УДК 539.377:539.381

А.О. КАРАЄВ
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
О.О. СТРЕЛЬНІКОВА
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ В АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

У роботі ілюструється використання методу граничних елементів для розв'язання задач статики в теорії пружності, зокрема для систем з нерівномірним розподілом температури по об'єму. Отримано рівняння, що описують рівновагу твердих тіл у випадку аксіальної симетрії. Математична модель була реалізована на мові програмування С++.

Ключові слова: метод граничних елементів, теорія пружності, еліптичні інтеграли.

А.А. КАРАЕВ
Харьковский національный университет имени В.Н. Каразина
Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА
Харьковский національный университет имени В.Н. Каразина
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе иллюстрируется применение метода граничных элементов для решения задач статики в теории упругости, в частности для систем с неравномерным распределением температуры по объему. Получены уравнения, которые описывают равновесие твердых тел в случае осевой симметрии. Математическая модель была реализована на языке программирования С++.

Ключевые слова: метод граничных элементов, теория упругости, эллиптические интегралы.

A.O. KARAIEV
V. N. Karazin Kharkiv National University
O.O. STRELNIKOVA
V. N. Karazin Kharkiv National University
The A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine

BOUNDARY ELEMENT METHOD IN AXISYMMETRIC TASKS THEORY OF ELASTICITY

Current article illustrates the application of boundary element method in static tasks of theory of elasticity, particularly to systems with not-uniform temperature distribution. Equations that describe the equilibrium of an axisymmetric solid body are obtained. Mathematical model was implemented on programming language C++.

Keywords: boundary element method, theory of elasticity, elliptic integrals.

Постановка проблеми

В сучасних теоретичних і прикладних дослідженнях актуально стоїть питання побудови математичного і програмного апарату для розв'язання задач механіки наноматеріалів. Наночастинки у такому підході вважаються елементами, що утворюють кусково-однорідне середовище з власними значеннями фізичних та механічних характеристик. У кожному окремому об'єкті можна застосовувати принцип континуалізації, тобто вважати кожен однорідний об'єкт суцільним середовищем. Взаємодія між цими об'єктами виражається за допомогою граничних умов, які формулюються, оцінюючи характер механічної взаємодії. Для того, щоб зрозуміти фізичні властивості кожного з елементів, що складають суцільну систему, необхідно провести аналіз процесів, використовуючи принципи молекулярної структурної механіки з застосуванням різноманітних потенціалів, що описують міжатомну взаємодію. В результаті такого підходу можна отримати значення модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона та інших величин, характерних для механіки суцільних середовищ. Результати таких досліджень вже відомі науці [5,с.27].

Щоб визначити границю використання даного підходу, необхідно визначити для себе характерні геометричні параметри, що характеризують наноматеріали. Введемо три параметри - h, h^* та L. Параметр h характеризує внутрішню структуру матеріалу. Величина h^* виражає середню відстань між центрами частинок у внутрішній структурі матеріалів. Параметр L характеризує механічні процеси, що розглядаються, тобто характеризує зміну механічних полів по відношенню до просторових координат[5,с.28]. Тоді границі застосування вищезазначеного методу можна сформулювати наступним чином:

$$h \approx 1{,}5\,\dot{\mathrm{A}}, h^* \approx 1\text{нм} \Rightarrow L \geq 10\text{нм} \tag{1}$$

Ефективно в початкових наближеннях вважати наноелементи аксіально-симетричними циліндричними поверхнями.

Метод граничних елементів є одним з найпопулярніших методів чисельного моделювання різних задач механіки та фізики. Величезним досягненням, що приваблює вчених з усього світу, є можливість розглядати не сам регіон, у якому необхідно розв’язати задачу, а його границю. Цей факт і використовується авторами у публікації у контексті використання даного методу для теорії пружності.

Існує широкий клас задач, коли деформації супроводжуються змінами температури [1,с.28]. Зміна температури може виникати як в результаті самої деформації, так і через сторонні причини. Інтегральні рівняння при наявності температурного члена у законі Гука будуть описуватися рівняннями з наявністю члена, що інтегрується за об’ємом. Однак цей факт не приносить у задачу жодних обчислювальних труднощів, так як у стаціонарному випадку рівняння для температури не залежить від вектора переміщення. Температура виступає відомою функцією координат після розв’язання рівняння Лапласа.

Математична модель

Закон Гука виражає зв'язок між тензором напружень та тензором деформації. У випадку, коли тіло нагріто нерівномірно, закон Гука має наступний вигляд:

$$\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik} + \lambda u_{ll}\delta_{ik} - K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} \tag{2}$$

де σ_{ik} - тензор напружень, u_{ik} - тензор деформацій, μ, λ - коефіцієнти Ламе, K - ізотермічний модуль всестороннього стиснення, α - коефіцієнт теплового розширення, T_0 - температура ненагрітого тіла.

Основне рівняння, яке необхідно розв’язати – рівняння рівноваги твердого тіла:

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\vec{u} = K\alpha\nabla(T - T_0) \tag{3}$$

Для температури, в свою чергу, має виконуватися рівняння Лапласа:

$$\Delta(T - T_0) = 0 \tag{4}$$

Гранична умова для вектору переміщення:

$$2\mu\nabla(\vec{u}, \vec{n}) + \lambda\vec{n}\mathrm{div}\vec{u} = \vec{p} + K\alpha(T - T_0)\vec{n} \tag{5}$$

Дана система рівнянь є справедливою у стаціонарному випадку. Як помітно, температура виступає відомою функцією координат після розв’язання рівняння Лапласа.

Інтегральне рівняння

Для використання методу граничних елементів, необхідно отримати інтегральний вигляд рівняння рівноваги твердого тіла. Необхідно побудувати фундаментальне рішення:

$$\mu\Delta\vec{u}^* + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\vec{u}^* = -\delta(\vec{r} - \vec{\xi})\vec{e} \tag{6}$$

Фундаментальне рішення – це рішення наведеного рівняння при умові, що права частина описується сингулярною функцією – дельта-функцією.

Інтегрування рівняння рівноваги з фундаментальним рішенням після використання формули Остроградського-Гаусса дозволяє уникнути інтегралів за об’ємом та залишити лише інтеграли за контуром:

$$\mu\int_\Omega \vec{u}^*\Delta\vec{u}d\Omega + (\lambda + \mu)\int_\Omega \vec{u}^*\nabla \mathrm{div}\vec{u}d\Omega = 0 \tag{7}$$

$$e_i(\xi)u_i(\xi) + \oint_\Gamma p_i^* u_i d\Gamma = \oint_\Gamma u_i^* p_i d\Gamma \tag{8}$$

Зручно перейти від вектору рішення до матриці фундаментального рішення:

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_{ij}^* e_j \\ p_i^* &= p_{ij}^* e_j \end{aligned} \tag{9}$$

Тоді інтегральне рівняння трансформується у наступне:

$$u_i + \oint_\Gamma p_{ij}^* u_j d\Gamma = \oint_\Gamma u_{ij}^* p_j d\Gamma \tag{10}$$

Фундаментальне рішення у загальному випадку має вигляд:

$$u_{ij}^* = \frac{(\lambda + \mu)r}{8\pi(\lambda + 2\mu)}\left((3 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu})\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2}\right) \tag{11}$$

де $r_i = x_i - \xi_i$ - відстань від точки спостереження до точки, у якій дельта-функція набуває значення нескінченності.

Аксіально-симетричний випадок

Для побудови фундаментального розв'язку у циліндричній системі відліку скористаємося матрицею переходу із декартової системи у циліндричну:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Записуючи елемент поверхні у циліндричній системі координат можна помітити, що скориставшись аксіальною симетрією можна одразу проінтегрувати фундаментальний тензор рішень за кутом [3,с.46]. Тензор фундаментального рішення у циліндричній системі координат матиме вигляд:

$$u_{ij}^{*} = A(x_i - \xi_i)K(k) + B(x_i - \xi_i)E(k) \tag{13}$$

Еліптичні інтеграли першого та другого роду:

$$\begin{gathered} K(k) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \\ E(k) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi \end{gathered} \tag{14}$$

Аргумент еліптичного інтегралу задається співвідношенням:

$$k = 2\sqrt{\frac{\rho(\xi_i)\rho(x_i)}{\left(\rho(\xi_i) + \rho(x_i)\right)^2 + \left(z(\xi_i) - z(x_i)\right)^2}} \tag{15}$$

Як помітно, повний еліптичний інтеграл першого роду має особливість у одиниці. Аргумент у нашій задачі ніколи одиницею не стане, але може неперервно до неї наближатися. Тому для цього інтеграла необхідно використовувати методи обчислення, що дають достатню точність. Для еліптичного інтеграла другого роду у дослідженні використовувалась стандартна шестивузлова формула Гаусса.

Для обчислення повного еліптичного інтеграла першого роду у роботі використовувалися властивості середнього арифметико-геометричного. Середнє арифметико-геометричне завжди обмежене своїми початковими членами, тому ця послідовність досить швидко сходиться з будь-якою заданою точністю:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \tag{13}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{4}\frac{2\sqrt{k}}{k-1}\frac{1}{\operatorname{agm}\left(1, \frac{2\sqrt{k} - k - 1}{k+1}\right)} \tag{14}$$

Система рівнянь

Першим кроком для чисельного розв'язання рівняння є дискретизація. Необхідно розбити поверхню на граничні елементи та провести чисельне інтегрування [3,с.50]. Нехай точка P - фіксована точка простору, точка Q - точка, за якою проводиться сума:

$$u_i(P) + 2\pi\sum_{l=1}^{N}\int_{\Gamma_l} p_{ij}^{*}(P,Q)u_j(Q)\rho(Q)d\Gamma_l = 2\pi\sum_{l}^{N}\int_{\Gamma_l} u_{ij}^{*}(P,Q)p_j(Q)\rho(Q)d\Gamma_l \tag{15}$$

Використовуючи відомі граничні умови можна скласти систему лінійних алгебраїчних елементів розміром $2N$x$2N$, де N - кількість елементів, на які було розбиту границю. Фундаментальна матриця рішень не є неперервною функцією у випадку, якщо фіксована точка P входить у проміжок інтегрування. Однак ця точка є точкою розриву першого роду, тому складнощів при інтегруванні не виникає – можна розбити проміжок інтегрування на два і на кожному використати вузлову формулу Гаусса, що і використовувалося у моделюванні.

Для розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь у дослідженні використовувався метод Гаусса з вибором ведучого елемента по матриці.

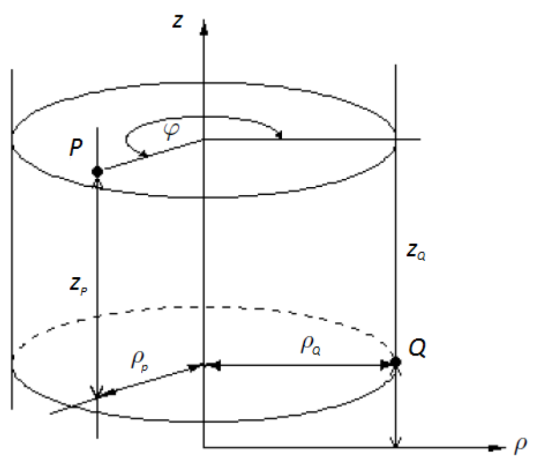

Рис. 1. Дискретизація у циліндричних координатах

Програмна реалізація

Для розв’язання аксіально-симетричних задач теорії пружності було розроблено систему, використовуючи мову програмування C++.

Головний елемент програми – клас boundary, що описує характеристики границі циліндричної поверхні:

```
class boundary
{
      double R; // радіус циліндра
      double H; //висота циліндра
      node *nodes; //вказівник на вузол
      unsigned m; //кількість вузлів на першому елементі границі
      unsigned N; //загальна кількість вузлів
      double sigma;
      double mu;
public:
      boundary(double r,double h,unsigned m1,unsigned n,cylinder_point *ub,cylinder_point *pb,double s, double mm); // конструктор
      node node_i(unsigned i); // доступ до певного вузла
      unsigned n() {return N;}
      ~boundary(); // деструктор
};
```

Допоміжний клас node описує стан кожного вузла: його координати та тип заданих граничних умов на ньому. Після проведення розрахунків він містить і розраховані значення невідомих.

У якості тесту була розв’язана задача розтягнення циліндру з постійним напруженням на верхній основі та фіксації нижньої основи циліндру.

На рисунках наведено графіки радіальної компоненти вектору переміщень на боковій поверхні циліндру та верхній основі.

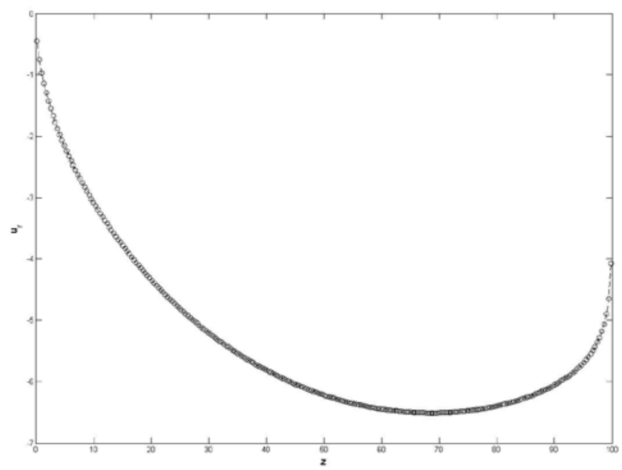

Рис. 2. Графік залежності радіальної компоненти вектору переміщень на границі від висоти

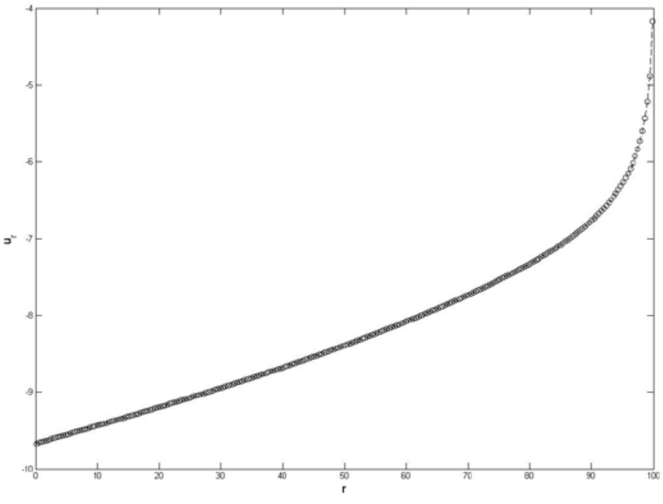

Рис. 3. Графік залежності радіальної компоненти вектору переміщень на границі від радіального напряму

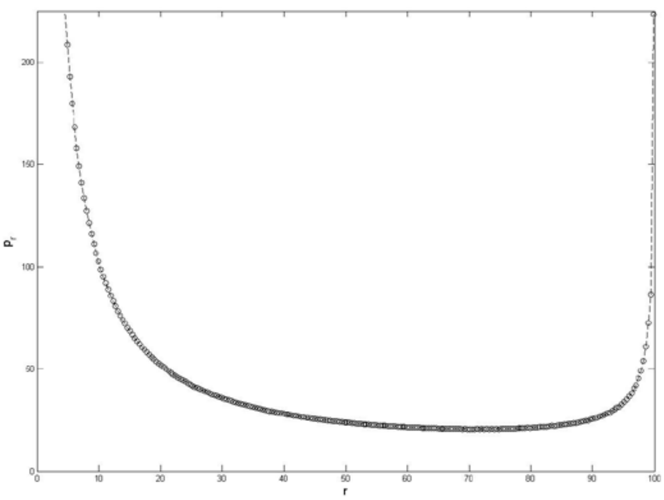

Рис. 4. Графік залежності радіальної компоненти вектору напружень на границі від радіального напряму

На рисунку 4 помітно, що при наближенні координати до нуля радіальна компонента вектора напруження наближається до нескінченності. Це відповідає зауваженню, наданому у [2, с.98], що потребує подальшого дослідження.

Висновки

Отриманий математичний апарат разом із створеним програмним комплексом дозволяє розв'язувати будь-які аксіально-симетричні задачі теорії пружності у межах використання методу.

Список використаних джерел

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Физматлит. — 2007. — 264 с.

2. Brebbia C. A. Boundary Element Techniques. — Springer. — 1984. — 466 с.

3. Stikan P. R. Tensores fundamentais da formulação dos problemas elásticos axissimétricos pelo método dos elementos de contorno.– Vitória.– 2006.– 113 p.

4. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка — М.: Наука. — 1966. — 260 с.

5. Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я. О построении основ механіки нанокомпозитов (обзор). – Киев: Прикладная механіка. – 2011, т. 47, №1, с. 4-61