УДК 681.3: 514.18

С.Ю. СУЛІМЕНКО, В.О. АНПІЛОГОВА, Г.Г. СУЛІМЕНКО
Київський національний університет будівництва та архітектури

ПОБУДОВА ПЛОЩИНИ СИМЕТРІЇ КОНУСА, ДОТИЧНОГО ДО ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ, ЗА ЕСКІЗОМ ЛІНІЇ ОБРИСУ

Проаналізовано властивості конуса загального положення, дотичного до деякої поверхні обертання. За цим аналізом сформульовано критерій симетрії пари твірних відносно невідомої площині симетрії поверхні конуса. Показано, що пара симетричних твірних однозначно визначає і площину симетрії. Для ескізно заданої на екрані монітору лінії обрису площина симетрії конуса може бути знайдена тільки наближено. Пропонується такий алгоритм. Сформульовано критерій придатності даного конуса для моделювання поверхонь обертання.

Ключові слова: дизайн, комп'ютерне моделювання, перспектива, лінія обрису, поверхні обертання, площина симетрії

С.Ю. СУЛИМЕНКО, В.А. АНПИЛОГОВА, А.Г. СУЛИМЕНКО
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ КОНУСА, КАСАТЕЛЬНОГО К ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ, ПО ЭСКИЗУ ЛИНИИ ОЧЕРТАНИЯ

Проанализированы свойства конуса общего положения, касательного к некоторой поверхности вращения. По результатам анализа сформулирован критерий симметрии пары образующих относительно неизвестной плоскости симметрии поверхности конуса. Показано, что пара симметричных образующих однозначно определяет плоскость симметрии. Для заданной эскизно на экране монитора линии очертания плоскость симметрии может быть найдена только приблизительно. Предлагается такой алгоритм. Сформулирован критерий использования данного конуса для моделирования поверхностей вращения.

Ключевые слова: дизайн, компьютерное моделирование, перспектива, линия очертания, поверхности вращения, плоскость симметрии

S.Y. SULIMENKO, V.A. ANPILOGOVA, A.G. SULIMENKO
Kiev national university of civil engineering and architecture

CONSTRUCTION OF THE PLANE OF SYMMETRY OF THE CONE TANGENT TO THE SURFACE OF REVOLUTION ACCORDING TO THE SKETCH OF THE OUTLINE

In current work properties of cone of general position tangent to some surface of revolution were analyzed. Based on the results of the analysis, a criterion for the symmetry of the pair of creation lines relative to the unknown plane of symmetry of the cone surface is formulated. It is shown that a pair of symmetric creation lines also unequivocally determines the plane of symmetry. For a given line of the outline sketch on the screen, the plane of symmetry can only be found approximately. Following algorithm is proposed. The criterion for using this cone for the modeling of surfaces of revolution is formulated.

Keywords: design, computer modeling, perspective, outline, surfaces of revolution, plane of symmetry

Постановка проблеми

Сучасний рівень розвитку технологій та засобів дизайну відкриває нові можливості для комп'ютерного проектування на перспективних зображеннях. Однією з основних задач дизайнера при такому проектуванні є побудова штучного середовища та вписування в нього об'єкта, що проектується. Досягнення органічного взаємозв'язку між призначенням та формою об'єкта проектування виникає внаслідок адекватного вписування його обрису в навколишнє середовище.

Роботи в цьому напрямку проводяться [1, 5], але вони далекі від розв'язання як у геометричному, так і в комп'ютерно-технічному та дизайнерських планах. Наведені дослідження присвячені комп'ютерному моделюванню поверхонь обертання за перспективною лінією обрису. Таке моделювання неможливе без встановлення площини симетрії обгортувальних конусів. Якщо площина симетрії не задана заздалегідь, то задача має тривіальній розв'язок лише тоді, коли ця площина перпендикулярна як картині, так і предметній площині. У випадку конусів другого порядку достатньо перпендикулярності картини. В роботі пропонується алгоритм знаходження такого розв'язання у загальному випадку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Пряма задача побудови обгортувального конуса для аналітично заданої поверхні вперше була розв'язана ще Гаспаром Монжем. Проте алгоритми комп'ютерної графіки, орієнтовані на побудову обрису довільного об'єкту, мають ітераційний характер, а сам обрис, навіть при розв'язанні прямої задачі, існує як растрова границя між зображенням об'єкта та вільним полем екрану.

Щодо оберненої задачі, то вона, в будь якому разі, може бути розглянута як задача розпізнавання образів. Це, перш за все, фотограмметрія, а також відтворення форми прообразу по фотографіям, зробленим з фіксованих точок зору (наприклад, відтворення форми тіла конкретної людини).

На даний момент найпоширенішим завданням спеціаліста з 3D-моделювання є побудова просторової моделі за так званим концепт-артом, тобто ескізним малюнком від художника-дизайнера. Це досить трудомісткий процес, що вимагає кропіткої та уважної праці.

Виходячи з цього, зниження трудовитрат на моделювання є пріоритетним завданням провідних розробників програмного забезпечення. Алгоритми (зміст яких приховано), що використовують у сучасних комп'ютерних системах і надають можливість такого спрощеного моделювання, здатні забезпечити результат достатній для якісної 3D-візуалізації, але такий, що потребує досить важкого ручного редагування при використанні для створення реальних об'єктів.

Тому алгоритми, які ставлять у відповідність візуальному образу точну геометричну модель, мають свою сферу використання. Побудова площини симетрії конуса, що обгортає поверхню обертання, орієнтована саме на ці цілі.

У випадку конуса другого порядку задача має строгий аналітичний розв'язок [4], який було застосовано для моделювання поверхонь обертання другого порядку [6]. Цей алгоритм вимагає рівняння кривої в неявній формі і зводиться до розв'язання характеристичного рівняння третього степеня.

Проте такий підхід не відповідає сучасним тенденціям, тому що додатки до систем автоматизованого проектування краще створювати на основі синтетичної геометрії [2–3]. Так в роботі [3] осі конуса другого порядку побудовані з залученням методів проективної геометрії. Але це не вирішує проблеми з конусом загальної форми.

Мета дослідження

Сформулювати властивості симетричного конуса, які можуть бути встановлені при несиметричному завданні його напрямної. Виявити критерії симетрії такого конуса та на їх основі запропонувати ітераційний алгоритм пошуку площини симетрії. Встановити критерії придатності ескізного контуру в якості напрямної конусу, що обгортає деяку поверхню обертання (а тому і двопараметричну множину поверхонь).

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо конус, що є дотичним до поверхні обертання. Він обов'язково має принаймні одну площину симетрії, а його напрямна крива (лінія обрису на картині) визначена разом зі своїми дотичними. Такий конус будемо вважати *коректним*. Цим умовам відповідають усі конуси другого порядку.

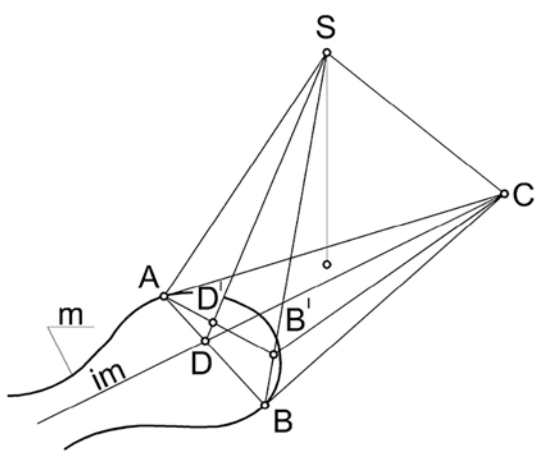
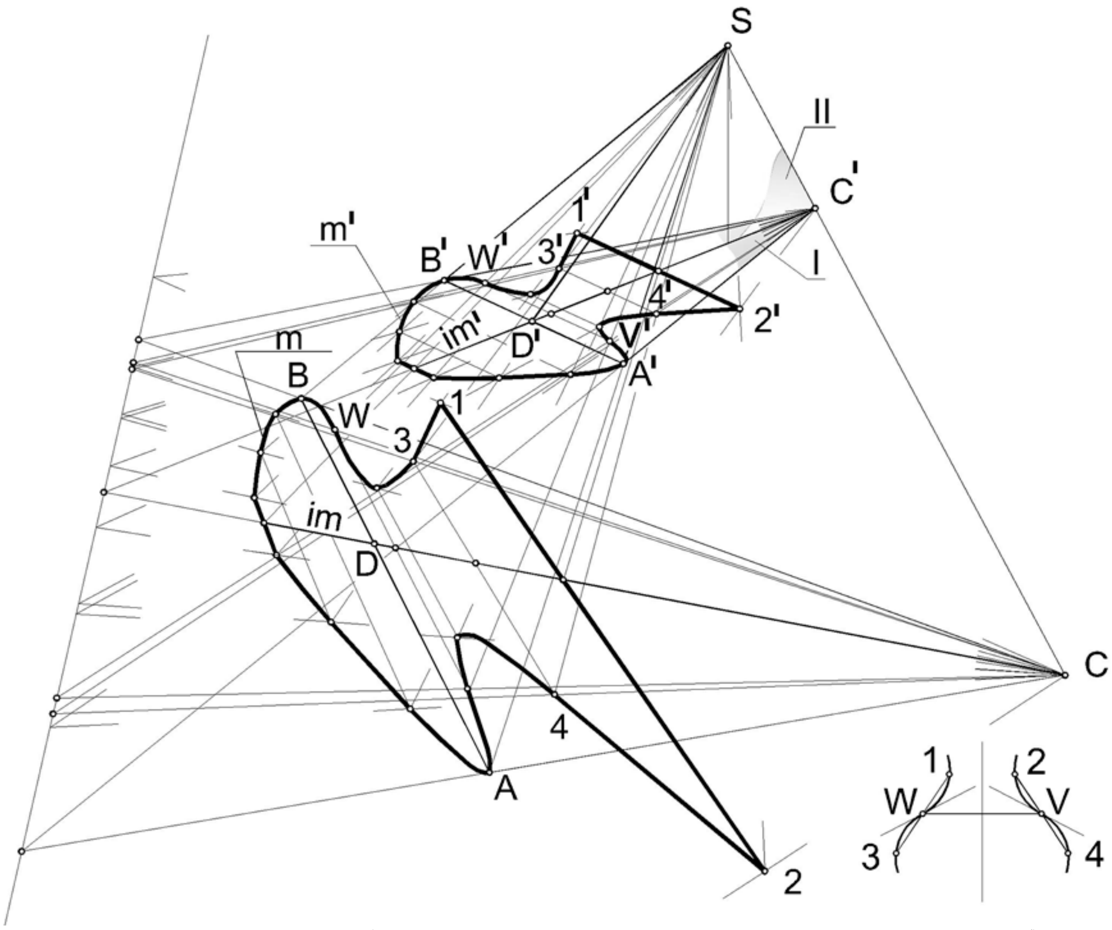


Рис.1. Ілюстрація до властивості 1

Зауваження: коректний дотичний конус побудувати шляхом довільного завдання кривої m неможливо. При алгоритмічній побудові зазвичай не втрачається інформація і про площину симетрії. Але і така задача має місце, коли контур поверхні обертання зафіксовано на фотографії з відомого центру. Проте властивість коректного конуса наводиться далі з метою застосування її в некоректній ситуації.

Властивість 1. Коректний конус задається вершиною S та лінією обрису m (рис.1) На ньому знайдено дві твірні SA та SB ($A \in m$, $B \in m$). Разом з дотичними до кривої m (BC, AC) вони утворюють дотичні площини до конуса. Якщо бісекторна площина SCB двогранного кута при ребрі SC перетинає трикутник ASD по бісектрисі кута між прямими SA та SB, то така площина є площиною симетрії всього конуса.

Така властивість випливає з одного із можливих методів побудови коректного конусу (рис. 2а). В площині I задається симетрична крива m', де im' – її вісь симетрії. Площина II перпендикулярна до I проведена через вісь симетрії im'. Вершина $S \in II$ обирається довільно. $\{S, m'\}$ – коректний конус поверхні обертання за побудовою. $B'A'$ – деяка хорда кривої m' перпендикулярна до вісі im'. Вісь поділяє цю хорду навпіл: $|B'D'| = |D'A'|$. Дотичні до m' в точках A' та B' перетинаються в точці $C' \in im'$. Внаслідок симетрії маємо: $B'C' = A'C'$ та $B'S = SA'$. Тобто, в цьому симетричному випадку II, бісекторна площина дотичних площин $B'SC'$ та $A'SC'$ перетинає трикутник $B'SA'$ по бісектрисі SD'.



а) б)

Рис. 2. Побудова несиметричного перерізу коректного конуса

Спроектуємо з вершини конуса S криву m' на площину, яку задає довільна точка $C\in SC'$ та ось гомології k. Будемо вважати цю площину картиною K, побудовану криву m – лінією обрису, а S точкою зору.

Зрозуміло, що конус $\{S,m\}$ співпадає з конусом $\{S,m'\}$ і є коректним. Тому твірні SA та SB, дотичні площини в них SAC і SBC, бісекторна площина SDC і бісектриса кута між SA і SB, залишились без змін, а тому: якщо дві твірні симетричні відносно площини симетрії коректного конуса, то бісекторна площина їх дотичних площин інцидентна бісектрисі кута між твірними.

Точки A та B несиметричні відносно площини II і $BD\neq AD$. Якщо на SA та SB відкласти рівні відрізки SB' та SA', то $B'D'=D'A'$.

Властивість 1 наводилась з метою встановлення критерію симетрії двох довільних твірних коректного конусу відносно невідомої площини симетрії. Таких критеріїв може бути декілька. Наприклад, рівність прямих AC та $B'C$ на рис.1. Але точка C їх перетину може бути віддалена, тому важко співвідносити похибку з довжиною самих ліній і зробити критерій знакозмінним. Він може бути замінений рівнозначним, як оцінка рівності відрізків $B'D'$ та $D'A'$. Це обчислюють наступним чином:

1. Обирають дві довільні точки A та B кривої m. Записують рівняння дотичних площин в неявному вигляді таких, що належать твірній та дотичній в точках A та B, які за умовою визначені.
2. Складається рівняння бісекторної площини II.
3. Знаходяться точки B' та A' такі що $|B'S| = |A'S|$. Розумно знаходити тільки одну точку, на твірній, що має більшу довжину (як на рис.1).
4. Визначається точка D' перетину площини II та прямої $A'B'$.
5. Остаточно критерій має вигляд:

$$KR=\frac{|B'D'|-|A'D'|}{|A'B'|}.$$

Це відносний критерій. Він не залежить від довжини відрізків SA' та SB' і дорівнює нулю при симетрії твірних. В цьому разі площина II буде площиною симетрії всього коректного конуса. Якщо знайти ще одну пару симетричних твірних A_iS та B_iS, то в перетині прямих $A_iB_i \cap AB$ отримаємо центр пучка, що встановлює всю множину пар симетричних твірних. Це випливає з того, що всі хорди $A'_iB'_i$ перпендикулярні площині симетрії, тобто паралельні між собою і мають на картині точку сходу.

Зауваження: є особливості, які не змінюються при перетворенні симетричного контуру m в несиметричний m'.

Перше: наявність прямолінійних відрізків. Наприклад прямі (*1*,*3*) та (*2*,*4*) при симетризації контуру переходять в прямі (*1′*,*3′*) та (*2′*,*4′*) і вісь всього конуса може бути знайдена як бісектриса кута між площинами *S13* та *S24*.

Друге: якщо вершина *S* не належить площині *I* та площина кривої m' не належить дотичним в точках перегину, то точки перегину при симетризації контуру перейдуть також в точки перегину. На рис. 2б) задано фрагмент з точками перегину. Нехай січні в точках перегину замінять криву. Вони перетинають дотичну в точках перегину. Це означає, що при перспективному перетворенні вони теж будуть перетинати дотичну і лінії перегину зберігаються. Тому пара точок перегину теж однозначно задає площину симетрії коректного конуса.

Ітераційний алгоритм пошуку площини симетрії коректного конуса в загальному випадку полягає в наступному:

1. На кривій обирається довільна точка A (рис. 3), яка не є точкою перегину і дві точки B_n та B_0 так, щоб між ними не було точки перегину. В цьому разі критерій KR буде змінюватись монотонно.
2. В точках B_0 та B_n визначаються KR для пар хорд SB_0 і SA та SB_n і SA. Якщо KR_0 і KR_n мають різні знаки то розв'язок лежить в інтервалі (B_0, B_n) і знаходиться шляхом поділення інтервалу параметрів навпіл. За наступний з двох інтервалів обирається інтервал з різними знаками величини KR на границях.

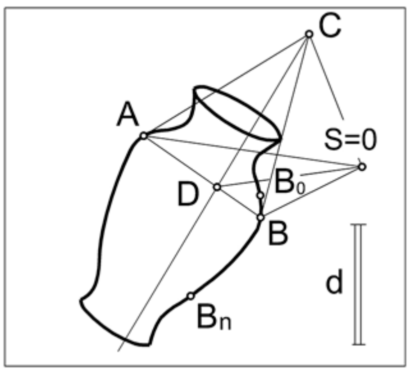


Рис. 3. Ілюстрація до роботи ітераційного алгоритму

3. Якщо KR_0 і KR_n мають однакові знаки, то розв'язку може не бути. В разі його відсутності точка з меншим по модулю значенням залишається границею інтервалу, а друга задається ззовні інтервалу. Має виконуватись умова, що точка перегину може бути тільки граничною.

Алгоритм працює в автоматизованому режимі в тому сенсі, що початкові точки А, B_0 та B_n користувач задає самостійно.

Цей алгоритм працює у випадку кривих другого порядку. Криві другого порядку привабливі в якості обрисів поверхонь обертання, тому що побудовані на їх основі поверхні з будь якої точки зору утворюють обриси, що мають власну вісь симетрії.

Критерії і алгоритми націлені, перш за все, на випадки некоректного конуса, які виникають при ескізному завданні лінії обрису. Площини симетрії в цьому разі може взагалі не бути. Щоб з'ясувати це знаходиться множина симетричних пар твірних. Кожна з них визначає точку на картині, що має належати сліду площини симетрії.

Для реалізації цієї задачі була створена програма Outline на базі інтегрованого середовища розробки Unity з можливістю імпорту файлів креслення AutoCAD та подальшої їх обробки. Роботу цієї програми проілюстровано прикладом (рис. 4).

В робочому полі AutoCAD користувач задає довільну криву деякою ламаною. В даному випадку схожу на параболу з вертикальною віссю. Функцією «Smooth» він виконує згладжувальну апроксимацію кривої, та функцією "Path array" задає *N* точок, що описані 3D-об'єктами "сфера" з дотичними в них, що описані 3D-об'єктами "циліндр". Ця інформація експортується графічним редактором в форматі ".FBX". Отриманий файл імпортується у підготовлену сцену програми Outline у комплексі Unity.

В програмі Outline користувач виділяє із загального масиву *N* робочих точок (в прикладі *N*=3, точки A_1, A_2, A_3) та робочий інтервал B_0, B_n, який може бути спільним для всіх робочих точок. За розробленим алгоритмом знаходяться точки D_1,D_2,D_3. Точки D_i є наближеною інформацією для побудови сліду im площини симетрії конусу на картині. Розрахунок проводиться за методом найменших квадратів та оцінюється коефіцієнтом кореляції r [7], модуль якого має наближатись до одиниці. Остаточне рішення щодо прийнятності результату залишається на розсуд користувача. При позитивному рішенні користувач обирає одну з гілок кривої обмежену im і за алгоритмом, розробка і реалізація якого описана в [5], будує поверхню обертання, ось якої належить площині $II\ \{S,\ im\ \}$. На рис. 4 це вісь (1, 2), що обмежена точкою 3.

В табл. 1 наведено результати по визначенню осі im: координати знайдених точок D_i, результат їх лінійної апроксимації та критерій кореляції. Висока якість, показана критерієм, в значній мірі обумовлена простотою вихідної інформації.

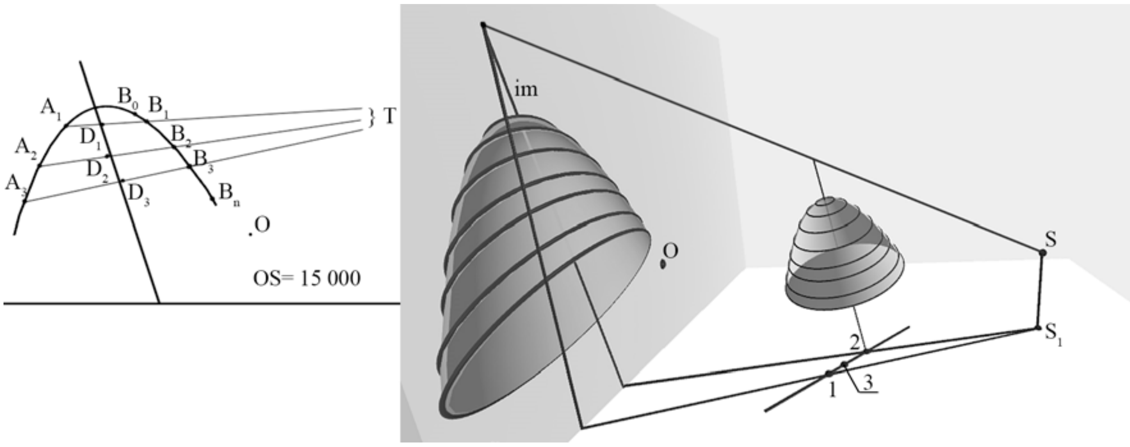


Рис. 4. Конкретний приклад побудови поверхні обертання за ескізно заданою лінією обрису.

Таблиця 1

Точка	x (мм)	y (мм)	$\|KR\|i$	$y = ax + b$		$\| r \|$
				a	b	
D_1	–4651,72	1558,418	0,0014	–2,54813	–10073,6	0,97446
D_2	–5271,84	3791,112	0,0072			
D_3	–5924,25	4811,921	0,0049			

Висновки

Доведені властивості, запропонований критерій та розроблені алгоритми, що реалізовані в програмному вигляді, дають надію, що зроблено певний крок у моделюванні поверхонь за ескізами перспективної лінії обрису.

Список використаної літератури

1. Сазонов К.А. Диалоговое графическое пространственное проектирование: автореф. дисс. на соискание учен. степени доктора техн.наук : спец. 05.16.12 "САПР"/ Константин Александрович Сазонов. – М.,1988. – 38 с.
2. Несвідомін В.М. Комп'ютерні моделі синтетичної геометрії : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук : спец. 05.01.01. "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Віктор Миколайович Несвідомін. – К.,2008. – 38с.
3. Короткий В. А. Геометрическое моделирование поверхности посредством ее отображения на четырехмерное пространство / В. А. Короткий // Омский научный вестник – 2015. –№ 1(137). – С. 8-12.
4. Моденов П.С. Аналитическая геометрия / П. С. Моденов. – М.: изд. "Московский университет", 1969. – 698 с.
5. Сазонов К.О. Моделювання поверхонь обертання на перспективних зображеннях / К.О.Сазонов, Г.Г. Суліменко, С.Ю. Суліменко // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2016. – Вип.5. – С.110-115.
6. Суліменко С.Ю. Формоутворення поверхонь обертання другого порядку за їх лініями обрису / С.Ю. Суліменко, В.О.Анпілогова, Ж.Г.Левіна // Сучасні проблеми архітектури та містобудування. – К. : Видавництво КНУБА, 2016. – Вип.44. – С. 313-320.
7. Щербаков И.Н. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ, Материалы к лекционному курсу [Електронний ресурс] / Игорь Николаевич Щербаков – Режим доступу: http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/Source/NumMethods/Reg_MNK.htm.