УДК 629.123

А.В. МАЛАХОВ, А.Н. ПАЛАГИН, И.З. МАСЛОВ Национальный Университет Одесская Морская Академия

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ ПУЗЫРЕЙ ПРИ ЗАПОЛНЕНИИ ЗАМКНУТЫХ ОБЪЕМОВ

В данной работе рассматривается движение крупных объемов воздуха в воде при условии динамического воздействия со стороны стенок сосуда, в котором они находятся. При анализе процесса балластировки судов рассмотрены теоретические методы и результаты моделирования разрушения воздушных объемов в воде. Установлено, что удаление воздуха при определенных условиях может положительно влиять на процесс качки судна, приводя к улучшению его эксплуатационных характеристик.

Ключевые слова: паразитный воздух, балластная вода, корпус судна, ударные струи.

О.В. МАЛАХОВ. А.М. ПАЛАГІН. І.З. МАСЛОВ Національный Університет Одеська Морськая Академія

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РУЙНУВАННЯ ПОВІТРЯНИХ ПУХИРІВ ПРИ ЗАПОВНЕННІ ЗАМКНУТИХ ОБ'ЄМІВ

В даній роботі розглядається рух великих об'ємів повітря у воді за умови динамічної дії з боку стінок ємності, в якій вони знаходяться. При аналізі процесу баластування розглянуті теоретичні методи і результати моделювання руйнування повітряних об'ємів в воді. Встановлено, що видалення повітря при певних умовах може позитивно впливати на процес хитавиці судна, призводячи до поліпшення його експлуатаційних характеристик.

Ключові слова: надлишкове повітря, баластна вода, корпус судна, ударні струмені.

A.V. MALAHOV, A.N. PALAGIN, I.Z. MASLOV National University Odessa Marine Academy

SIMULATION OF THE PROCESS OF DESTRUCTION OF AIR BUBBLES WITH COMPLETE VOLUMES FILLING

In this work, it was consider the movement of large volumes of air in water under the condition of dynamic action from the walls of the vessel in which they are located.

During analyzing the process of ships ballasting, theoretical methods and results of simulation of the destruction of air volumes in water are considered. It is established that air removal under certain conditions can positively influence the rolling process of the vessel, leading to an improvement in its operational characteristics.

Keywords: Stray air, ballast water, hull, Shock air jets.

Постановка проблемы

Транспортные суда погружного типа Semi-Submersible Heavy-Lift являются уникальными по назначению своего использования. Их специфические особенности при погружении или всплытии во время грузовых операций всегда приводят к одной и той же проблеме – возникновению и дальнейшему хаотическому движению воздушных полостей внутри заполненных водой танков. Вследствие большого объема таких полостей их инерционные характеристики во время движения внутри объема жидкости могут приводить к усилению качки судна, давать высокие дополнительные нагрузки на корпус или приводить к возникновению аварийных ситуаций с отрицательным исходом – потерей груза.

Решение научных задач, связанных с движением газовых пузырей в замкнутых объемах с жесткими границами рассматривалось в различных технических работах [1-4]. Для судов погружного типа научное решение проблемы устранения паразитных объемов воздуха внутри балластных танков, заполненных водой не рассматривалась вообще.

Анализ последних исследований и публикаций

Практически все работы, посвященные плаванию воздушных пузырьков в жидкостях, в основном относятся к задачам механического равновесия [3], тепломассообмена [9], поведению псевдоожиженного слоя [2]. Анализ литературных источников по этой тематике, позволяет сделать вывод об отсутствии научных работ, в которых рассматривается движение крупных объемов воздуха в воде при условии динамического воздействия со стороны стенок сосуда в котором они находятся.

Поведение жидкости с газовыми пузырьками отличается от случая движения чистой жидкости. Это отличие просматривается в образующихся гидродинамических структурах, которые сменяют друг друга по мере роста скорости потока или движения газовых пузырьков в нем [5]. Характерным примером этих структур является рис. 1. Важное значение также имеет плотностное соотношение между газожидкостной фазой в движущемся потоке.

Данные о движении воздушного пузырька в жидкости могут быть получены на основании динамической теории. В основе теории лежит определение динамических сил, действующих со стороны жидкости на пузырек [10].Воздушный пузырек и окружающая его жидкость рассматриваются как одна цельная динамическая система. Увеличение массы пузырька учитывается путем роста инерционной составляющей. Характерным примером практического использования этой теории является решение задачи о движении сферы внутри жидкости в сторону стенки в плоскости, которая к ней перпендикулярна.

Поскольку любое морское судно постоянно находится на волнении то движение в воде паразитного воздуха должно рассматриваться, как колебательное. Рассмотрим случай. Если внутри балластного танка длина половины волны, двигающейся от одной до другой стенки, меньше глубины наполнения танка, при амплитуде колебаний A_r и фазе колебаний ε_r свободное колебание воды, а следовательно и паразитного воздушного пузыря, в балластном танке может описываться уравнением

$$\xi = A_r \sin \frac{r\pi x}{l} \cos \left(\frac{r\pi ct}{l} + \varepsilon_r \right),\tag{1}$$

где ξ – продольное перемещение волны, м; A_r – амплитуда колебаний, м; ε_r – фаза колебаний; r – параметр колебаний (целое число); l – длина канала (для поперечных колебаний это ширина, а для продольных колебаний это длина судового балластного танка), м; c – скорость движения волны, м/с.

При медленных колебаниях, их параметр можно принимать равным r=1. В этом случае период колебаний воздушного объема, при проходе двойного расстояния от одной стенки танка до другой и обратно равен

$$x = \frac{2l}{c},\tag{2}$$

где f – высота волны, м; h – глубина жидкости, м.

Наиболее качественные результаты движения воздушного пузырька в жидкости могут быть получены с использовании комбинированного подхода Эйлера–Лагранжа [4], когда моделирование газо– водяного потока позволяет воспроизводить формирование и эволюцию образующихся гидродинамических структур.

С механической точки зрения разрушение в воде сферического воздушного пузыря напрямую определяется взаимной реакцией сил поверхностного натяжения и тяжести. Для воздушного пузыря в воде условие пространственной устойчивости к разрушению может быть сформулировано при помощи числа Бонда

$$Bo = \frac{2gR^2}{2\alpha} \ll 3 \tag{3}$$

Поскольку сферическую форму воздушный пузырь в жидкости может иметь только в тех случаях, когда его диаметр не превышает 18 мм [3], то его форма будет иметь вид медузообразных структур, которые наиболее наглядно показаны на рис. 1. Для такой формы важно знать величину минимальной толщины воздушного пузыря, после которой будет происходить его разрушение.

Особый интерес представляет собой оценка величины коэффициента гидравлического трения λ при движении двухфазного потока, состоящего из воздуха и воды. При рассмотрении балластного танка как плоского канала этот коэффициент может быть рассчитан по выражению, взятому из работы [8]

$$\lambda = 2k_1/B,\tag{4}$$

где составной коэффициент В рассчитывается как

$$B = \frac{Re}{1 + \frac{n_1}{32}Re + \frac{\left(\rho g - \frac{k_2 \eta w_2}{l_2^2}\right)\mu_k D^2}{32 \eta w_0}},$$
(5)

где k_1 – коэффициент геометрической формы течения (круглая труба $k_1=32$, плоское течение в прямоугольном канале $k_1=68$); n_1 – коэффициент пропорциональности составляющий величину суммарного коэффициента местных потерь; Re – число Рейнольдса; ρ – плотность воды, кг/м³; k_2 – коэффициент формы дисперсной составляющей (для сферического пузыря $k_2=12$); η – динамическая вязкость воды, Па·с; w_2 –скорость движения воздушного пузыря в канале, м/с; w_0 – средняя скорость по сечению канала, м/с; l_2 – характерный размер воздушного пузыря, м; μ_k – объемная концентрация воздуха по отношению к объему воды; D – диаметр канала ($D=4F/\Pi$), м.



Рис. 1. Виды структурированных газовых элементов в жидкости [4] 1 – структурированный слой; 2 – пузырчатые объемы; 3 – медузообразные структуры; 4 – турбулентные структуры; 5 – быстрорастворяющиеся пузыри; 6 – псевдоожиженный кластер

Основная цель исследований заключалась в теоретическом решении задачи о разрушении паразитного воздушного пузыря ударными струями при заполнении судового танка балластной водой.

При составлении математической модели движения двухфазного потока была использована гипотеза о взаимопроникающих континуумах, когда законы сохранения массы, импульса и энергии записываются отдельно для каждой фазы. Сами фазы рассматривались на макроскопических уровнях, превышающих размеры их молекулярных структур. Течение воздушного пузыря вдоль поверхности воды рассматривалось в плоской постановке.

Схематически при составлении математической модели было принято, что моделируемое течение состоит из трех составляющих потоков:

– рабочей ударной струи воздуха с повышенным давлением, которая движется от верхней стенки танка в сторону паразитного воздушного объема;

 движущегося в произвольном горизонтальном направлении (влево или вправо) вдоль поверхности воды воздушного пузыря;

– движущейся балластной воды в танке в сторону верхней стенки танка с волнением поверхностного слоя.

Первый поток всегда характеризуется постоянной скоростью и давлением, что на практике соответствует заданию идентичных начальных и граничных условий в соответствующих расчетных узлах.

Движение внешней границы второго потока, т.е. оболочки воздушного пузыря, задавалось на начальном этапе путем ввода параметра качки судна. Движение газовых частиц, т.е. самого воздуха внутри воздушного пузыря может воспроизводиться при помощи уравнения, отображающего работу всех внешних сил, приложенных к воздушному объему [4]

$$m_{\rm B}\frac{dv}{dt} = m_{\rm B}g + \frac{V\beta}{(1-\varepsilon)}(U-v) - V\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}\right),\tag{6}$$

где m_{e} – масса частицы, κc ; v – скорость частицы, m/c; β – коэффициент, отражающий внутрифазовый переход, $\kappa c/(m^{3}c)$; ε – показатель степени однородности потока (воздушного); U – локальная скорость частицы, m/c; V – объем частицы, m^{3} ; P – давление, Πa .

В уравнении (6) второе слагаемое представляет собой силу сопротивления. Присутствующий в правой части уравнения во втором слагаемом коэффициент β соответствует моменту внутрифазного перехода при взаимодействии потока воды с потоком воздуха. Последнее слагаемое отвечает за движение, вызываемое градиентом давления в потоке.

В случае невысокой степени однородности (т.е. при наличии пустот без частиц воздуха) воздушного потока, когда *ε*<0.8 он определяется следующим образом [4]

$$\beta = 150 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon} \frac{\mu}{D_p^2} + 1.75(1-\varepsilon) \frac{\rho}{D_p} |U-v|,$$
⁽⁷⁾

(10)

где D_p – диаметр частицы (от 0.009 до 0.0095), *м*; μ , ρ – динамическая вязкость и плотность воздуха, Па·с и кг/м³. Если поток является однородным, т.е. при ε >0.8 коэффициент β может быть найден как [4]

$$\beta = \frac{3}{4} C_d \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{D_p} \rho(U-\nu) \varepsilon^{-2.65}, \tag{8}$$

где *C*_{*d*} – коэффициент сопротивления;

при Re<1000

при Re>1000

Коэффициент сопротивления, входящий в выражение (8), рассчитывается в зависимости от параметра Рейнольдса как [4]:

$$C_d = \frac{24}{Re} (1 + 0.15Re^{0.687})$$

$$C_d = 0.44$$
(9)

Параметр Рейнольдса, входящий в уравнение (9), рассчитывается по выражению [4]:

$$Re = \frac{\varepsilon \rho |U - v| D_p}{\mu},$$

Движение внешней границы второго потока, задается путем ввода параметра качки судна.

Третий поток задаётся изменяющимся одновременно по высоте и совершающим волновые колебательные движения в поперечной плоскости.

В дополнение к уравнению (6) необходимо использовать два определяющих уравнения газовой динамики – уравнение неразрывности и уравнение момента газовой фазы. Для случая изотермального двумерного движения они могут быть соответственно записаны в следующем виде:

$$\frac{d(\epsilon\rho)}{dt} + (\nabla \cdot \epsilon\rho v) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d(\varepsilon\rho\nu)}{dt} + (\nabla\cdot\varepsilon\rho\nu\nu) = -\varepsilon\nabla P - S_p - (\nabla\cdot\varepsilon\tau) + \varepsilon\rho g, \tag{12}$$

где S_p – слагаемое, отвечающее за передачу момента в системе движущихся частиц воздуха, H/m^3 ; τ – тензор вязких напряжений, $\kappa c/(mc^2)$.

Сила реакции потока при возникновении в движущемся потоке сопротивления определяет передачу момента в системе частиц воздуха. Общее выражение, позволяющее найти величину S_p с учетом силы реакции имеет вид [4]

$$S_p = -\frac{1}{V} \int \sum_{0}^{N} \frac{v\beta}{(1-\varepsilon)} (U-v_a) \,\delta \ (r-r_a) dV, \tag{13}$$

где v_a – текущая скорость частицы в расчетном узле, м/с; δ – дельта-функция; r, r_a – полный и частный (спроецированный на направление движения частицы) радиус вектор относительного положения частицы, м.

Входящая в уравнение (12) величина тензора вязких напряжений может быть найдена по приближенному выражению [4]

$$\tau = \frac{2}{3}\mu(\nabla v) + \mu((\nabla v) + (\nabla v)^T), \tag{14}$$

где T – текущая температура потока, ${}^{0}C$.

Третий поток, соответствующий движению всей массы балластной воды при заполнении танка, задается изменяющимся одновременно по высоте и совершающим волновые колебательные движения в поперечной плоскости.

Движение вверх может описываться линейными законами вида

$$y = Hkt \tag{15}$$

$$v = const$$
 (16)

$$P = P_a + \rho g y, \tag{17}$$

где *у* – координата положения верхнего уровня границы балластной воды в танке, м; *k* – коэффициент скорости заполнения (диапазон изменения составляет от 0,1 до 1); *t* – время, с.

Колебание поверхности балластной воды в танке необходимо задавать по закону (1). Ограничение на его использование накладывается величиной амплитуды колебаний A_r , которая ограничивает число расчетных углов, отображающих колебание поверхности. Колебательное движение необходимо задавать только в той полосе расчетных узлов, численно равной величине A_r .

В качестве граничных условий необходимо на всех границах, задавать условие не протекания движущегося потока, равного нулю вектора скорости во всех расчетных узлах, лежащих на жестких границах расчетного объема

$$v = 0 \tag{18}$$

Согласно данным работы [4] величина полной скорости на границе раздела между воздухом и водой должна корректироваться на компрессионную оправку. Ее величина определяется степенным отношением градиента давления к градиенту плотности двух сред в виде

$$V_{\kappa} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^{0.5} \tag{19}$$

Одним из критериев качества выполняемых расчетов должно являться условие нулевой разности суммы всех проекций скорости на поверхности разрыва. В этом случае при переходе с одной среды на другую, т.е. с воды на воздух или наоборот должно выполняться следующее равенство

$$(V_{x1} - V_{x2}) + (V_{y1} - V_{y2}) = 0$$
⁽²⁰⁾

В уравнении (2.31) номера индексов соответствуют двум моделируемым средам, например индекс 1 – воде, а индекс 2 – воздуху.

Формулирование цели исследования

Дискретная расчетная схема для решения уравнений математической модели была разработана с учетом всех особенностей моделируемого процесса движения пузыря по поверхности воды внутри балластного танка. В отличии от классических подходов, направление численного счета было выбрано совпадающим с направлением подачи разрушающей струи воздуха, а не с уменьшением глубины моделируемой воды в танке.

На рисунке 2. отображены основные элементы использованной расчетной схемы. Задача решалась в плоской постановке при которой вдоль двух осей координат откладывались расчетные сечения. Вдоль оси ОХ –расчетные сечения: 1, 2, 3,., N–1 и N моделировали ширину танка. Вдоль оси ОУ –расчетные сечения 1, 2, 3,., M–1 и M моделировали высоту танка.



Изменение уровня поверхности балластной воды по высоте балластного танка моделировалось в ходе решения с использованием закона следующего вида

$$H = \left(\frac{h}{M}j\right)^k \tag{21}$$

где h – полная высота танка, м; j – текущий индекс, показывающий номер расчетного сечения в направлении оси ОҮ; k – величина, отображающая скорость заполнения балластного танка забортной водой. В случае подачи воды в балластный танк без использования насосов, т.е. самотеком, величину показателя степени k следует брать равной k = 0.1 - 0.7, а при использовании при балластировке танков нагнетательного оборудования k = 1 - 4.7.

Расчетные точки на верхней стенке балластного танка могут использоваться для моделирования сопловых источников подачи сжатого воздуха. При численном расчете всего процесса точное место расположения паразитного воздуха по отношению к стенкам балластного танка всегда известно, также как и его расстояние по отношению к верхней стенке танка.

Основные характеристики ударных воздушных струй в расчетных узлах, моделирующих сопловые аппараты задавались следующим образом:

 – скорость потока в струе принималась соответствующей равномерному плоскому потоку и в каждом расчетном узле принималась постоянной;

 давление воздуха в струе для расчетных точек каждого отдельно взятого вертикального сечения принималось постоянным. Расчет процесса устранения паразитного воздуха при заполнении балластного танка производился с использованием двух различных алгоритмов задания начальных условий. В первом случае считалось, что наполнение балластного танка водой производится от его нижней стенки. В этом случае скорость потока воды задавалась только в самом нижнем расчетном сечении. В каждом расчетном узле она принималась постоянной. Во всех остальных точках моделируемого расчетного объема задавался неподвижный поток, значение плотности которого принималось равным плотности воздуха. Давление воздуха во всех узлах расчетного объема принималось равным атмосферному.

Во втором случае задания начальных условий моделирование паразитного воздушного пузыря осуществлялось по схеме заполненного танка. В выбранной области задавался исходный объем паразитного воздуха. А во всех остальных расчетных узлах задавался поток воды совершающий волновое движение.

Изложение основного материала исследований

При теоретическом моделировании процесса разрушения паразитного воздушного пузыря, главным вопросом является скорость уменьшения его объема при воздействии на него разрушающих струй воздуха под давлением. Эти результаты были получены в ходе теоретических исследований и они показаны на рисунке 3. На графике, на оси ординат отложены значения суммарного объема паразитного воздуха в ходе его разрушения, а по оси абсцисс расчетное время рабочего процесса. Все четыре расчетные кривые соответствуют случаю, когда давление ударной воздушной струи разрушающей пузырь было неизменным и составляло 0,3 МПа.

На рис. 3 видно, что начиная с моментов времени, соответствующих диапазону от 1,8 до 2,2 минуты все кривые, для разных объемов паразитного пузыря (1- 33 м³; 2 - 27 м³; 3- 21 м³; 4-18 м³) начинают изменяться практически одинаково, что указывает на полностью идентичный характер уменьшения моделируемого воздушного объема. Он соответствует быстрому разрушению на поверхности воды воздушного пузыря, поскольку наступление этого режима приводит к резкому сокращению объема паразитного воздуха от двух до трех с половиной раз. Именно на этом участке изменения всех кривых можно говорить о срабатывании механизма мгновенного изменения всех гидродинамических показателей процесса. Колебания двухфазного потока, а значит и изменения основных рабочих характеристик судна – его остойчивости, угла неконтролируемого крена и т.п. Последующее изменение всех кривых показывает, что механизм разрушения воздушного пузыря начинает становиться одинаковым во всех случаях. Начиная приблизительно с седьмой минуты все кривые практически совпадают между собой. Как видно на рис. 3 на этом временном уровне механизм разрушения пузыря прекращается.

Скорость разрушения паразитного воздушного пузыря в балластном танке напрямую зависит от способа формирования разрушающих его воздушных струй. Глубина их проникновения в воздушный объем и воду, а также степень длительности воздействия определяет все процессы последующей турбулизации границы раздела двух сред.



Рис. 3. Уменьшение объема паразитного воздуха в балластном танке при давлении ударной воздушной струи равном *P*_{v∂} = 0,3 *МПа*. 1-33 м³; 2 - 27 м³; 3- 21 м³; 4-18 м³)

В ходе экспериментов было изучено влияние величины ударного давления в воздушной струе на скорость разрушения воздушного пузыря. Эти результаты показаны на рисунке 4.Они соответствуют нулевому углу атаки ударной струи, т.е. случаю, при котором ось ударной струи была перпендикулярна поверхности уровня балластной воды в танке. Расчет производился для значения начального объема паразитного пузыря равного 33 м³.

Из приведенных на рис. 3 – 4 расчетных данных разных объемов паразитного пузыря (1- 33 м³; 2 - 27 м³; 3- 21 м³; 4-18 м³) может быть сделан вывод о том, что давление ударной струи оказывает влияние только на начальный процесс разрушения воздушного пузыря. Как видно на графиках на первой стадии, в течении первых двух минут после начала подачи ударной струи происходит резкое уменьшение объема воздушной пробки.

Как видно на графиках, в течении первых двух минут после начала подачи ударной струи происходит резкое уменьшение объема воздушной пробки. На второй стадии, влияние величины давления перестает сказываться.

В этом случае при уменьшении первоначального воздушного объема наступает процесс разделения получившихся при разбивке новых дискретных воздушных пробок (объем которых мал по сравнению с первоначальным пузырем) при значительно меньших величинах давления.

На рис. 4 видно, что начиная с величины условной временной границы равной 4,5 минуты для разрушения воздушных пузырей требуется значительно меньшее давление – не 0,5 МПа, а 0,3МПа.

В ходе теоретических исследований также был рассмотрен вопрос влияния угла атаки ударной воздушной струи, на качество процесса разрушения. В этом случае в качестве оценочного критерия использовалась площадь фронтальной поверхности взаимодействия струи с границей раздела сред. Эта площадь рассматривалась в той части пространства, в которую переместится поверхность воздушного пузыря через 0,01 секунды. Отсчет изменения угла атаки ударной струи производился от полностью вертикального ее положения.

В ходе вычислительных экспериментов было установлено, что в случае, когда угол атаки становится более острым, а плоскость струи увеличивается то под процесс взаимодействия поверхности раздела пузыря и поверхности воды отводится большая площадь. Само понятие такой площади является величиной условной, поскольку в процессе разделения начального воздушного пузыря на ряд мелких этот параметр постоянно изменяется.



Рис. 4. Влияние величины давления ударной воздушной струи на время уменьшения объема паразитного воздуха в балластном танке

Результаты расчета площади взаимодействия показаны на рисунке 5, где на оси ординат показано безразмерное соотношение текущей площади пузыря ST к его начальной площади SH. Все отображенные данные соответствуют величине площади взаимодействия взятой в момент времени равный 0,1 секунды, т.е. фактически в момент начала разрушения паразитного воздушного объема. Оба графика позволяют сделать идентичный вывод – при углах атаки воздушной струи изменяющихся в диапазоне от 1 до 14 градусов величина площади взаимодействия остается высокой. Степень турбулизации поверхности воды в балластном танке оказывает большое влияние на характер ее последующего взаимодействия с поверхностью паразитного воздушного пузыря. Возникающая гидродинамическая неустойчивость приводит к более качественному сокращению его объема.



Рис. 5. Влияние угла атаки ударной струи на площадь взаимодействия границы раздела воздуха с водой в момент времени равный 0,1 секунды

В ходе расчетов был изучен характер изменения площади поперечного сечения паразитного воздушного пузыря в зависимости от времени его разрушения. Основное уменьшение объема пузыря при его разрушении происходит в среднем через 0,25 секунды, когда ударная струйка воды проходит через его толщину. Это турбулизирует всю поверхность раздела воздуха и воды и вызывает неустойчивость Релея–Тейлора вдоль всей поверхности пузыря.

Выводы

1. На основе динамической теории установлен факт скопления большей части паразитных объемов воздуха в угловых зонах балластных танков.

2. Математическая модель и схема ее решения подразумевает уничтожение паразитных воздушных пузырей в балластных танках.

 Давление ударной струи оказывает влияние только на начальный процесс разрушения паразитного воздушного пузыря в балластном танке. В течении первых двух минут после начала её подачи происходит резкое уменьшение объема воздушной пробки.

Список использованной литературы:

- 1. Лаптев А.Г. Модели переноса и эффективность жидкостной экстракции /Лаптев А.Г.- Казанский государственный энергетический университет 2005.
- 2. Geldart, D. Types of gas fluidization./ Geldart, D. Powder Technology, 7, 285. 1973.
- 3. Саранин В.А. Равновесие жидкостей и его устойчивость / Саранин В.А.-. М. Институт компьютерных исследований. 2002, 144 с.
- 4. J. Li. Euler–Lagrange simulation of flow structure formation and evolution in dense gas–solid flows. / J. Li. Enschede, 2002. P. 212.
- 5. Григорьева И.В. Исследование эволюции пространственного газового пузыря в идеальной несжимаемой жидкости./ Григорьева И.В. Вестник Кемеровского государственного университета., Выпуск 4, Кемерово, 2000, С. 123128.
- Киселев С.П., Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах./ Киселев С.П., Руев Г;А., Трунев В.М., Фомин В.М., Шавалиев М.Ш. Новосибирск: ВО "Наука". 1992. 261 с.
- Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Под ред. М. О. Штейнберга. 3-е изд., перераб. и доп. – М. Машиностроение, 1992. – 672 с.
- Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей./ Корнфельд М. М. Л.: Государственное издательство технико теоретической литературы, 1951. – с.106.
- 9. Брюханов О.Н. Тепломассообмен, / Брюханов О.Н. Шевченко С.Н. Высшее образование, Издательство Инфра-М, 2012, ISBN 978-5-16-004803-1 500 с.
- Лэмб Г. Гидродинамика./ Лэмб Г. Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры. М.-Л. 1947. 928 с.