

УДК 534.1:539.3

Н.В. СМЕТАНКІНА, С.В. УГРИМОВ, О.М. ШУПІКОВ, Н.В. ДОЛГОПОЛОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НЕСТАЦІОНАРНОГО ДЕФОРМУВАННЯ  
ШАРУВАТОГО ОСКЛІННЯ ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

*Запропоновано метод дослідження нестационарних коливань шаруватого оскління при ударному навантаженні. Метод ґрунтується на розвиненні шуканих функцій у тригонометричні ряди. Динамічна поведінка оскління досліджується в рамках двовимірної теорії шаруватих пластин. Модель ударної взаємодії базується на контактному законі Герца. Розглянуто коливання тришарового оскління при ударі твердим тілом. Результати розрахунку деформацій оскління добре узгоджуються з даними розрахунку на основі метода скінченних елементів та експериментальними даними.*

*Ключові слова:* шарувате оскління, ударне навантаження, нестационарні коливання.

Н.В. СМЕТАНКІНА, С.В. УГРИМОВ, А.Н. ШУПІКОВ, Н.В. ДОЛГОПОЛОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
СЛОИСТОГО ОСТЕКЛЕНИЯ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ**

*Предложен метод исследования нестационарных колебаний слоистого остекления при ударном нагружении. Метод основан на разложении искомым функций в тригонометрические ряды. Динамическое поведение остекления исследуется в рамках двумерной теории слоистых пластин. Модель ударного взаимодействия основана на контактном законе Герца. Рассмотрены колебания трехслойного остекления при ударе твердым телом. Результаты расчета деформаций остекления хорошо согласуются с данными расчета на основе метода конечных элементов и экспериментальными данными.*

*Ключевые слова:* слоистое остекление, ударное нагружение, нестационарные колебания.

N.V. SMETANKINA, S.V. UGRIMOV, O.M. SHUPIKOV, N.V. DOLGOPOLOVA

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine

**MODELING OF NONSTATIONARY DEFORMATION PROCESS OF LAMINATED GLAZING AT  
IMPACT LOADING**

*A method for analysis of non-stationary vibrations of laminated glazing at impact loading. The method is based on expansion of sought-for functions into trigonometrical series. Dynamical behavior of glazing is investigated within the framework of the two-dimensional theory of laminated plates. Model of impact interaction is based on the Hertzian contact law. Vibrations of a three-layer glazing are considered at impact by solid. Calculation results of strains are consistent with finite element method and experimental data.*

*Keywords:* laminated glazing, impact loading, non-stationary vibrations.

**Постановка проблеми**

Одним з основних конструктивних елементів транспортних засобів є шарувате оскління, яке може піддаватися інтенсивним динамічним навантаженням з подальшим крихким руйнуванням [1].

Найпоширенішими методами дослідження динамічної поведінки шаруватого оскління є чисельні методи, наприклад метод скінченних елементів (МСЕ) та метод граничних елементів. Теоретичні методи менш розроблені, що пов'язано зі складністю математичних моделей, які описують процес деформування таких оболонок при інтенсивних короткочасних впливах. Для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) оскління також застосовуються спрощені моделі шаруватих пластин або експериментальні дані [2]. Питання нестационарної динаміки шаруватих елементів залишаються недостатньо вивченими, що потребує подальшого розвитку та удосконалення методів розрахунку таких елементів.

**Аналіз публікацій за темою дослідження**

Через те, що теоретичне обґрунтування конструкторських рішень практично відсутнє у більшості випадків проектування шаруватого оскління транспортних засобів здійснюється на основі експериментальних даних шляхом емпіричного підбору пакету шарів [3]. Основними методами дослідження динамічного відгуку конструкції на ударні навантаження є чисельні методи, які пов'язані з дискретизацією розглядуваної системи, наприклад МСЕ [4]. Тому важливою задачею є розробка методів, які дозволяють подати розв'язок в аналітичному вигляді з урахуванням особливостей нестационарного деформування шаруватих конструкцій.

**Мета дослідження**

Метою роботи є розробка ефективного методу розрахунку нестационарних коливань шаруватого оскління при ударі твердим тілом.

**Математична модель шаруватого оскління.** Будемо розглядати скло як шарувату шарнірно оперту пластину, оскільки кріплення оскління здійснюється через гумовий ущільнювач до рамки, яка жорстко закріплюється у отворі. Шарувата пластину складається з  $I$  шарів сталі товщини  $h_i$ . Пластина віднесена до декартової системи координат, яка зв'язана із зовнішньою поверхнею першого шару. На координатній поверхні  $Ox_1x_2$  конструкція займає область  $\Omega$ , обмежену довільним контуром  $\Gamma$ . На оболонку діють нестационарні навантаження  $\mathbf{P} = \{p_j(x_1, x_2, t)\}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Припускається, що контакт між шарами виключає їхнє розшарування та взаємне проковзування.

Поведінка пластини описується рівняннями узагальненої теорії шаруватих пластин [5]

$$u_v^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_v + \sum_{k=1}^K \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{vk}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{vk}^i \right], \quad v = 1, 2,$$

$$u_3^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_3 + \sum_{\ell=1}^L \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^\ell u_{3\ell}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^\ell u_{3\ell}^i \right], \quad (1)$$

де  $h_j^k = (h_j)^k$ ;  $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$ ;  $\delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i$ ;  $i = \overline{1, I}$ ;  $u_\alpha^i$  ( $\alpha = \overline{1, 3}$ ) – переміщення точки  $i$ -го шару у на-

прямку осі  $Ox_\alpha$ ;  $u_v, u_3, u_{vk}^i, u_{3\ell}^i$  – коефіцієнти розвинення, які є функціями аргументів  $x_1, x_2, t$ ;  $K, L$  – максимальні степені поперечної координати для площинних ( $\alpha = 1, 2$ ) і поперечних ( $\alpha = 3$ ) переміщень точок  $i$ -го шару, які обираються в залежності від необхідної точності.

Прийняті кінематичні гіпотези при  $K=1, L=0$  еквівалентні гіпотезам Е.І. Григолоука та П. П. Чулкова, при  $K=1, L=1$  уточненій теорії першого порядку, при  $K=3, L=2$  – уточненій теорії висшого порядку [5].

Деформації шарів визначаються відповідно до формул Коші. Напруження і деформації у шарах пов'язані законом Гука. Рівняння руху пластини та граничні умови впливають з варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона з урахуванням гіпотез (1).

Рівняння руху в зусиллях та моментах для пластини мають вигляд [5]

$$\sum_{i=1}^I [L_\alpha^i - I_{\alpha 1}^i] + p_\alpha = 0,$$

$$N_{1\alpha,1}^{ik_\alpha} + N_{\alpha 2,2}^{ik_\alpha} - k_\alpha N_{\alpha 3}^{ik_\alpha-1} + h_i^{k_\alpha} \sum_{j=i}^{I-1} [L_\alpha^{j+1} - I_{\alpha 1}^{j+1}] - I_{\alpha k_\alpha+1}^i = 0, \quad (2)$$

де

$$L_1^i = N_{11,1}^{i0} + N_{12,2}^{i0}; \quad L_2^i = N_{22,2}^{i0} + N_{12,1}^{i0}; \quad L_3^i = N_{13,1}^{i0} + N_{23,2}^{i0};$$

$$I_{\alpha r}^i = \frac{\rho_i h_i^r}{r} \left( u_{\alpha 0,tt} + \sum_{k=1}^{K_\alpha} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k,tt}^j + \frac{r h_i^k}{k+r} u_{\alpha k,tt}^i \right] \right); \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad k = \overline{1, K_\alpha}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Кількість рівнянь та граничних умов залежить від числа шарів і дорівнює  $(2K + L)I + 3$ .

**Математична модель ударного імпульсу при ударі твердим тілом.** При дослідженні відгуку шаруватих конструкцій на ударний вплив система рівнянь, що описує поведінку пластини, інтегрується одночасно з рівнянням руху індентора й умовою сумісності переміщень, що враховує контактне зближення індентора і пластини. Через те, що удар який наносять уламки конструкцій або каміння, можна вважати низькошвидкісним, контактне зближення можна визначати на основі розв'язку задачі Герца про вдавнення кулі в пружний півпростір [6].

Нехай пластину розташована горизонтально. Удар наноситься кульовим індентором радіуса  $R$  і масою  $M$  по зовнішній поверхні першого шару пластини. Індентор у момент зіткнення з пластиною має швидкість  $V_z$ .

Якщо індентор скидається на пластину з висоти  $H$ , швидкість зіткнення може бути визначена за формулою

$$V_z = \sqrt{2gH},$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння.

Рівняння руху індентора має вигляд

$$Mz_{,tt} = Mg - F, \quad z(0) = 0, \quad z_{,t}(0) = V_z, \quad (3)$$

де  $z = z(t)$  – переміщення індентора;  $F$  – сила контактної взаємодії індентора та пластини.

Умова сумісності переміщень записується як

$$w_0 + \alpha - z \geq 0,$$

де  $\alpha$  – контактне зближення індентора та пластини в центрі площі контакту  $(x_0, y_0)$ ;  $w_0 = w(x_0, y_0, t)$  – прогин пластини в точці  $(x_0, y_0)$ .

Контакт індентора та пластини відбувається при перетворенні даної нерівності на рівність

$$w_0 + \alpha - z = 0.$$

Контактне зближення  $\alpha$  урахується на основі розв'язання задачі Герца про вдавнення кулі в пружний півпростір

$$\alpha = \kappa_1 F^{2/3},$$

де  $\kappa_1 = \left[ \frac{9(\theta_1 + \theta)}{256R} \right]^{1/3}$ ;  $\theta_1 = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1}$ ;  $\theta = \frac{4(1 - \nu^2)}{E}$ ;  $E, \nu$  – модуль Юнга й коефіцієнт Пуассона матеріалу, з якого виготовлений індентор;  $E_1, \nu_1$  – аналогічні характеристики матеріалу першого шару пластини.

Вважаємо, що контактний тиск розподіляється по круговій площадці радіусом  $a(t)$  за законом

$$p_3(x, y, t) = F_0(t) \left[ 1 - \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{a^2(t)} \right]^{1/2},$$

де  $x_0, y_0$  – координати точки дотику індентора й пластини.

Функція  $p_3(x, y, t)$  повинна задовольняти умові

$$F = \iint_S p_3 dS = \frac{2}{3} F_0 \pi a^2,$$

звідки

$$F_0 = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2}.$$

Радіус області контакту  $a(t)$  обчислюється по формулі

$$a(t) = \left[ \frac{3}{16} F(t) R (\theta + \theta_1) \right]^{1/3}.$$

Розв'язок рівняння руху індентора одержано за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Значення контактної сили визначається з умови сумісності переміщень на кожному кроці за часом.

**Метод розв'язання.** Метод розв'язання системи рівнянь (2) для прямокутних шарнірно опертих шаруватих пластин полягає у наступному. Переміщення і зовнішні навантаження розвиваються у ряди по функціям, які задовольняють граничні умови, в результаті чого задача про коливання шаруватої пластини зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для пластин, що мають складну форму у плані, для розв'язання використовується метод занурення [7]. Згідно з цим методом замість вихідної пластини розглядається допоміжна шарнірно оперта прямокутна пластинка з тією ж композицією шарів. В області  $\Omega$  допоміжна пластинка навантажена так само, як і вихідна пластинка. Тотожність НДС в області  $\Omega$  допоміжної пластинки стану вихідної пластини забезпечується шляхом додавання компенсуючих навантажень  $q_j^{\text{comp}}(\varphi, t)$ ,  $j = \overline{1, 3I + 3}$ , які неперервно розподілені вздовж контуру  $\Gamma$ .

Система (2) інтегрується методом розвинення розв'язку у ряд Тейлора [1, 7].

Розв'язання рівняння руху індентора [3] одержуємо на основі інтегрального перетворення Лапласа у вигляді

$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) + \frac{g}{2}(t - t_0)^2 - \frac{1}{M} \int_{t_0}^t F(\tau)(t - \tau)d\tau,$$

де  $t_0$  визначає початковий момент часу;  $z = z(t)$  – переміщення індентора;  $F$  – сила контактної взаємодії індентора та пластини;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Далі ділянка інтегрування  $[0, t]$  розбивається на  $S$  відрізків так, щоб  $t = S\Delta t$ .

Введемо позначення

$$t_s = s\Delta t, \quad z(t_s) = z_s,$$

де  $s$  – номер кроку за часом.

Покладається, що контактна сила постійна  $F(\tau) = F_s$  в межах кожного відрізка  $t_s \leq \tau \leq t_{s+1}$ . Значення  $F_s$  виноситься за знак інтеграла з урахуванням того, що  $t_0 = s\Delta t$ , одержуємо остаточний вираз для переміщення індентора у вигляді рекурентних співвідношень

$$z_{s+1} = z_s + z'_s \Delta t + \frac{1}{2} \left( g - \frac{1}{M} F_{s+1} \right) \Delta t^2, \quad z'_{s+1} = z'_s + \left( g - \frac{1}{M} F_{s+1} \right) \Delta t,$$

де  $z_s = 0$ ,  $z'_s = V_z$ ,  $V_z$  – швидкість зіткнення пластини з індентором.

Контактний тиск  $p_3(x, y, t)$ , розподілений по круговій площадці, при ударі кульовим індентором по прямокутній шарнірно опертій пластині подається у вигляді розвинення в тригонометричний ряд

$$p_3(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{3mn}(t) B_{3mn}(x, y), \tag{4}$$

$$\text{де } p_{3mn} = \frac{12F(t)}{AB\rho_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x_0}{A} \sin \frac{n\pi y_0}{B} \left( \frac{\sin \rho_{mn}}{\rho_{mn}} - \cos \rho_{mn} \right); \quad \rho_{mn} = \pi a(t) \sqrt{\frac{m^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2}};$$

$$a(t) = \left[ \frac{3}{16} F(t) R (\theta + \theta_1) \right]^{1/3}; \quad \theta_1 = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1}; \quad \theta = \frac{4(1 - \nu^2)}{E};$$

$E, \nu$  – модуль Юнга й коефіцієнт Пуассона матеріалу, з якого виготовлений індентор;  $E_1, \nu_1$  – аналогічні характеристики матеріалу першого шару пластини.

Значення контактної сили  $F_{s+1}$  визначається з умови сумісності переміщень індентора та пластини, яка є нелінійним рівнянням. З урахуванням виразів для коефіцієнтів розвинення (4) рівняння має вигляд

$$\kappa_2 F_{s+1} + \kappa_1 F_{s+1}^{2/3} + \kappa_3 = 0,$$

де

$$\kappa_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \pi_{33}^{mn} B_{3mn}(x_0, y_0) + \frac{\Delta t^2}{2M};$$

$$\kappa_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{3I+3} \Delta_{3k}^{mn} \Phi_{kmn}^s B_{3mn}(x_0, y_0) - z_s - z'_s \Delta t - \frac{g \Delta t^2}{2};$$

$$D_{mn} = \frac{12}{AB\rho_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x_0}{A} \sin \frac{n\pi y_0}{B} \left( \frac{\sin \rho_{mn}}{\rho_{mn}} - \cos \rho_{mn} \right).$$

**Аналіз результатів чисельних досліджень.** Для перевірки ефективності запропонованої методики розрахунку були проведені тестові розрахунки тришарового скла (305 x 305 мм) при ударі кулею  $M = 2$  г,  $R = 3,97$  мм на швидкостях 9,1 м/с, 12,2 м/с, 15,2 м/с і 18,3 м/с [8]. Зовнішні шари конструкції ( $h_1 = h_3 = 4,78$  мм), виготовлені зі скла силікатного з характеристиками  $E = 72$  ГПа,  $\nu = 0,25$ ,  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup> і з'єднані полівінілбутиралем ( $h_2 = 0,76$  мм) із  $E = 2,5714$  ГПа,  $\nu = 0,2857$ ,  $\rho = 1100$  кг/м<sup>3</sup> [8]. Характеристики кулі  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0,29$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

У табл. 1 наведені результати розрахунків максимальних значень деформацій посередині зовнішньої поверхні третього шару за допомогою запропонованого методу, а також аналогічні дані, отримані МСЕ на базі комплексу DYNA2D, а також експериментальні дані [8].

Таблиця 1

Максимальні деформації шарів тришарового скла

Швидкість, м/с	$\varepsilon_r \cdot 10^6$		
	запропонований метод	МСЕ	експериментальні дані
9,1	333	330	360±50
12,2	448	450	420±80
15,2	590	590	580±130
18,3	735	730	790±70

На рис. 1 показано зміння деформацій у часі у середній точці зовнішньої поверхні третього шару на швидкостях 18,3 м/с (цифра 1 на рисунку), 15,2 м/с (цифра 2), 12,2 м/с (цифра 3) і 9,1 м/с (цифра 4). Суцільна лінія відповідає результатам розрахунку запропонованим методом, пунктирна – МСЕ на базі комплексу DYNA2D [8]. Результати розрахунку за запропонованою методикою й результати розрахунку за допомогою DYNA добре погоджуються.

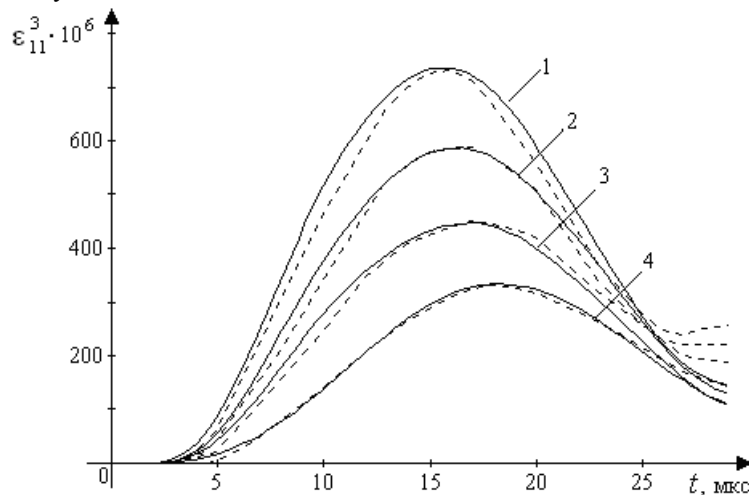


Рис. 1. Зміння деформацій у часі

Моделювання поведінки скла при низько- і високошвидкісному ударі відрізняється. У першому випадку істотне значення має спроможність скла поглинути енергію, перетворюючи її в гинні коливання конструкції, а в другому – процеси локального руйнування скла.

Однієї з важливих характеристик скла є здатність його поглинути енергію при ударі. Розглянемо двошарову композицію, що складається зі скла силікатного та полікарбонату ( $E = 2$  ГПа,  $\nu = 0,25$ ,  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>). Шари між собою не зв'язані. Розмір скла й композиція шарів показані на рис. 2, а умови закріплення скла – на рис. 3. Таке скло використовувалося при експериментальному дослідженні, результати якого наведені в роботі [9].

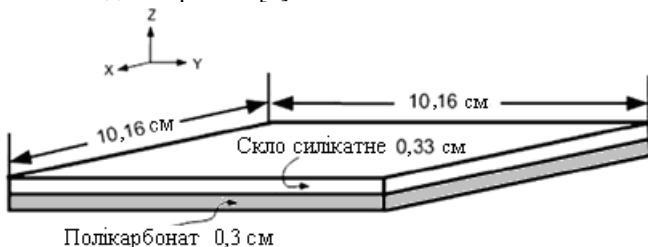


Рис. 2. Двошарова пластина

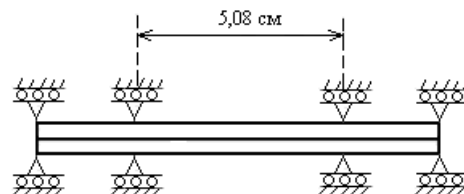


Рис. 3. Умови закріплення

Проведено розрахунок міцності скла для двох швидкостей удару 61 м/с і 100 м/с. У ході експериментальних досліджень було встановлено, що при таких ударах спостерігається розтріскування скла силікатного під точкою удару, а полікарбонат явних ушкоджень не отримав [9]. При цьому спостерігалось відкидання ударника назад, швидкість зворотного руху ударника складала 3 і 8 м/с відповідно [9]. При цьому енергія, яка поглинена склом, становить майже 99 %. Під поглиненою енергією розуміється  $MV^2/2 - MV_0^2/2$ , де  $V_0$  – швидкість відкидання.

Профіль швидкості руху ударника показаний на рис. 4. Суцільною лінією показані результати, отримані запропонованим методом, а пунктирною – з використанням «перидинамічного» формулювання [9]. Видно, що метод на стадії гальмування ударника добре узгоджується з результатами, наведеними в роботі [9]. Результати на етапі відкидання ударника дещо відрізняються. При цьому обидві розрахункові моделі дають завищене значення швидкості відкидання ударника в порівнянні з експериментальними значеннями. Це може бути наслідком як прийнятих умов кріплення зразка, які складно реалізувати в розрахунку, так і застосуванням у розрахунках спрощеної моделі руху ударника.

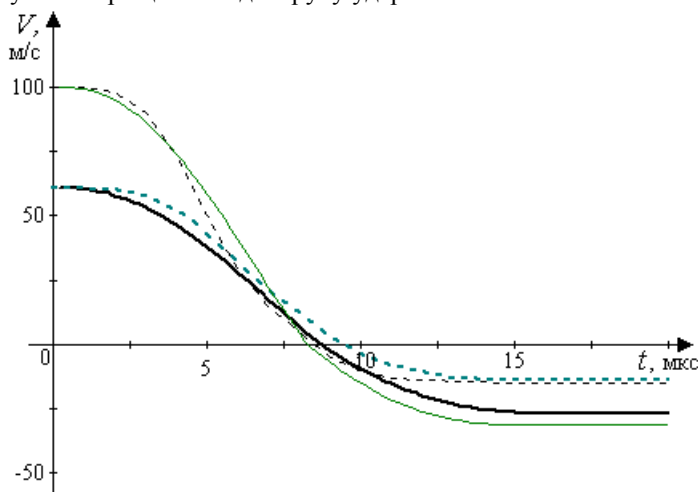


Рис. 4. Еволюція швидкості ударника

Відзначимо, що спрощений опис деформацій ударника й енергії, що йде на розтріскування скла, приводить до завищених значень швидкості відкидання й, відповідно, до занижених значень енергії, яка поглинається склом при ударі.

#### Висновки й перспективи подальших досліджень

Розроблено аналітико-чисельний метод дослідження нестационарних коливань шаруватих елементів оскління при ударному навантаженні, який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді тригонометричного ряду.

Можливості методу проілюстровані на прикладі розрахунку деформацій тришарових шарнірно опертих елементів оскління при ударі кульовим індентором. Добре узгодження теоретичних і експериментальних даних підтвердило вірогідність результатів, одержаних за допомогою запропонованого методу.

Надалі метод можна застосувати до розрахунку шаруватих неплоских елементів з різною формою плану та різними граничними умовами при дослідженні коливань енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій під дією інтенсивних швидкоплинних навантажень.

Роботу виконано у рамках Цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України «Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин» («Ресурс-2»).

#### Список використаної літератури

1. Heimbs S. A numerical method for blast shock wave analysis of missile launch from aircraft / S. Heimbs, J. Ritzer, J. Markmiller // Intern. J. of Aerospace Engineering. – 2015. – Vol. 2015. – P. 1-8.
2. Juhachi O. Dynamic fracture experiment of laminated glass and its considerations / O. Juhachi, K. Sotoaki, K. Michitaka, K. Masashi, I. Makoto // Trans. JSME. Ser. A. – 1990. – Vol. 56, № 524. – P. 924-929.
3. Yang J. Experimental and FEM study of windshield subjected to high speed bird impact / J. Yang, X. Cai, C. Wu // Acta Mechanica Sinica. – 2003. – Vol. 19, № 6. – P. 543-550.
4. Tessler A. Refined zigzag theory for homogeneous, laminated composite, and sandwich beams derived from Reissner's mixed variational principle / A. Tessler // Meccanica. – 2015. – Vol. 50, № 10. – P. 2621-2648.
5. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А. Н. Шупиков, Я. П. Бузько, Н. В. Сметанкина, С. В. Угримов. – Харьков: Изд-во ХНЭУ, 2004. – 252 с.
6. Jones N. Structural impact / N. Jones. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 320 p.
7. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н. В. Сметанкина. – Харьков: Мисьдрук, 2011. – 376 с.
8. Dynamic strain in architectural laminated glass subjected to low velocity impact from small projectiles / R. A. Behr, P. A. Kremer, L. R. Dharani, F. S. Ji, N. D. Kaiser // J. of Materials Science. – 1999. – Vol. 34. – P. 5746-5756.
9. Impact damage on a thin glass plate with a thin polycarbonate backing / W. Hu, Ye. Wang, J. Yu, Ch.-F. Yen, F. Bobaru // Intern. J. of Impact Engineering. – 2013. – Vol. 62. – P. 152-165.