}} \right] , \tag{7}$$

де

$P_4^{3\text{-}5} = \left[P_i^4 - \dfrac{k_4^{3\text{-}5} P_i^2}{1-k_2^{1\text{-}3}} \right]$ – величина рекурентної залежності.

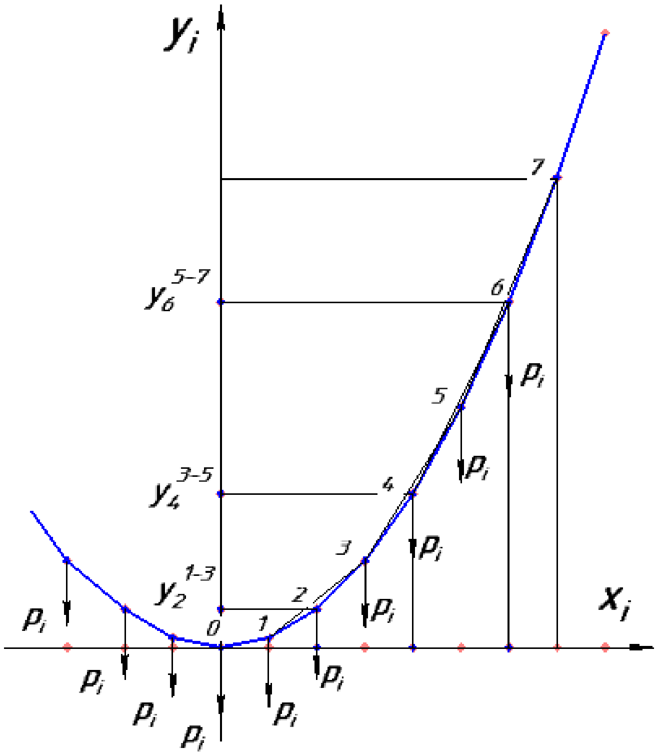

Рис. 1. Дискретний аналог числової послідовності $y_i = 0{,}2i^2$, як ланцюг послідовних суперпозицій: *1-3, 3-5, 5-7, …*

Порівнюючи (7) із (3), де відповідні коефіцієнти суперпозиції повинні бути рівними, можна записати:

$$\begin{cases} k_1^{(4)} = \dfrac{-k_2^{1\text{-}3} k_4^{3\text{-}5}}{1-k_2^{1\text{-}3}} \\ k_2^{(4)} = \dfrac{k_4^{3\text{-}5}}{1-k_2^{1\text{-}3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2^{1\text{-}3} = -\dfrac{k_1^{(4)}}{k_2^{(4)}} \\ k_4^{3\text{-}5} = k_1^{(4)} + k_2^{(4)} \end{cases}, \tag{8}$$

де k_2^{13} – перший із двох коефіцієнтів суперпозиції точок *1* і *3* для точки *2*, $k_4^{3\text{-}5}$ – перший із двох коефіцієнтів суперпозиції точок *3* і *5* для точки *4*, $k_1^{(4)}$ – перший із трьох коефіцієнтів суперпозиції точок *1*, *3* і *5* для точки *4*, $k_2^{(4)}$ – другий із трьох коефіцієнтів суперпозиції точок *1*, *3* і *5* для точки *4*.

За умови (8) пара суперпозицій (4) і (5) буде тотожною суперпозиції (3).

Суперпозицію чотирьох точок послідовності (1):

$$y_6^{1\text{-}3\text{-}5\text{-}7} = k_1 y_1 + k_2 y_3 + k_3 y_5 \left(1-k_1-k_2-k_3\right) y_7 \tag{9}$$

можна одержати як ланцюг трьох пар послідовних суперпозицій:

$$y_2 = k_2^{1\text{-}3} y_1 + \left(1-k_2^{1\text{-}3}\right) y_3 + P_i^2\ , \tag{10}$$

$$y_4 = k_4^{3\text{-}5} y_2 + \left(1 - k_4^{3\text{-}5}\right) y_5 + P_i^4 \ , \tag{11}$$

$$y_6 = k_6^{5\text{-}7} y_5 + \left(1 - k_6^{5\text{-}7}\right) y_7 + P_i^6 \ . \tag{12}$$

Із (11):

$$y_5 = \frac{1}{1 - k_4^{3\text{-}5}} \left(y_4 - k_4^{3\text{-}5} y_3 - P_i^4 \right) \tag{13}$$

Підставляючи (13) до (12), одержимо:

$$y_6 = \frac{-k_4^{3\text{-}5} k_6^{5\text{-}7}}{1 - k_2^{1\text{-}3}} y_3 + \frac{k_6^{5\text{-}7}}{1 - k_4^{3\text{-}5}} y_4 + \left(1 - k_6^{5\text{-}7}\right) y_7 + \left[P_i^6 - \frac{k_6^{5\text{-}7} P_i^4}{1 - k_4^{3\text{-}5}} \right] , \tag{14}$$

де

$P_6^{5\text{-}7} = \left[P_i^6 - \dfrac{k_6^{5\text{-}7} P_i^4}{1 - k_4^{3\text{-}5}} \right]$ − величина рекурентної залежності .

Далі, за аналогією із (8), одержимо:

$$\begin{cases} k_1^{(6)} = \dfrac{-k_4^{3\text{-}5} k_6^{5\text{-}7}}{1 - k_4^{3\text{-}5}} \\ k_2^{(6)} = \dfrac{k_6^{5\text{-}7}}{1 - k_4^{3\text{-}5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_4^{3\text{-}5} = -\dfrac{k_1^{(6)}}{k_2^{(6)}} \\ k_6^{5\text{-}7} = k_1^{(6)} + k_2^{(6)} \end{cases} . \tag{15}$$

Узагальнюючи вищевикладене, можемо записати формули залежності коефіцієнтів суперпозиції n-го числа точок послідовності (1) для даної організації ланцюга суперпозицій.

$$y_{2n}^{1\text{-}3\text{-}\ldots\text{-}(n-2)\text{-}n} = k_1 y_1 + k_2 y_3 + k_3 y_5 + \ldots + k_n y_{2n-1} + \left(1 - k_1 - k_2 - \ldots - k_n\right) y_{2n+1} \ ;$$

$$k_1^{(6)} = -k_2^{(6)} \left[k_1^{(4)} + k_2^{(4)} \right] ,$$

$$k_1^{(8)} = k_2^{(6)} k_2^{(8)} \left[k_2^{(4)} + k_2^{(4)} - 1 \right] = -k_2^{(6)} k_2^{(8)} + k_2^{(6)} k_2^{(8)} \left[k_1^{(4)} + k_2^{(4)} \right] ,$$

$$k_1^{(10)} = -k_2^{(8)} k_2^{(10)} + k_2^{(6)} k_2^{(8)} k_2^{(10)} - k_2^{(6)} k_2^{(8)} k_2^{(10)} \left[k_1^{(4)} + k_2^{(4)} \right] ,$$

……………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………..

$$k_1^{(2m)} = (-1)^m \left[k_1^{(4)} + k_2^{(4)} \right] \prod_{i=3}^{m} k_2^{(2i)} + (-1)^{m-1} \sum_{s=1}^{n_1} \prod_{i=2s+1}^{m} k_2^{(2i)} + (-1)^m \sum_{s=1}^{n_2} \prod_{i=2s+2}^{m} k_2^{(2i)} \ ,$$

де:

$n_1 = \left[m \vdots 2 \right] - 1$, $n_2 = \left[(m-1) \vdots 2 \right] - 1$. Символ «$\vdots$» означає цілочисельне ділення, $[a \vdots b]$ – частку від цілочисельного ділення a на b .

Формула обчислення величини рекурентної залежності у загальному вигляді для даної організації ланцюга суперпозицій матиме вигляд (16):

$$P_4^{3\text{-}5} = P_i^4 - \frac{k_4^{3\text{-}5} P_i^2}{1 - k_2^{1\text{-}3}};$$

$$P_6^{5\text{-}7} = P_i^6 - \frac{k_6^{5\text{-}7} P_i^4}{1 - k_4^{3\text{-}5}};$$

……………………………………………………….;

……………………………………………………….;

$$P_{2m}^{(2m\text{-}1)\text{-}(2m+1)} = P_i^{2m} - \frac{k_{2m}^{(2m\text{-}1)\text{-}(2m+1)}}{1 - k_{(2m\text{-}2)}^{(2m\text{-}3)\text{-}(2m\text{-}1)}} P_i^{(2m\text{-}2)} . \tag{16}$$

Вірність виведених формул нескладно перевірити підставивши конкретні числові значення послідовності (1).

Висновки

У статті показано, що суперпозиція n точок дискретного аналогу заданої числової послідовності може бути замінена ланцюгом послідовних суперпозицій із врахуванням величини рекурентної залежності. Встановлено залежність між коефіцієнтами суперпозиції ланцюга пар точок і коефіцієнтами суперпозиції n точок. Дослідження різних варіантів організації ланцюгів суперпозицій дозволять вивести аналітичні залежності для визначення координат довільних вузлів двовимірних геометричних образів, як суперпозиції координат заданих вузлів.

Список використаної літератури

1. Чан Хонг Хай. Управление формой растянутых систем на основе функционального сложения: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. / Ч.Х. Хай. – К., 1994. – 124 с.
2. Ковалев, С.Н. О суперпозициях / С.Н. Ковалев // Прикладна геометрія та інженерна графіка : зб. наук. праць – Вип. 84. – К.: КНУБА, 2010. – С. 38–42.
3. Воронцов, О.В. Властивості суперпозицій точкових множин / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка : зб. наук. праць – Вип. 86. – К.: КНУБА, 2010. – С. 345–349.
4. Воронцов, О.В. Определение дискретных аналогов классов элементарных функций суперпозициями одномерных точечных множеств [Электронный ресурс] / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова // Universsum: Технические науки: электрон. научн. журн. – 2014. – №3(4). – Режим доступа: http: // 7universsum. Com /ru/ tech/ archive/ item/1135.
5. Вязанкин, В.А. Замена суперпозиции конечного числа точек цепью последовательных суперпозиций пар точек / В.А. Вязанкин, А.В. Мостовенко // Прикладна геометрія та інженерна графіка : зб. наук. праць – Вип. 84. – К.: КНУБА, 2010. – С. 296–300.