УДК 62-50

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ
Дніпровський національний університет ім. О. Гончара

ЗАСТОСУВАННЯМ АДЕКВАТНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ В АЛГЕБРАЇЧНІЙ ФОРМІ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЗИЧНОГО ПРОЦЕСУ

В роботі розглянуто задачу застосування адекватної математичної моделі в алгебраїчній формі для прогнозування характеристик фізичного процесу. Запропоновано декілька алгоритмів прогнозування, які базуються на синтезі спеціальних локальних стійких адекватних математичних моделей. У якості прикладу реального фізичного процесу було вибрано процес виплавки сталі.

Ключові слова: адекватні математичні моделі, алгебраїчна форма, алгоритми прогнозування, виплавка сталі.

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ
Днепровский национальный университет им. О. Гончара

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АДЕКВАТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

В работе рассмотрена задача применения адекватной математической модели в алгебраической форме для прогнозирования характеристик физического процесса. Предложено несколько алгоритмов прогнозирования, основанные на синтезе специальных локальных устойчивых адекватных математических моделей. В качестве примера реального физического процесса был выбран процесс выплавки стали.

Ключевые слова: адекватные математические модели, алгебраическая форма, алгоритмы прогнозирования, выплавка стали.

Yu.L. MENSHIKOV
Oles Honchar Dnipro National University

PREDICTION OF PHYSICAL PROCESSES CHARACTERISTICS WITH APPLICATION OF ADEQUATE MATHEMATICAL MODEL IN ALGEBRAIC FORM

In this paper the problem of applying an adequate mathematical model in algebraic form for predicting the characteristics of a physical process is considered. For a well-founded application of mathematical models in algebraic form, it is necessary to take into account that they can be constructed and further used only when a number of fairly significant restrictions are met. The main thing is that the physical process must satisfy the condition of cyclic repeatability; from one cycle to any other cycle, the nature of the process (the order of operations, the sequence and magnitude of external influences, boundary conditions, the time of the process, etc.) do not change. The definitions of the adequacy of local linear algebraic mathematical models are given. Without the fulfillment of the conditions for the adequacy of the mathematical model, its further use will not be justified.

One of the possible algorithms for the synthesis of an adequate mathematical model is based on the method of identification using real measurements. The problem of constructing a local adequate stable mathematical models in algebraic form reduces to the solution of equivalent extreme problems with an exact operator. Several prediction algorithms based on the synthesis of special local stable adequate mathematical models are proposed. The presence of a local adequate stable algebraic mathematical model makes it possible to draw some qualitative conclusions about the effect of parameters on the predicted characteristic from the magnitude of the coefficients of this model. To construct quantitative estimates of the forecast of physical characteristics under the new conditions, it is expedient to consider the following extreme problems: guaranteed quantitative evaluation from below (from upper) of the forecast of the maximum deviations of the predicted characteristics from the given experimental characteristics, guaranteed quantitative evaluation from below (from upper) of the forecast of the minimum deviations of the predicted characteristics from the given experimental characteristics.

As an example of a real physical process the process of steel smelting was chosen.

Key words: adequate mathematical models, algebraic form, prediction algorithms, steelmaking.

Постановка проблемы

Для изучения поведения физических процессов в последнее время широко используются методы математического моделирования. Эти методы относительно доступны и не требуют значительных затрат для реализации. Но главное их достоинство заключается в возможности прогнозирования поведения физических процессов в новых как внешних, так и внутренних условиях. Центральное место в методах математического моделирования занимает математическая модель физического процесса. Довольно часто такие модели строятся как алгебраические соотношения между характеристиками физического процесса. Такого типа модели получили широкое распространение в технике, экологии, экономики и т.д. [1–2]. Для обоснованного применения математических моделей в алгебраической форме необходимо принимать во внимание, что они могут быть построены и далее использоваться только при выполнении ряда достаточно существенных ограничений.

Анализ последних исследований и публикаций

Кратко сформулируем общие условия и ограничения, при которых возможно построение математических моделей в алгебраической форме [3–4]. Главное, физический процесс должен удовлетворять условию циклической повторяемости, т.е. от одного цикла к любому другому циклу не изменяются характер процесса (порядок следования операций, последовательность и величина внешних воздействий, граничные условия, время протекания процесса и т.д.). Примерами таких процессов могут быть процесс приготовления некоторых традиционных продуктов питания (пивоварение, сахароварение, виноделие, выпечка хлеба), процесс выплавки стали. В такой ситуации возможно построить отображение исходных параметров циклического физического процесса $q \in Q \subset R^n$ в конечные характеристики циклического физического процесса $u \in U \subset R^m$:

$$u = F(q), \tag{1}$$

где $F: Q \to U$ есть некоторая алгебраическая функция. При этом параметры этой алгебраической математической модели $F: Q \to U$ физического процесса будут постоянными. Выбор исходных параметров и конечных результатов (характеристик) зависит от целей изучения процесса.

По условию циклической повторяемости структура и параметры отображения полагаются неизменными в процессе изучения. Отображение $F: Q \to U$ должно удовлетворять условиям:

- отображение однозначно;
- отображение инъективно;
- область определения односвязная;
- отображение непрерывно, т.е. малые изменения исходных данных приводят к малым изменениям конечных результатов.

Если ограничиться только малыми изменениями характеристик $q = (q_1, q_1, ..., q_n)^t$, $((.)^T$ есть знак транспонирования) в малой окрестности точки $q^0 = (q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0)^t$, тогда любую гладкую функцию $F(q)$ в уравнении (1) можно приближенно заменить линейной зависимостью. В этом случае отображение $F(q)$ будет определять совокупность локальных линейных алгебраических математических моделей по каждой конечной характеристики u_i, $1 \le i \le m$.

В работе [3] даны определения адекватности локальных линейных алгебраических математических моделей. Очевидно, что без выполнения условий адекватности математической модели дальнейшее ее использование не будет обоснованным.

Из особенностей рассматриваемых физических процессов, вытекают следующие свойства локальных адекватных линейных алгебраических математических моделей (*LALAMM*) физического процесса [3]:

1. *LALAMM* при любом выборе параметров модели являются приближенными;
2. *LALAMM* хорошо описывают реальный физический процесс лишь в некоторой малой окрестности точки q^0 изменения исходных переменных q (свойство локальности).

Кроме того, для целей дальнейшего использования в задачах прогнозирования таких моделей необходимо, чтобы алгоритм синтеза адекватной алгебраической математической модели обеспечивал устойчивые к малым изменениям исходных данных результаты [4]. Будем называть такие модели как локальные адекватные устойчивые линейные алгебраические математические модели (*LASLAMM*).

Цель исследования

Проанализировать возможные алгоритмы идентификации параметров локальных адекватных устойчивых линейных алгебраических математических моделей с целью дальнейшего использования их для прогнозирования характеристик физических процессов.

Изложение основного материала исследования

Алгоритмы прогнозирования характеристик физических процессов.

Один из возможных алгоритмов синтеза адекватной математической модели предложен в работах [3–4], который базируется на методе идентификации с использованием реальных измерений.

В рамках этого алгоритма задача синтеза адекватной линейной математической модели с n переменными $q_1, q_1, ..., q_n$ например, относительно переменной u_1 с количеством измерений каждой переменной равной n в детерминированной постановке, сводится к задаче решения алгебраической системы [3–4]:

$$A_p(q_1, q_1, ..., q_n)z = u_1, \tag{4}$$

где оператор $A_p(q_1, q_1, ..., q_n)z$ определяется следующим образом

$$A_p(q_1, q_1, ..., q_n)z = z_1 q_1 + z_2 q_2 + ... z_n q_n, + z_{n+1},$$

$z = (z_1, z_1, ..., z_{n+1})^T$ есть искомый вектор параметров математической модели процесса, $q_1 = (q_{11}, q_{12}, ..., q_{1n})^T$, относительно переменной u_1 (первая строка в линейном отображении F).

Поскольку измерения переменных $q_1, q_1, ..., q_n$ получены экспериментальным путем, то предполагается, что каждое измерение q_{ij}, $1 \le i \le n+1$, $1 \le j \le n$ имеет погрешность, максимальная величина которой известна априори:

$$\left| q_{ij} - q_{ij}^{ex} \right| \le \delta_i, 1 \le i \le n+1, 1 \le j \le n, \delta_i \le \delta_0, \tag{5}$$

где q_{ij}^{ex} – точное измерение переменной q_{ij}.

Обозначим через p вектор из пространства $E^{n(n+1)} = E^n \oplus E^n \oplus .. . \oplus E^n$:

$$p = (q_{11}, q_{12}, ..., q_{11}, q_{(n+1)1}, .. q_{(n+1)n})^T,$$

где E^n есть евклидовое векторное пространство размерности n со стандартной нормой.

Каждый вектор q_i может принимать значение в замкнутой области $D_i \subset E^n$, согласно неравенствам (5). Вектор p может принимать значения в замкнутой области $D = D_1 \oplus D_2 \oplus .. . \oplus D_n \subset E^{n(n+1)}$. Каждому вектору p из области D соответствует определенный оператор A_p. Множеству $D \subset E^{n(n+1)}$ будет соответствовать класс операторов $\{A_p\} = K_A$.

Представим (4) как

$$A_p z = u_{\delta_1}, \tag{6}$$

где $u_{\delta_1} \in U \subset E^{(n+1)}$, $z \in Z \subset E^n$, $\left\| u_{\delta_1} - u_1^{ex} \right\|_U \le \delta_1, u_1^{ex}$ есть точная правая часть уравнения (6);

$$\sup_{p_\alpha, p_\beta} \left\| A_{p_\alpha} - A_{p_\beta} \right\|_{Z \to U} \le h_1;$$

$\|\cdot\|_U$, $\|\cdot\|_Z$ – нормы в векторном евклидовом пространстве.

Задачу построения адекватных математических моделей в алгебраической форме можно сформулировать таким образом: определить вектор $z \in Z$, который при подстановке в уравнение (6) дает вектор $A_p z$, который отличается по норме от u_{δ_1} на величину меньшую либо равную δ_1 δ_1 [3],[4].

Множество возможных решений задачи синтеза (множество адекватных алгебраических моделей) при фиксированном операторе $A_p \subset K_A$ определяется следующим образом:

$$Q_{\delta_1, p} = \{z \in Z : \left\| A_p z - u_{\delta_1} \right\|_U \le \delta_1\}. \tag{7}$$

Множество $Q_{\delta_1,p}$ является ограниченным, если $\Delta = \det A_p \neq 0$, и, возможно, неограниченным, если $\Delta = \det A_p = 0$. В работе [3] показано, что при некотором выборе исходных данных множество $Q_{\delta_1,p}$ является неограниченным.

Для выбора индивидуальной математической модели из множества $Q_{\delta_1,p}$ необходимо использовать дополнительную информацию. Если такая информация отсутствует, то за решение задачи (6) можно принимать элемент $z_p \in Q_{\delta_1,p}$, который является решением следующей экстремальной задачи на возможно неограниченно множестве $Q_{\delta_1,p}$ [3]:

$$\Omega[z_p] = \inf_{z \in Q_{\delta_1,p}} \Omega[z]. \tag{8}$$

Элемент $z_p \in Q_{\delta_1,p}$ можно интерпретировать как наиболее устойчивый элемент к малым изменениям факторов, которые не приняты во внимание (наиболее стабильная часть). Таким образом, построена *LASLAMM*. Влияние указанных факторов только повышает величину $\Omega[z_p]$ [4]. Такое свойство решения z_p особенно важно для построения достоверного прогнозирования. Получены условия, при которых решение экстремальной задачи (8) существует и единственно [5],[6].

Наличие *LASLAMM* позволяет сделать некоторые качественные выводы о влиянии параметров $q_1, q_1, \ldots, q_n$ на прогнозируемую характеристику u_1 по величине коэффициентов модели *LASLAMM*.

Для построения количественных оценок прогноза физических характеристик в новых условиях целесообразно рассмотреть следующие экстремальные задачи:

$$\left\| A_{p^{pl}} z_{\delta_1}^{pl} - u_{\delta_1} \right\|_U^2 = \inf_{a \in D} \sup_{A_p \in K_A} \left\| A_p z_a - u_{\delta_1} \right\|_U^2, \tag{9}$$

$$\left\| A_{p^{up}} z_{\delta_1}^{up} - u_{\delta_1} \right\|_U^2 = \sup_{a \in D} \sup_{A_p \in K_A} \left\| A_p z_a - u_{\delta_1} \right\|_U^2, \tag{10}$$

$$\left\| A_{p^{low}} z_{\delta_1}^{low} - u_{\delta_1} \right\|_U^2 = \inf_{a \in D} \inf_{A_p \in K_A} \left\| A_p z_a - u_{\delta_1} \right\|_U^2, \tag{11}$$

$$\left\| A_{p^{mix}} z_{\delta_1}^{mix} - u_{\delta_1} \right\|_U^2 = \sup_{a \in D} \inf_{A_p \in K_A} \left\| A_p z_a - u_{\delta_1} \right\|_U^2, \tag{12}$$

где z_a есть решение экстремальной задачи (8) на множестве $Q_{\delta_1,a}$, $a \in D$.

Использование модели $z_{\delta_1}^{pl}$ для прогнозирования характеристики u_1 позволяет получить гарантированную количественную оценку снизу прогноза максимальных отклонений характеристики u_1 от u_{δ_1}.

Аналогично, использование модели $z_{\delta_1}^{up}$ для прогнозирования характеристики u_1 позволяет получить гарантированную количественную оценку сверху прогноза максимальных отклонений характеристики u_1 от u_{δ_1}.

Использование модели $z_{\delta_1}^{low}$ для прогнозирования характеристики u_1 позволяет получить гарантированную количественную оценку снизу прогноза минимальных отклонений характеристики u_1 от u_{δ_1}.

Аналогично, использование модели $z_{\delta_1}^{mix}$ для прогнозирования характеристики u_1 позволяет получить гарантированную количественную оценку сверху прогноза минимальных отклонений характеристики u_1 от u_{δ_1}.

LASLAMM может быть использовано также для прогнозирования по следующему алгоритму: для нескольких малых окрестностей области изменения параметров физического процесса $q_1, q_1, \ldots, q_n$ синтезируются свои *LASLAMM*, далее параметры *LASLAMM* экстраполируются (интерполируются) на новые окрестности области изменения параметров физического процесса и проводится математическое моделирование в новых условиях без использования экспериментальных данных в этих условиях. Известны алгоритмы построения устойчивых решений уравнения (6) с учетом погрешности оператора A_p. Однако, для использования этих алгоритмов необходимо знать величину уклонения оператора A_p от точного оператора A_3^{ex}. В общем случае возможно построить бесконечное число алгоритмов прогноза даже в рамках вариационного метода их построения [5–6]. Эффективность предлагаемых алгоритмов необходимо проверять на конкретных физических задачах. Эта эффективность зависит также от выбора конечной характеристики физического процесса и от выбора метрики пространства U.

В качестве примера рассмотрена задача синтеза *LASLAMM* процесса выплавки стали с заданными компонентами [3–4]. Начальными данными для расчета были выбраны данные из работы [7] про химический состав, параметры термообработки и прочности стали [4–5].

В результате получена следующая линейная математическая модель процесса выплавки стали:

$$q_1 = 1085q_2 + 1731q_3 - 166q_4 + 8{,}7q_5 - 1448q_6 - 25{,}3q_7 + 11q_8 - 82{,}4q_9 - 31{,}1q_{10} + 12{,}0\,. \quad (13)$$

Метод получения параметров математической модели гарантирует устойчивость параметров к малым изменениям исходных данных. Такие математические модели могут быть использованы для прогнозирования качественного поведения процесса при изменении исходных параметров физического процесса. Например, анализ модели (13) позволяет сделать вывод, что наибольшее положительное влияние на параметр q_1 оказывают характеристики q_2, q_3 и наибольшее отрицательное влияние – q_6.

Выводы

В работе предложено несколько возможных алгоритмов идентификации параметров локальных адекватных устойчивых линейных алгебраических математических моделей с целью дальнейшего использования их для целей прогнозирования характеристик физических процессов: качественная оценка прогноза, гарантированная количественная оценка снизу (сверху) прогноза максимальных (минимальных) отклонений выбранной характеристики физического процесса, методы экстраполяции (интерполяции). При этом необходимо выполнять проверку условий корректной постановки задачи синтеза алгебраических математических моделей. Приведены примеры построения прогноза.

Список использованной литературы

1. Kuchuk F.J. Pressure Transient Formation and Well Testing: Convolution, Deconvolution and Nonlinear Estimation / F.J. Kuchuk, M. Onur, F. Hollaender. — Elsevier Science, 2010. — Vol. 57. — 414 p.
2. Алексанян И.Ю. Математическое моделирование тепло-массо-переноса при распылительной сушке растительных экстрактов / И.Ю. Алексанян, Ю.А. Максименко, Ю.С. Феклунова // Вестник Астрахан. гос. техн. ун-та. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. — 2013. — № 1. — С. 9–13.
3. Menshikov Yu.L. Identification of Mathematical Model Parameters of Stationary Process / Yu.L. Menshikov // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2014. — Vol. 2, № 5. —P. 189–193.
4. Menshikov Yu.L. Features of Parameters Identification of Algebraic Mathematical Models / Yu.L. Menshikov // International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT). — 2014. — Vol. 3. — I. 11. — P. 251–255.
5. Menshikov Yu.L. Parameter identification of adequate mathematical models of steel smelting / Yu.L. Menshikov // Pioneer Journal of Advances in Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 16. — I. 1-2. — P. 19–28.
6. Меньшиков Ю.Л. Корректность задачи синтеза адекватных алгебраических математических моделей / Ю.Л. Меньшиков // Вест. ДНУ. Серия: Моделирование. — 2016. — Вып. 8. — № 8. — С. 230–240.
7. Тогобицкая Д.Н. Физико-химические критерии и модели для оценки влияния химического состава на свойства колесной стали / Д.Н. Тогобицкая, А.И. Бабаченко, А.С. Козачек // Наукові вісті. Сучасні проблеми металургії. — 2013.— №16. — С. 51–56.