УДК 532.3

Т.М. НИКУЛИНА, А.М. НИКУЛИНА, О.Г. ГОМАН
Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара

УДАР КРУГЛОГО ТЕЛА О ПОВЕРХНОСТЬ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В работе рассматривается задача в плоской постановке об ударе круглого тела о поверхность идеальной несжимаемой жидкости, не имеющей границ. Тело частично погружено в жидкость, а его погруженная часть имеет форму кругового сегмента. В некоторый момент времени происходит удар, после чего тело мгновенно получает поступательную скорость и вращательную скорость вокруг оси, перпендикулярной плоскости, в которой рассматривается течение. С помощью конформного отображения, переводящего область полуплоскости с вырезанным сегментом в полуплоскость, данная задача сводится к смешанной задаче Келдыша-Седова для верхней полуплоскости, решение которой известно в квадратурах. Таким образом, была решена ударная краевая задача со смешанными граничными условиями. Был найден комплексный потенциал жидкости после удара, а также потенциал скорости жидкости на участке соприкосновения тела с жидкостью. Полученные результаты проанализированы в случаях влияния на жидкость со стороны тела только одной компоненты скорости, либо всех трех компонент. Также результаты были проиллюстрированы для различных углов погруженного сегмента и проведено сравнение с результатами для плавающей пластинки. Показано, что после удара жидкость может начать двигаться безотрывно, однако, при некоторых значениях скорости тела может возникать отрыв жидкости от поверхности тела. Об этом свидетельствует тот факт, что значение потенциала на некоторой части поверхности тела становится больше нуля. На этом участке как раз и будет находиться точка отрыва. В таком случае полученные решения уже использовать нельзя и следует рассматривать задачу с учетом возникновения зоны отрыва. В случае воздействия со стороны тела только вертикальной компоненты скорости при углах сегмента меньше 90° отрыв жидкости от поверхности тела возникать не будет.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, ударная задача, задача Келдыша-Седова, конформное отображение, комплексный потенциал.

Т.М. НІКУЛІНА, А.М. НІКУЛІНА, О.Г. ГОМАН
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

УДАР КРУГЛОГО ТІЛА О ПОВЕРХНЮ ІДЕАЛЬНОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ

У роботі розглядається задача в плоскій постановці про удар круглого тіла об поверхню ідеальної нестисливої рідини, яка не має границь. Тіло частково занурене в рідину, а його занурена частина має форму кругового сегмента. В певний момент часу відбувається удар, після чого тіло миттєво отримує поступальну швидкість і обертальну швидкість навколо осі, перпендикулярної площині, в якій розглядається течія. За допомогою конформного відображення, що переводить область півплощини з вирізаним сегментом в півплощину, дана задача зводиться до змішаної задачі Келдиша-Сєдова для верхньої півплощини, розв'язок якої відомо в квадратурах. Таким чином, була розв'язана ударна крайова задача зі змішаними граничними умовами. Був знайдений комплексний потенціал рідини у мить, що слідує безпосередньо після удару, а також потенціал швидкості рідини на ділянці дотику тіла з рідиною. Отримані результати проаналізовані у випадках впливу на рідину з боку тіла тільки однієї компоненти швидкості, або всіх трьох компонент. Також результати були проілюстровані для різних кутів зануреного сегмента і проведено порівняння з результатами для плаваючої пластинки. Показано, що після удару рідина може почати рухатися безвідривно, однак, при деяких значеннях швидкості тіла, може виникати відрив рідини від поверхні тіла. Про це свідчить той факт, що значення потенціалу на деякій частині поверхні тіла стає більше нуля. На цій ділянці якраз і буде знаходитися точка відриву. В такому випадку отримані розв'язки вже не можуть бути використані і слід розглядати задачу з урахуванням утворення зони відриву. У разі впливу з боку тіла тільки вертикальної компоненти швидкості при кутах сегмента менше 90° відрив рідини від поверхні тіла виникати не буде.

Ключові слова: нестислива рідина, ударна задача, задача Келдиша-Сєдова, конформне відображення, комплексний потенціал.

T.M. NIKULINA, A.M. NIKULINA, O.H. HOMAN
Dnipro national university named Oles Honchar

ROUND BODY IMPACT ON THE SURFACE OF THE IDEAL INCOMPRESSIBLE LIQUID

In this article the problem about the impact of a circular body on the surface of an ideal incompressible fluid that does not have boundaries is considered in a plane statement. The body is partially submerged in the liquid, and its submerged part has the shape of a circular segment. At some point in time a shock occurs, after which the body instantaneously receives translational velocity and rotational velocity about an axis that is perpendicular to the plane of flow. Using a conformal mapping that maps a half-plane domain with a cut segment into a half-plane, this problem reduces to a mixed Keldysh-Sedov problem for the upper half-plane, the solution of which is known in quadratures. In this way, the shock boundary value problem with mixed boundary conditions has been solved. The complex potential of the liquid flow after the impact has been found, as well as the potential of velocity of the liquid at the site of contact between the body and the liquid. The results obtained has been analyzed in cases of influence on the liquid from the body side of only one velocity component, or all three components. In addition, the results has been illustrated for different angles of the submerged segment and compared with the results for a floating plate. It is shown that the fluid flow can move around the body without interruption after the impact. However, at certain values of the velocity of the body, liquid can detach from the body. This is evidenced by the fact that the value of the potential on some part of the surface of the body becomes greater than zero. On this site just would be the point of separation. In this case, the obtained solutions can not already be used and the problem should be considered taking into account the occurrence of the separation zone. In the case of the impact on the part of the body only the vertical component of the velocity at segment angles of less than 90 °, separation of the liquid from the surface of the body will not occur.

Keywords: incompressible fluid, shock problem, Keldysh-Sedov problem, conformal mapping, complex potential.

Постановка задачи

В задаче рассматривается ударное взаимодействие тела, плавающего на поверхности неограниченной идеальной несжимаемой жидкости. Задача рассматривается в плоской постановке, а часть тела, погруженная в жидкость, имеет форму сектора. Тело частично погружено в жидкость, ширина погруженной части равна $2a$, угол между поверхностью жидкости и касательной к сектору в точке A равен α (рис. 1). Пусть в некоторый момент времени происходит удар, после чего тело мгновенно получает вертикальную скорость V, горизонтальную скорость U и вращательную скорость ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости, в которой рассматривается течение. Требуется найти поле скоростей жидкости непосредственно после удара.

В рассматриваемой задаче удобно расположить систему координат так, чтобы жидкость находилась в верхней полуплоскости (рис.1).

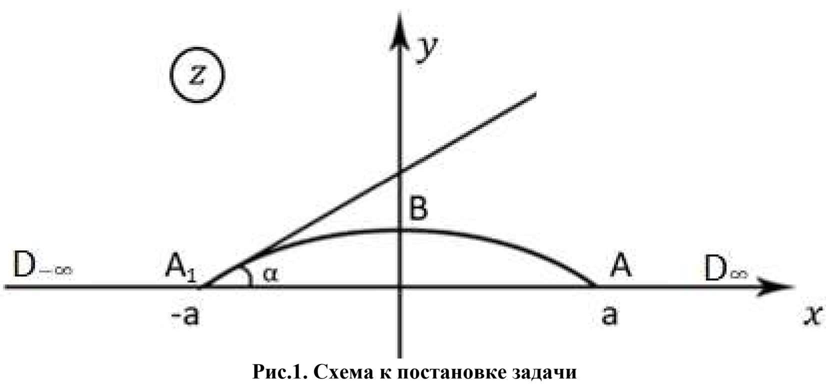


Рис.1. Схема к постановке задачи

Анализ последних исследований и публикаций

Теория гидродинамического удара относится к классическим задач механики жидкости. Исследования ударных задач в общей постановке были проведены в работах [1, 3, 4, 7]. Более подробно ударная задача была рассмотрена в [5] для случая взаимодействия множества плоских пластин с поверхностью жидкости. В работе [2] рассмотрено взаимодействие наклонной плоской пластины, частично погруженной в жидкость. В работе [6] также приведено рассмотрение гидродинамических ударных задач, в частности, краевых задач со смешанными граничными условиями.

Формулировка цели исследования

Задачи удара тела о жидкость часто встречаются на практике: именно к такому типу сводятся проблемы определения силового взаимодействия воды с поверхностями гидросамолетов, космических летательных аппаратов при их посадке на воду, взаимодействия воды с днищами судов. Также ударные задачи взаимодействия жидкости и скоростного проникающего тела возникают в различных технологиях при термической обработке, охлаждении и тому подобное.

Однако, до настоящего времени теоретические методы решения задач указанного типа продолжают совершенствоваться по причине того, что удар может происходить с отрывом жидкости от поверхности тела в одной или нескольких зонах, или без отрыва. С возникновением указанных зон, положение которых заранее неизвестно, задача становится нелинейной и существенно усложняется – именно с преодолением этих трудностей связано развитие современных аналитических и численных методов. Определение местоположения зоны или зон отрыва принципиально важно для корректного определения присоединенных масс жидкости к телу при ударе.

Изложение основного материала исследования

Как известно, решение ударной краевой задачи описывается комплексным потенциалом w или характеристической функцией

$$\chi = -iw = \psi - i\varphi,$$

для определения которой имеем следующие граничные условия: на участках свободной границы $D_{-\infty}A$ и AD_{∞} задана функция $\varphi = 0$; а на поверхности тела A_1BA задана функция $\psi(z) = Uy - Vx - \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2)$. Таким образом, имеем смешанную задачу Келдыша-Седова.

Для задачи Келдыша-Седова имеется решение в виде квадратур для верхней полуплоскости. Чтобы им воспользоваться, нужно совершить такое конформное отображение, чтобы верхняя полуплоскость с лункой в физической области $z = x + iy$ отобразилась на верхнюю полуплоскость области $\zeta = \xi + i\eta$. При чем должно соблюдаться соответствие такое, что точка $z = a$ переходит в точку $\zeta = 1$, точка $z = -a$ переходит в $\zeta = -1$, точка $z = B$ переходит в $\zeta = 0$, а точка $z = \infty$ переходит в $z = \infty$ (рис. 2).

Указанное конформное отображение будет иметь вид:

$$\zeta(z) = \frac{(z+a)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} + (z-a)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}}{(z+a)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} - (z-a)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}}.$$

Для обратного преобразования имеем формулу:

$$z(\zeta) = a\frac{(\zeta+1)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} + (\zeta-1)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}}}{(\zeta+1)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} - (\zeta-1)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}}}.$$

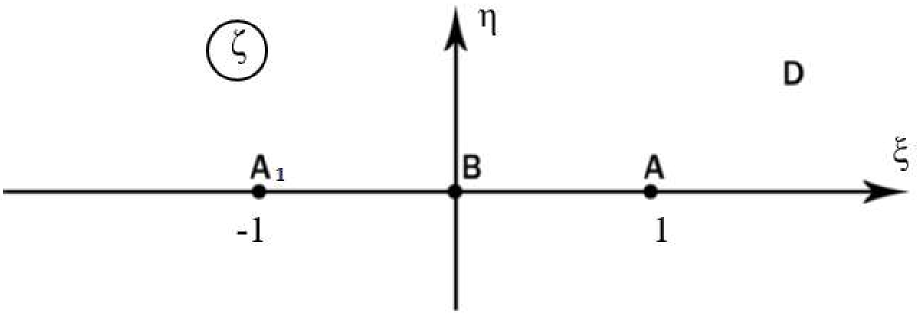


Рис. 2. Область параметрического переменного

Переформулированная задача Келдыша-Седова для верхней полуплоскости имеет следующую постановку. Определить функцию $\chi\big(z(\zeta)\big)$ при $Im\,\zeta > 0$ с такими граничными условиями: на образе свободной поверхности $\varphi = 0$ при $-\infty < \xi < -1$ и $1 < \xi < \infty$, $\eta = 0$; а на образе поверхности тела $\psi(z(\zeta)) = \psi(\zeta)$ при $-1 < \xi < 1, \eta = 0$.

Применяя формулу конформного отображения, окончательно получим:

$$\psi(\xi) = \frac{a}{F^2 + 2Fcos\alpha + 1}\big(-V(F^2 - 1) + 2Fsin\alpha(U + a\omega ctg\alpha)\big) - \frac{a^2\omega}{2};$$

$$\text{при } \xi \in (-1;1);\ \eta = 0;$$

где

$$F = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}}.$$

Решение задачи Келдыша-Седова для плоскости ζ имеет вид:

$$\chi(\zeta) = -iw = \psi - i\varphi = \frac{-1}{\pi}\sqrt{\zeta^2-1}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-\zeta}.$$

По формуле Сохоцкого [1] найдем, чему равен интеграл на верхней стороне отрезка $-1 < \xi < 1$:

$$\chi^+ = \psi(\xi) - \frac{i}{\pi}\sqrt{1-\xi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-\xi}.$$

В этой области функция ψ задана граничными условиями, следовательно, остальная часть формулы есть функция $-i\varphi$, откуда для значения потенциала на поверхности тела в переменных ζ имеем выражение:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-\xi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-\xi}.$$

Данный интеграл является интегралом типа Коши, который следует понимать в смысле его главного значения. Для определения потенциала скорости φ воспользуемся следующим алгоритмом вычисления интеграла Коши в смысле главного значения [1].

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-\xi^2}\left(\int_{-1}^{1}\left(\frac{\psi(t)}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\frac{dt}{t-\xi} + \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\ln\frac{1-\xi}{1+\xi}\right).$$

Согласно общим положениям теории присоединенных масс [7], имеем следующие формулы для $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(\xi) = \varphi_1 U + \varphi_2 V + \varphi_6 \omega,$$

где

$$\varphi_1 = 2a\overline{\varphi_1},\ \ \varphi_2 = 2a\overline{\varphi_2},\ \ \varphi_6 = (2a)^2\overline{\varphi_6};$$

$$\overline{\varphi_1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1-\xi^2}\int_{-1}^{1}\frac{2F(t)sin\alpha}{F(t)^2+2F(t)cos\alpha+1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-\xi};$$

$$\overline{\varphi_2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1-\xi^2}\int_{-1}^{1}\frac{F^2-1}{F(t)^2+2F(t)cos\alpha+1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-\xi};$$

$$\overline{\varphi_6} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{1-\xi^2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2F(t)\ cos\alpha}{F(t)^2+2F(t)cos\alpha+1} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-\xi};$$

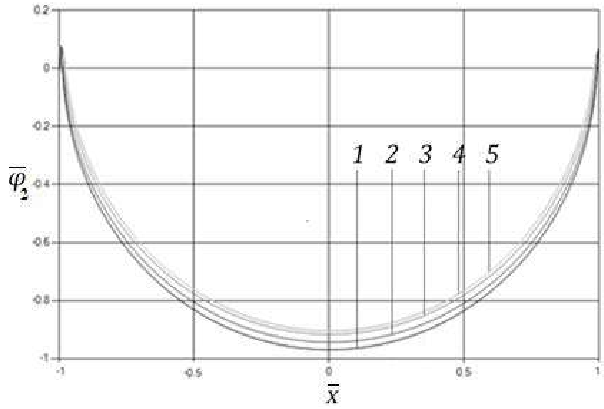
$$F(\xi) = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}}.$$

Анализ результатов

Таким образом, найдено значение потенциала течения на теле, откуда можно найти импульсное давление, действующее на элементы поверхности тела со стороны жидкости. Импульсное давление с точностью до произвольной постоянной равно:

$$\mathrm{P_t} = -\rho\varphi.$$

На рис. 3, 4, 5, 6 представлены результаты значений безразмерных функций $\overline{\varphi_1}$, $\overline{\varphi_2}$, $\overline{\varphi_6}$ для сегментов тела с различными углами α в зависимости от безразмерной координаты $\bar{x} = x/a$, где x – абсцисса точки на поверхности сектора.



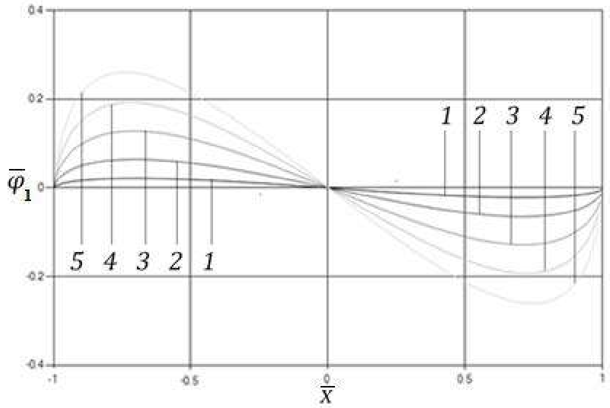
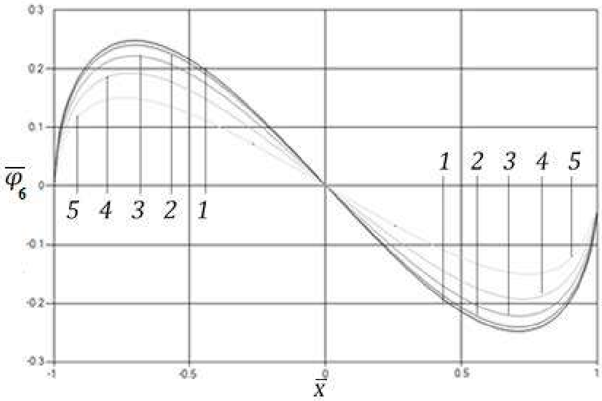


Рис. 3. Влияние вертикальной компоненты скорости *V*:
1 – α=5°; 2 – α=15°; 3 – α=30°; 4 – α=45°; 5 – α=60°
Рис. 4. Влияние горизонтальной компоненты скорости *U*:
1 – α=5°; 2 – α=15°; 3 – α=30°; 4 – α=45°; 5 – α=60°

На рис. 3 изображены графики $\overline{\varphi_2}(\bar{x})$. Здесь присутствует только влияние вертикальной компоненты скорости *V* со стороны тела. Горизонтальная и вращательная при этом равны нулю. Полученные результаты при $\alpha \to 0$ согласуются с данными для плоской пластины, ударяющуюся о свободную поверхность [4].

На рис. 4 изображены графики $\overline{\varphi_1}(\bar{x})$. Здесь присутствует только влияние горизонтальной компоненты скорости *U* со стороны тела.



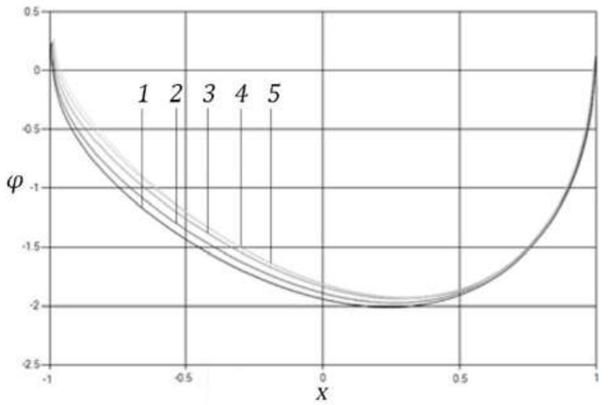


Рис. 5. Влияние вращательной компоненты скорости ω:
1 – α=5°; 2 – α=15°; 3 – α=30°; 4 – α=45°; 5 – α=60°
Рис. 6. Влияние трех компонент скоростей *U, V*, ω:
1 – α=5°; 2 – α=15°; 3 – α=30°; 4 – α=45°; 5 – α=60°

На рис. 5 изображены графики $\overline{\varphi_6}(\bar{x})$. Здесь присутствует только влияние вращательной компоненты скорости ω со стороны тела. Результаты для значений функции $\overline{\varphi_6}$ при $\alpha \to 0$ согласуются с данными для плоской пластины, подверженной мгновенной угловой скорости.

На рис. 6 в качестве примера изображены графики $\bar{\varphi}(\bar{x})$ для различных углов α; $\bar{\varphi} = \frac{\bar{\varphi}}{2aV} = \overline{\varphi_1}\frac{U}{V} +$ $+\overline{\varphi_2} + \overline{\varphi_6}\frac{\omega 2a}{V}$. Здесь со стороны тела влияют все три компоненты скорости: $V = 1$; $\frac{U}{V} = \frac{1}{3}$; $\frac{2a\omega}{V} = \frac{2}{3}$.

Выводы

В задаче рассматривались случаи, когда реализуется безотрывное обтекание тела. Однако, как видно из рис. 4, 5, при наличии только одного скоростного фактора *U* (или ω) на части поверхности тела значение потенциала $\varphi > 0$, что свидетельствует о том, что на этих участках поверхности должен возникнуть отрыв. В случае возникновения отрыва задача об ударе должна рассматриваться в другой постановке с учетом наличия точки отрыва.

Список использованной литературы

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Гоман О.Г. Ударное взаимодействие несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности, в условиях образования одной зоны отрыва и наличии вращения / О.Г. Гоман, В.А. Катан. // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка», 2013, Вип. 17, т. 1. – С. 191-205.
3. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика в 2-х частях / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе – М.: Гостехиздат, ч. 1. – 1948. – 536 с.
4. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
5. Мусхелишвилли Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвилли – М.:Наука, 1968. – 512 с.
6. Норкин М.В. Смешанные задачи гидродинамического удара / М.В. Норкин – Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2007. – 136 с.
7. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1966. – 448 с.