УДК 531.1/2

Ю.Є. МЄШКОВ
Херсонський національний технічний університет

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРА КУТОВОГО ПРИСКОРЕННЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

У даній роботі представлена формула для обчислення кутової швидкості ω за трьома точками, що не лежать на одній прямій. На основі цієї формули отримані формули для визначення кутового прискорення ε в загальному випадку руху твердого тіла і в окремих випадках, з використанням швидкості і прискорення трьох "основних" точок. Застосування отриманих формул проілюстровано на прикладі кривошипно-шатунного механізму. Результати співпадають з результатами розв'язання цих задач традиційними методами.

Ключові слова: вектор кутової швидкості, кінематична характеристика руху, переносний поступальний рух, плоскопаралельний рух тіла, прискорення, кутове прискорення, кути Ейлера, формула Пуассона, рухомий тріедр, ортогональна проекція.

Ю.Е. МЄШКОВ
Херсонский национальный техническнй університет

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЕКТОРА УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В даной работе представлена формула для вычисления угловой скорости ω по трём точкам, не лежащим на одной прямой. На основании этой формулы получены формулы для определения углового ускорения ε в общем случае движения твёрдого тела и в частных случаях, с использованием скорости и ускорения трех "основных" точек. Применение полученных формул проиллюстрировано на примере кривошипно-шатунного механизма. Результаты совпадают с результатами решения этих задач традиционными методами.

Ключевые слова: вектор угловой скорости, кинематическая характеристика движения, переносное поступательное движение, плоскопараллельное движение тела, ускорение, угловое ускорение, углы Эйлера, формула Пуассона, подвижной триэдр, ортогональная проекция.

Yu.Ye.MIESHKOV
Kherson National Technical University

ON THE DETERMINATION OF THE ANGLE ACCELERATON VECTOR OF AN ABSOLUTELY SOLID BODY

This paper presents a formula for calculating the angular velocity ω from three points that do not lie on one straight line. On the basis of this formula, formulas for determining the angular acceleration ε are obtained in the general case of motion of a solid body and in special cases, using the velocity and acceleration of three "basic" points. The application of the obtained formulas is illustrated by the example of a crank mechanism. The results coincide with the results of solving these problems by traditional methods.

Keywords: angular velocity vector, kinematic characteristics of motion, portable translational motion, planar body movement, acceleration, angular acceleration, angles Euler, Pousson, driven triedr, orthogonal projection.

Постановка проблеми

Відомо, що швидкість v довільної точки М абсолютно твердого тіла визначається формулою, що називається законом розподілення швидкостей точок тіла.

$$v = v_A + \overline{\omega} \cdot AM\,, \tag{1}$$

Вектор $\overline{\omega}$ в формулі (1), що називається вектором кутової швидкості тіла, не залежить від вибору точки М і полюса А та є важливою кінематичною характеристикою руху.

Введення вектору кутової швидкості $\overline{\omega}$ здійснюється в основному двома способами. Перший спосіб базується на понятті вектору безкінечно малого повороту тіла. Зазвичай спочатку розглядається тверде тіло з однією нерухомою точкою А і двома нескінченно близькими положеннями, що відповідають моментам t та $t+\Delta t$. Переміщення $d_r = vdt$ довільної точки М тіла перпендикулярне вектору $r = AM$. Вводиться вектор d_i таким чином, що $d_r = d_i \cdot r$, і після цього з рівності $d_i = \omega dt \cdot d$ визначається вектор $\overline{\omega}$.

Нехай точка A рухається зі швидкістю v_A. Вводиться система координат, що має початок в точці A і переміщується поступально зі швидкістю v_A. Рух тіла складається з переносного поступального руху зі швидкістю v_A і відносного обертового руху навколо точки A. У результаті цього складання отримується формула (1) ([2], [6], [9], [10] і ін.). Введення вектору безкінечно малого повороту можна здійснити в відповідності з теоремами кінцевого повороту Ейлера і Шаля і користуючись віссю кінцевого повороту тіла ([14], [16]). Детально теорія кінцевого повороту тіла викладена в [7].

Другий спосіб, що часто зустрічається, це введення вектору $\overline{\omega}$, яке базується на тому, що з твердим тілом пов'язаний рухомий трієдр $Ae_1e_2e_3$. Для одиничних векторів $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ маємо

$$e_i e_j = \begin{cases} 1(i = j), \\ 0(i \neq j). \end{cases} \tag{2}$$

Під час руху твердого тіла одиничні вектори $\overline{e_i}$, постійні по модулю, змінюють свої напрямки, і тому $\overline{e_i} = e_i(t)$. Похідна $\dot{e}_i$ представляться в вигляді

$$\dot{e}_i = \omega_{i1}e_1 + \omega_{i2}e_2 + \omega_{i3}e_3, \tag{3}$$

На основі співвідношення (2) маємо $\frac{d}{dt}(e_i e_j) = 0$, тому $\dot{e}_i e_j = -e_i \dot{e}_j$, звідки виходить, що $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Коефіцієнти ω_{ij} являють собою компоненти кососиметричного тензора, з яким зіставляється вектор $\overline{\omega} = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$, причому $\omega_1 = \omega_{23}, \omega_2 = \omega_{31}, \omega_3 = \omega_{12}$. Тоді формули (3) приводяться до відомого вигляду:

$$\dot{e}_i = \omega \cdot e_i \cdot i = 1,2,3, \tag{4}$$

Радіус-вектор $\overline{r} = OM$, що з'єднує деяку нерухому точку O з довільною точкою M тіла, подається як векторна сума радіус-вектора полюса $\overline{r} = OA$ і радіус-вектора $\overline{c} = AM$, що визначає положення точки *M* відносно полюса *A*, тобто $\overline{r} = \overline{r}_A + \overline{c}$. Тут вектор $\overline{c} = AM = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ незмінно пов'язаний з тілом і тому координати x_i залишаються постійними в часі. Диференціюючи $\overline{r} = \overline{r}_A + \overline{c}$ і використовуючи співвідношення (4), приходимо до формули (1) . Цей спосіб є більш формальним, але з іншого боку на його основі автором пропонується можливість пов'язання вектору $\overline{\omega}$ з кутами Ейлера.

Формулювання мети дослідження

Мета даної роботи – визначити вектор кутового прискорення тіла $\overline{\varepsilon}$, якщо відомі швидкості v_1, v_2, v_3 та прискорення a_1, a_2, a_3 трьох «основних точок» A_1, A_2, A_3 в даний момент часу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В середині минулого століття болгарський вчений Аркадій Стоянов видав декілька праць на тему «О кинематике идеально твердого тела» [11,12], результати яких представлені в [13]. У них кінематика загального руху абсолютно твердого тіла представлена дедуктивним способом, без використання методу рухомого трієдра, формул (4) Пуассона і вектору нескінченно малого повороту. Приймається, що загальний рух твердого тіла в просторі визначається рухом трьох точок A_1, A_2, A_3, що не лежать на одній прямій. Розв'язувалась наступна задача: нехай у деякий момент часу відомі швидкості v_1, v_2, v_3 трьох «основних» точок A_1, A_2, A_3; необхідно визначити швидкість довільної точки M цього тіла. Розв'язанням цієї задачі стала формула для визначення вектору кутової швидкості $\overline{\omega}$ тіла за допомогою швидкостей трьох точок і їх взаємних положень [13]

$$\overline{\omega} = \frac{v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_3 + v_3 \cdot v_1}{v_1(A_1A_2) + v_2(A_2A_3) + v_3(A_3A_1)}. \tag{5}$$

Доведення цієї формули випливає безпосередньо з закону розподілу швидкостей (1). Виразивши послідовно швидкості «основних» точок, маємо

$$v_2 = v_1 + \omega \cdot A_1A_2;\ v_3 = v_2 + \omega \cdot A_2A_3;\ v_1 = v_3 + \omega \cdot A_3A_1.$$

Виконуючи векторне множення рівності зліва на v_1, v_2, v_3 відповідно і додаючи отримані формули, отримуємо

$$v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_3 + v_3 \cdot v_1 = \omega\big(v_1(A_1A_2) + v_2(A_2A_3) + v_3(A_3A_1)\big) - (\omega \cdot v_1)\cdot\left(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1\right)$$

Тут прийнято до уваги, що $\omega \cdot v_1 = \omega \cdot v_2 = \omega \cdot v_3$, та, враховуючи рівність $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 = 0$, отримаємо рівність (5).

Викладення основного матеріалу дослідження

Визначимо вектор кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ твердого тіла в загальному випадку його руху (рис. 1). Для цього подамо формулу (5) у вигляді

$$\omega\big(v_1(A_1A_2) + v_2(A_2A_3) + v_3(A_3A_1)\big) = v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_3 + v_3 \cdot v_1$$

і виконаємо диференціювання за часом

$$\dot{\omega}\big(v_1(A_1A_2) + v_2(A_2A_3) + v_3(A_3A_1)\big) + \omega\left(\begin{array}{l} \dot{v}_1(A_1A_2) + v_1\dfrac{d(A_1A_2)}{dt} + \dot{v}_2(A_2A_3) + v_2\dfrac{d(A_2A_3)}{dt} + \\ + \dot{v}_3(A_3A_1) + v_3\dfrac{d(A_3A_1)}{dt} \end{array}\right) = \tag{6}$$

$$= \dot{v}_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot \dot{v}_2 + \dot{v}_2 \cdot v_3 + \cdot v_2 \cdot \dot{v}_3 + \dot{v}_3 \cdot v_1 + v_3 \cdot \dot{v}_1$$

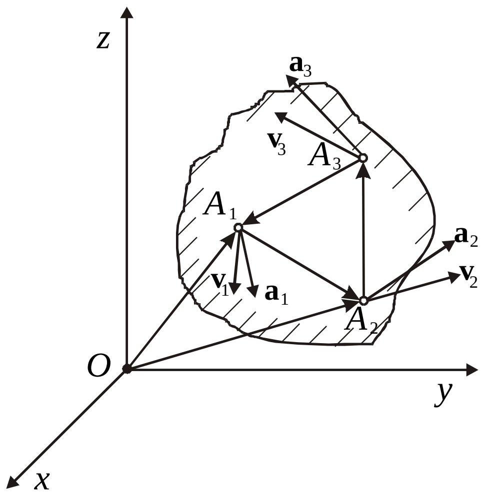

Рис. 1. Загальний випадок руху твердого тіла

Враховуючи, що

$$\dot{\omega} = \varepsilon;\quad \dot{v}_i = a_i (i = 1,2,3);\ \frac{dA_1A_2}{dt} = v_2 - v_1;\quad \frac{dA_2A_3}{dt} = v_3 - v_1;\ \frac{dA_3A_1}{dt} = v_1 - v_3; \tag{7}$$

підставляючи (7) в (6) і здійснюючи нескладні перетворення, отримуємо для вектору кутового прискорення

$$\bar{\varepsilon} = \frac{a_1 \cdot (v_2 - v_3) + a_2 \cdot (v_3 - v_1) + a_3 \cdot (v_1 - v_2)}{v_1(A_1A_2) + v_2 + v_3(A_3A_1)} -$$
$$- \bar{\omega}\left(\frac{a_1 \cdot (A_1A_2) + a_2 \cdot (A_2A_3) + a_3 \cdot (A_3A_1) + (v_1 \cdot v_2) + (v_2 \cdot v_3) + (v_3 \cdot v_1) - (v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2)}{v_1(A_1A_2) + v_2(A_2A_3) + v_3(A_3A_1)}\right) \tag{8}$$

де вектор кутової швидкості $\bar{\omega}$ треба виразити з виразу (5). Отриманою формулою (8) визначається вектор кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ через швидкості v_1, v_2, v_3 і прискорення a_1, a_2, a_3 трьох не колінеарних основних точок A_1, A_2, A_3, в припущенні, що рух цих точок відомий.

Окремі випадки руху твердого тіла

Розглянемо визначення кутового прискорення ε у випадках, коли на рух твердого тіла накладено деякі обмеження.

Поступальний рух твердого тіла. У випадку поступального руху: швидкості і прискорення всіх точок тіла рівні між собою

$$v_1 = v_2 = v_3;\ a_1 = a_2 = a_3. \tag{9}$$

Підставляючи (9) послідовно в (5) і (8) отримаємо

$$\bar{\omega} = 0;\quad \bar{\varepsilon} = 0, \tag{10}$$

тобто, вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ при поступальному русі тіла дорівнюють нулю.

Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Це рух твердого тіла, при якому дві точки A_2 і A_3 тіла нерухомі. Пряма, що визначається цими точками, називається нерухомою віссю тіла. Тепер рух тіла визначається рухом тільки однієї точки A_1, що знаходиться зовні вісі обертання $Oz \equiv A_2A_3$ (рис. 2).

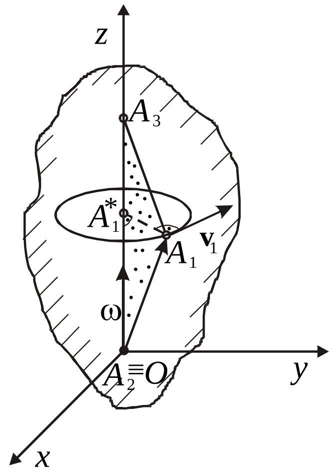

Рис. 2. Обертальний рух

Тіло абсолютно тверде, тому

$$(A_2A_1)^2 = \text{const} \quad , \quad (A_3A_1)^2 = \text{const}.$$

Після диференціювання за часом маємо

$$\frac{\mathrm{d}A_2A_1}{\mathrm{dt}} \cdot A_2A_1 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}A_3A_1}{\mathrm{dt}} \cdot A_3A_1 = 0 \quad \textit{або} \quad v_1 \cdot A_2A_1 = 0, \quad v_1 \cdot A_3A_1 = 0,$$

оскільки $\frac{\mathrm{d}A_2A_1}{\mathrm{dt}} = v_1$ і $\frac{\mathrm{d}A_3A_1}{\mathrm{dt}} = v_1$.

З цього випливає, що $v_1 \perp A_2A_1$ і $v_1 \perp A_3A_1$, тобто, швидкість v_1 любої точки тіла зовні вісі обертання перпендикулярна площині, визначеною цією точкою і цією віссю. Тому введемо вектор ω, спрямований по вісі обертання, таким чином, щоб його векторний добуток на A_2A_1 або A_3A_1 дорівнював v_1, тобто.

$$v_1 = \omega \cdot OA_1. \tag{11}$$

Тут O – довільна точка на вісі. Якщо розмірність v_1 – м/с, розмірність OA_1 –м і розмірність ω – с$^{-1}$, то коефіцієнт пропорційності перед векторним добутком в правій частині рівності дорівнює одиниці.

Позначимо через A_1^* ортогональну проекцію точки A_1 на вісь обертання $Oz \equiv A_2A_3$ і представимо вектор OA_1 як $OA_1 = OA_1^* + A_1^*A_1$. Тоді формула (11) матиме вигляд

$$v_1 = \omega \cdot A_1^*A_1, \tag{12}$$

де $A_1^*A_1 \perp Oz$.

Помножимо обидві частини рівності зліва векторно на $A_1^*A_1$

$$A_1^*A_1 \cdot v_1 = A_1^*A_1 \cdot \left(\omega \cdot A_1^*A_1\right),$$

або

$$A_1^*A_1 \cdot v_1 = \omega \cdot A_1^*A_1^{\,2} - A_1^*A_1 \cdot \left(\omega \cdot A_1^*A_1\right),$$

і так як $\omega \perp \mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1$, знаходимо

$$\omega = \frac{A_1^*A_1 \cdot v_1}{A_1^*A_1^{\,2}}. \tag{13}$$

Диференціюючи за часом, отримаємо

$$\varepsilon = \omega = \frac{A_1^*A_1 \cdot a_1}{A_1^*A_1^{\,2}}, \tag{14}$$

де a_1 – прискорення точки A_1, $\frac{\mathrm{d}A_1^*A_1}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}OA_1}{\mathrm{dt}} = v_1$, а $\left|A_1^*A_1\right| = A_1^*A_1 = \text{const}$.

Плоскопаралельний рух тіла. У цьому випадку кожна точка тіла рухається в площині, паралельній деякій нерухомій площині α (площина руху). Для завдання плоскопаралельного руху тіла достатньо задати рух якого-небудь перетину тіла площиною, паралельною площині α (рис. 3). Положення і рух цієї плоскої фігури в її площині Oxy цілком визначається двома точками $A_1(x_1, y_1)$ і $A_2(x_2, y_2)$, причому

$$A_1A_2^{\;2} = \text{const}\,.$$

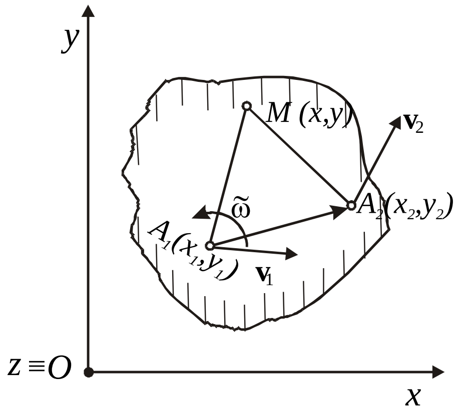

Рис.3. Плоскопаралельний рух

Диференціюємо останнє співвідношення за часом і знаходимо

$$\frac{\mathrm{d}A_1A_2}{\mathrm{dt}}\cdot A_1A_2 = 0 \quad \text{або} \quad (v_2 - v_1)\cdot A_1A_2 = 0\,,$$

оскільки $\dfrac{\mathrm{d}A_2A_1}{\mathrm{dt}} = v_2 - v_1$.

Звідси виходить, що різниця швидкостей $v_2 - v_1$ точок A_1 і A_2 у будь-який момент часу перпендикулярна прямій, що з'єднує ці точки. Введемо вектор ω, перпендикулярний площині руху, таким чином, щоб різниця швидкостей $v_2 - v_1$ дорівнює векторному побудку вектору кутової швидкості ω на A_1A_2, тобто.

$$v_2 - v_1 = \omega\cdot A_1A_2 \quad \text{або} \quad v_2 = v_1 + \omega\cdot A_1A_2\,. \tag{15}$$

Після векторного множення другого векторного рівності (15) на v_1, маючи на увазі, що $\omega\perp v_1$, для вектору кутової швидкості ω отримуємо

$$\omega = \frac{v_1\cdot v_2}{v_1\cdot A_1A_2}\,, \tag{16}$$

а після векторного множення першої рівності (15) на A_1A_2 і враховуючи, що $\omega\perp A_1A_2$, отримуємо формулу для визначення вектору ω за допомогою швидкостей точок A_1 і A_2 плоскої фігури тіла

$$\omega = \frac{(v_1 - v_2)\cdot A_1A_2}{A_1A_2^{\;2}}\,. \tag{17}$$

З рівностей (16) і (17) знаходимо два вирази для визначення кутового прискорення ε плоскої фігури тіла швидкостями і прискореннями точок A_1 і A_2 цієї фігури.

Диференціюючи по часу формулу (16), маємо

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{a_1\cdot v_2 + v_1\cdot a_2}{v_1\cdot A_1A_2} - \omega\frac{a_1\cdot A_1A_2 + v_1\cdot v_2 - v_1^{\;2}}{v_1\cdot A_1A_2}\,. \tag{18}$$

де ω можемо отримати з формули (17).

Диференціюючи за часом формулу (17), отримуємо

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{(a_1 - a_2)\cdot A_1A_2}{A_1A_2^{\;2}}\,, \tag{19}$$

де вектор ε визначається тільки прискореннями a_1, a_2 точок A_1 і A_2, а також їх взаємним положенням.

Рух твердого тіла, що має одну нерухому точку. У цьому випадку точки тіла рухаються по поверхням сфер з центром в нерухомій точці $O \equiv A_3$ (рис. 4).

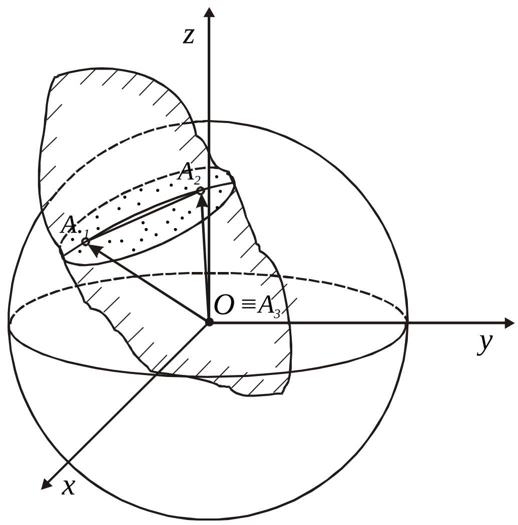

Рис.4. Рух тіла, що має одну нерухому точку

Рух тіла цілком визначається рухом сферичної фігури, яка отримується перетином тіла зі сферою з центром $O \equiv A_3$. З іншого боку рух цієї сферичної фігури визначається рухом її двох точок A_1 і A_2. Нехай третя основна точка – це нерухома точка $A_3 \equiv O$. Тоді маємо

$$OA_1^2 = \text{const}, \quad OA_2^2 = \text{const}, \quad A_1A_2^2 = \text{const}.$$

Диференціюючи за часом, отримуємо

$$\frac{dOA_1}{dt} \cdot OA_1 = 0, \quad \frac{dOA_2}{dt} \cdot OA_2 = 0, \quad \frac{dA_1A_2}{dt} \cdot A_1A_2 = 0,$$

Тобто, під час руху

$$v_1 \perp OA_1, \quad v_2 \perp OA_2, \quad v_2 - v_1 \perp A_1A_2,$$

оскільки $\frac{\mathrm{d}OA_1}{\mathrm{dt}} = v_1, \frac{\mathrm{d}OA_2}{\mathrm{dt}} = v_2, \frac{\mathrm{d}A_1A_2}{\mathrm{dt}} = v_2 - v_1$.

Маємо

$$v_1 = \omega \cdot OA_1, \quad v_2 = \omega \cdot OA_2, \quad v_2 = v_1 + \omega \cdot A_1A_2 .$$

Векторно помноживши третю рівність зліва на v_1, знову отримуємо

$$\omega = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 \cdot A_1A_2}. \tag{20}$$

У формулі (20), на відміну від формули (16), швидкості v_1 і v_2 точок A_1 і A_2 не завжди перпендикулярні одній нерухомій вісі.

Диференціюючи (20) за часом, маємо

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{a_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot a_2}{v_1 \cdot A_1A_2} - \omega \frac{a_1 \cdot A_1A_2 + v_1 \cdot v_2 - v_1^2}{v_1 \cdot A_1A_2}, \tag{21}$$

при чому швидкості v_1 і v_2 та прискорення a_1 і a_2 точок A_1 і A_2 не завжди перпендикулярні одній нерухомій вісі, як це було у випадку плоскопаралельного руху.

Приклад

Розглянемо кривошипно-повзуний механізм (рис. 5). Кривошип ОА довжиною r обертається з постійною кутовою швидкістю ω_0. Визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε шатуна АВ при $\varphi = 60°$ і $\angle OAB = 90°$.

Шатун здійснює плоский рух. Для швидкостей і прискорень основних точок A і B ($A \equiv A_1$, $B \equiv A_2$) маємо

$$v_A = \omega_0 r \frac{BA}{BA}, \quad v_B = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega_0 ri, \quad a_A = \omega_0^2 r \frac{AO}{AO}, \quad a_B = -\frac{2}{9}\omega_0^2 ri,$$

де i – одиничний вектор вісі Ox, а $\frac{BA}{BA}$ і $\frac{AO}{AO}$ одиничні вектори, що визначають напрям швидкостей v_A і a_B.

Використовуючи формулу (16) і вважаючи, що $\frac{BA}{BA}\cdot i = -\sin 30°\cdot\kappa,\ AB = r\sqrt{3}$, отримуємо кутову швидкість ω шатуна AB

$$\omega = \frac{v_A\cdot v_B}{v_A\cdot AB} = \frac{\omega_0 r\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega_0 r}{\omega_0 r r\sqrt{3}}\cdot\frac{BA}{BA}\cdot i = -\omega_0\frac{2}{3}\sin 30°\cdot\kappa = -\frac{\omega_0}{3}\kappa\,.$$

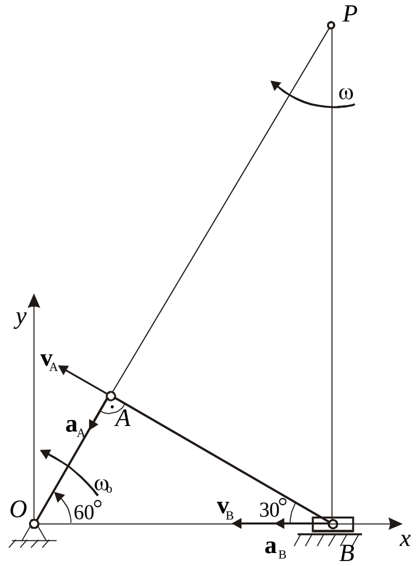

Рис.5. Кривошипно-повзунний механізм

Для визначення кутового прискорення ε шатуна використаємо формулу (18). Вважаючи, що $\frac{AO}{AO}\cdot i = \sin 60°\cdot\kappa = \frac{\sqrt{3}}{2}\kappa$, $BA\cdot i = -\sin 30°\cdot\kappa = -\frac{1}{2}\kappa$, $\frac{AO}{AO}\cdot\frac{AB}{AB} = \cos 90° = 0$, $\frac{BA}{BA}\cdot i = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $v_A\cdot AB = -\omega_0 r^2\sqrt{3}$, отримуємо:

$$\varepsilon = \frac{a_A\cdot v_B + v_A\cdot a_B}{v_A\cdot AB} - \omega\frac{a_A\cdot AB + v_A\cdot v_B - v_A{}^2}{v_A\cdot AB} = \frac{-\omega_0{}^2 r\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega_0 r\frac{AO}{AO}\cdot i - \omega_0 r\frac{2}{9}\omega_0{}^2 r\frac{BA}{BA}\cdot i}{-\omega_0 r r\sqrt{3}} +$$

$$+\frac{\omega_0}{3}\kappa\frac{\omega_0{}^2 r\frac{AO}{AO}\cdot AB - \omega_0 r\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega_0 r\frac{BA}{BA}\cdot i - \omega_0{}^2 r^2}{-\omega_0 r r\sqrt{3}} = \frac{\omega_0{}^3 r^2\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - \omega_0{}^3 r^2\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2} - \omega_0{}^3 r^2\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 90° - \omega_0{}^3 r\frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3} + \omega_0{}^3 r^2}{\omega_0 r^2\sqrt{3}}\kappa =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{27}\omega_0{}^2\kappa$$

Вектори ω і ε перпендикулярні площині руху. Знак "–" перед ω вказує, що обертання шатуна здійснюється у даний момент часу за годинниковою стрілкою, а "+" перед ε, що шатун обертається уповільнено, і вектор направлено до спостерігача.

Отримані результати співпадають з результатами розв'язання цих задач за допомогою миттєвого центра швидкостей і законів розподілу швидкостей і прискорень.

Висновки

Після короткого огляду прийнятих в літературі способів введення вектора кутової швидкості в кінематиці абсолютно твердого тіла, в роботі подано формулу для обчислення кутової швидкості ω за трьома точками, що не лежать на одній прямій. На основі цієї формули отримано формули для визначення кутового прискорення ε в загальному випадку руху твердого тіла і в окремих випадках, з використанням швидкості і прискорення трьох «основних» точок. Застосування отриманих формул проілюстровано на прикладі кривошипно-шатунного механізму. Результати співпадають з результатами розв'язання цих задач традиційними методами.

Список використаної літератури:

1. Аппель П. Теоретическая механика, т. I. – М.: Физматгиз, 1960.-515 с.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики, т. I. – М.: Наука, 1965.-467 с.

3. Бъчваров С. Механика, ч.I. – С.: Стандартизация принт, 2001.-391 с.
4. Зоммерфельд А. Механика. – М.: РХД 2001.-368 с.
5. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965.-424 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1988.-215 с.
7. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961.-824 с.
8. Писарев А., Парасков Ц., Бъчваров С. Курс по теоретической механике, ч.I. – С.: Техника, 1974.-427 с.
9. Розе Н.В. Теоретическая механика I. – Л.-М.: Гостехиздат, 1933.-428 с.
10. Синг Дж.Л. Классическая механика. – М.: Физматгиз, 1963.-448 с.
11. Стоянов А. Върху кинематиката на твърдо тяло. – Годишник на Държавната политехника, т.III, кн.I, С. 1950.
12. Стоянов А. Върху кинематиката на абсолютно твърдото тяло, II. – Годишник на ИСИ, т.V, С. 1952-1953.
13. Стоянов А. Теоретична механика, ч.II Кинематика и динамика. – С.: Наука и изкуство, 1953, 1956.
14. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. 667 с.
15. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. – М.-Л.:ОНТИ, 1937.-586 с.