

ПРО РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ І ДИНАМІКИ ЗЕРНИСТОГО ТІЛА

**О.В. Нанка, І.І. Ієвлев, В.І. Семенов, В.В. Семенов,
В.М. Нагаєв, І.О., Данченко**

*(Харківський національний технічний університет сільського
господарства ім. П. Василенка)*

Дослідження присвячене розробці математичної моделі, яка описує динаміку і статичку зернистого середовища, схильного до ефекту Рейнольдса. Є безліч підходів до побудови моделей зернистих матеріалів. Однак, ефект Рейнольдса не враховувався. У даній роботі використовуються методи побудови моделей суцільних середовищ рівноважної і нерівноважної термодинаміки. Отримано реологічне співвідношення, яке говорить про те, що дана модель відповідає тілу Кельвіна-Фойгта. Як додаток розглядається задача про рівновагу зернистого шару на похилій площині в полі сил тяжіння. Запропоновано наближений спосіб розв'язання задачі аналогічний методу прямих Канторовича.

1. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Розвитку теорії гранульованих середовищ (інші назви сипуче або зернисте середовища) присвячено багато робіт. Огляд по експериментальним і теоретичним дослідженням в даній області міститься, наприклад, в [1-3]. Гранульоване середовище являє собою фактично двофазне середовище, що складається з досить великих твердих частинок, простір між якими заповнено газом (повітрям). Впливом останнього на динаміку середовища зазвичай нехтують. Слід зауважити, що є багато підходів до побудови теорії гранульованих середовищ, що пов'язано зі складним характером взаємодії частинок цього середовища між собою. Ця взаємодія, що визначає реологію середовища, істотно залежить від її стану. Розрізняють повільні і швидкі рухи середовища [4]. У першому стані речовина веде себе як тверде тіло (пружне або пластичне), відносні переміщення частинок середовища малі. Тут застосовні теорії подібні теорії пружності або пластичності [5]. Другий стан спостерігається, коли частинки інтенсивно рухаються, взаємодія носить характер зіткнень. В середовищах подібних газу, тих що мають складну неньютонівської реологію, стан швидкого руху середовища набуває або швидкостей в високоградієнтних полях, або при накладенні на неї дрібномасштабних високочастотних збурень (вібрацій) [6,7].

Експерименти говорять про наявність залежності дилатації (характеристики, що визначає зміну обсягу тіла при деформації) від зсувних деформацій. Вперше про даний ефект згадує Рейнольдс [8]. Ефект полягає в тому, що в ненавантаженому стані частки розташовуються деяким хаотичним чином. При зовнішньому впливі відбувається деформація тіла, частинки прагнуть зайняти інше розташування в просторі, відстань між центрами

частинок збільшується, що призводить до збільшення об'єму тіла.

Спроба побудувати теорію таких середовищ з урахуванням додаткових обмежень була здійснена в роботах [9-11]. Тут були сформульовані рівняння статички методами варіаційного обчислення із застосуванням варіаційного принципу мінімуму повної енергії. На жаль, через складність математичного плану вирішення конкретних прикладних задач відсутнє.

Авторами було проведено побудову теорії зернистого середовища, що має ефект Рейнольдса і пружні властивості, методами термодинаміки, для випадку рівноважних процесів, коли динамічними ефектами нехтують, наведено рішення найпростішої задачі про рівновагу зернистого шару на горизонтальній площині [12].

2. Мета і завдання дослідження

Передбачається отримати замкнуту систему рівнянь і граничних умов, що описують статичку і динаміку зернистого середовища в зовнішніх силових полях з урахуванням ефекту Рейнольдса. В якості основного інструменту застосовуються методи рівноважної і нерівноважної термодинаміки [13,14]. Апробація сформульованих співвідношень здійснюється застосуванням їх до вирішення завдання про рівновагу зернистого шару постійної товщини на похилій площині.

3. Рівноважний стан

Метод термодинаміки базується на застосуванні основного термодинамічного рівняння [12]

$$\delta u = T \delta s + \tau_{ik}^* \delta \gamma_{ki} \quad (1)$$

де

$u = u(s, \gamma_{ik})$ - внутрішня енергія одиниці маси речовини;

s - питома ентропія;

T - температура;

$$\tau_{ik}^* = \tau_{ik} - 2p\mu\gamma_{ik} \quad (2)$$

$\tau_{ik} = \sigma_{ik} + p\delta_{ik}$ - девіатор тензора напружень;

$p = p(s, \gamma_{ik})$ - тиск;

σ_{ik} - тензор напружень

μ - феноменологічний коефіцієнт, що бере участь в залежності дилатації від зсувних деформацій, $\mu \in [0.59 \div 0.63]$ (см. [9])

$$\mathcal{G} = \mu \gamma_{ik} \gamma_{ik} \quad (3)$$

$\mathcal{G} = \partial u_i / \partial x_i$ - дилатація (за повторювальними індексами ведеться складання від 1 до 3);

γ_{ik} - девіатор тензора деформацій

$$\gamma_{ik} = \varepsilon_{ik} - \mathcal{G}\delta_{ik} \quad (4)$$

ε_{ik} - тензор малих деформацій

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

u_i ($i = 1, 2, 3$) – вектор нескінченно малих перемішень;

δ_{ik} – символи Кронекера.

З рівняння (1) виходить, що співвідношення для вільної енергії $f = u - Ts$

$$\delta f = -s\delta T + \tau_{ik}^* \delta \gamma_{ki} \quad (6)$$

Звідки витікають вирази для калоричного

$$s = - \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{\gamma_{ik}} \quad (7)$$

и термічного

$$\tau_{ik}^* = \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_{ik}} \right)_T \quad (8)$$

рівнянь стану.

В лінійній термодинаміці вільна енергія подається у вигляді ряду Тейлора по її аргументах ($\theta = T - T_0$, γ_{ik}) в межах початкового природного рівноважного стану ($T = T_0$, $\gamma_{ik} = 0$, $\sigma_{ik} = 0$), в якому обмежується членами не вище другого порядку. Для початкового природного стану

$$s \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{T_0, 0} = 0, \tau_{ik}^* \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_{ik}} \right)_{T_0, 0} = 0, \gamma_{ik} = 0$$

маємо

$$f(T, \gamma_{ik}) = -\frac{C_\gamma}{2T_0} \theta^2 - b_{ik} \theta \gamma_{ik} + \frac{1}{2} A_{ikmn} \gamma_{ik} \gamma_{mn} \quad (9)$$

де

$$\theta = T - T_0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_{T_0, 0} = -\frac{C_\gamma}{2T_0}, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \gamma_{ik}} \right)_{T_0, 0} = -b_{ik}, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma_{ik} \partial \gamma_{mn}} \right)_{T_0, 0} = A_{ikmn}$$

C_γ - являє собою теплоємність за відсутності деформацій;

b_{ik} , A_{ikmn} - феноменологічні константи.

Будемо розглядати ізотропні середовища, для яких вираз вільної енергії спрощується

$$f(T, \gamma_{ik}) = -\frac{C_\gamma}{2T_0} \theta^2 + \frac{\nu}{2\rho_0} \gamma_{ik} \gamma_{ki} \quad (10)$$

де ν – константа, ρ_0 – щільність матеріалу в початковому стані, і в силу малості деформацій вважати тут $\rho_0 = \rho$. З умови термодинамічної стійкості слід, що константи C_γ, ν позитивні.

Необхідна реологічне співвідношення для даного випадку впливає з (2), (8), (10)

$$\tau_{ik}^* = \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_{ik}} \right) = \frac{2\nu}{\rho} \gamma_{ik}, \quad \tau_{ik} = 2(\nu + \mu p) \gamma_{ik} \quad (11)$$

Тоді вираз для тензора напружень набуває вигляду

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + 2(\nu + \mu p) \gamma_{ik} \quad (12)$$

4. Реологія зернистого матеріалу в динамічному стані

Будемо розглядати зернисте середовище, що здійснює малі переміщення, що характеризуються полем переміщень і полем швидкостей

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)) \\ \vec{v} &= (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x)) \\ (x &= (x_1, x_2, x_3)) \end{aligned}$$

В силу малості переміщень ейлерів і лагранжів способи опису руху суцільного середовища збігаються, а швидкість і переміщення пов'язані співвідношенням

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}(t, x) \quad (13)$$

Останнє означає, що повна і локальна похідні будь-якої характеристики суцільного середовища збігаються.

Для подальших побудов будуть потрібні рівняння балансу основних енергетичних характеристик суцільного середовища: імпульсів, кінетичної, внутрішньої і повної енергій, які виражають собою закони механіки суцільних середовищ [13-15, 17]. Як показує досвід природничих наук, рівняння балансу будь-якої величини, що відноситься до деякого обсягу суцільного середовища, може бути представлено у вигляді

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d^e A}{dt} + \frac{d^i A}{dt} \quad (14)$$

Зміна величини A відбувається за рахунок припливу або відтоку її ззовні (перший доданок праворуч) і наявності джерел або стоків її всередині обсягу (другий доданок праворуч). Вводячи поняття питомих величин a_ν, σ_a – потужність внутрішніх джерел / стоків, \vec{J}_a – об'ємна щільність кондуктивних потоків таких, що

$$A = \int_V a_v dV, \quad \frac{d^e A}{dt} = \oint_S \vec{n} \cdot \vec{J}_a dS \equiv \int_V \text{div} \vec{J}_a dV, \quad \frac{d^i A}{dt} = \int_V \sigma_a dV \quad (15)$$

Тоді рівняння балансу в диференціальній формі може бути представлено у вигляді

$$\rho \frac{da_v}{dt} = \frac{\partial J_{a,i}}{\partial x_i} + \sigma_a \quad (16)$$

Перший доданок праворуч «дивергентне» відповідає за приплив / відтік через поверхню S , що обмежує об'єм V , друге праворуч визначає потужність джерел / стоків.

Термодинаміка розглядає системи, що знаходяться в механічній рівновазі (спокої), макроскопічна швидкість системи дорівнює нулю. Такий стан накладає обмеження і для систем, які не перебувають в рівновазі (див. Нижче гіпотеза локальної рівноваги). Щоб отримати можливість оперувати методами нерівноважної термодинаміки, надходять так. Вводиться поняття «власної» системи відліку K^* для кожної точки B тіла - системи відліку, що рухається рівномірно і поступально зі швидкістю $\vec{V} = \vec{v}(t^*, x_B)$, що дорівнює швидкості точки B в момент часу t^* . Визначаємо поле швидкостей $\vec{w}(t, x) = v(t, x) - \vec{V}$ точок тіла в цій системі. Видно, що $\vec{w}(t^*, x_B) = 0$, тобто дана частка тіла в цей момент часу спочиває. Координати точок тіла x в вихідній системі відліку K і $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ в системі K^* пов'язані перетворенням Галілея. Зауважимо, що $\partial \vec{w} / \partial t, \partial w_i / \partial x_k^*$ відмінні від нуля в момент часу t^* в точці B . Далі все співвідношення буде формулюватися в термінах системи відліку K^* , однак, для стислості запису знак * у виразах будемо опускали.

Як показано (див. [13-15]), мають місце такі рівняння балансу: імпульсів

$$\rho \frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + \rho g_i \quad (17)$$

кінетичної енергії

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{w^2}{2} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ki} w_i) - \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \rho g_i w_i \quad (18)$$

потенціальної енергії φ зовнішнього поля сил тяжіння інтенсивності g_i

$$\rho \frac{d\varphi}{dt} = -\rho g_i w_i \quad (19)$$

внутрішньої енергії u

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial J_{u,i}}{\partial x_i} + \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \quad (20)$$

повної енергії $e = v^2 / 2 + \varphi + u$

$$\rho \frac{de}{dt} = \frac{\partial J_{e,i}}{\partial x_i} \quad (21)$$

Відсутність джерел в рівнянні (21) говорить про виконання закону збереження повної енергії.

Основою нерівноважної термодинаміки є гіпотеза локальної рівноваги, яка містить три положення:

- досить малі об'єми речовини знаходяться в стані термодинамічної рівноваги;
- для малих об'ємів можна ввести поняття термодинамічних потенціалів (внутрішня енергія, вільна енергія, потенціал Гіббса);
- приватні похідні термодинамічних потенціалів по термодинамічним змінним визначають термодинамічні сили так само, як і у випадку рівноважного стану.

Ці твердження призводять до, так званої, тотожності Гіббса, яке за зовнішньою формою збігається з основною термодинамічною рівністю рівноважного стану. У нашому випадку тотожність Гіббса має вигляд

$$\delta u = T \delta s + \tau_{ik}^* \delta \gamma_{ik} \quad (22)$$

Тут символ δ означає будь-яка зміна відповідної величини (повний диференціал, похідну по часу та ін.).

Замінімо в (22) δ на повну похідну

$$\frac{du}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \tau_{ik}^* \frac{d\gamma_{ik}}{dt} \quad (23)$$

Співвідношення (20), (23) дозволяють записати рівняння балансу для ентропії

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\partial J_{s,i}}{\partial x_i} + \sigma_s \quad (24)$$

де

$J_{s,i}$ ($i = 1, 2, 3$) - об'ємна щільність кондуктивного потоку ентропії;

σ_s - потужність джерел ентропії, яка називається «виробництвом» ентропії

$$\sigma_s = -\frac{1}{T^2} J_{u,i} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{p^v - p}{T} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\tau_{ik}^v - \tau_{ik}}{T} e_{ik} \quad (25)$$

Тут p, τ_{ik} - відносяться до рівноважних співвідношень (11), (12), а p^v, τ_{ik}^v до нерівноважного стану. Виробництво ентропії представляється сумою

доданків в вид твори двох співмножників: градієнтних

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial w_i}{\partial x_i}, e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right)$$

та «ПОТОКОВИХ»

$$-\frac{1}{T^2} J_{u,i}, -\frac{p^v - p}{T}, \frac{\tau_{ik}^v - \tau_{ik}}{T}$$

Ці множники пов'язані феноменологічними співвідношеннями, які мають властивість симетрії (Онзагер) і для ізотропних середовищ підкоряються принципу Кюрі. У нашому випадку ці співвідношення приймають вид

$$J_{u,i} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, p^v - p = -\mu_1 \operatorname{div} \vec{w}, \tau_{ik}^v - \tau_{ik} = 2\mu_2 e_{ik} \quad (26)$$

Розбиваючи тензор напружень на кульовий і девіатор, отримаємо

$$\sigma_{ik} = -p^v \delta_{ik} + \tau_{ik} = -p \delta_{ik} + 2(\nu + \mu p) \gamma_{ik} + \mu_1 \operatorname{div} \vec{w} \delta_{ik} + 2\mu_2 e_{ik} \quad (27)$$

З останнього рівняння бачимо, що даний реологічний вираз відповідає моделі тіла Кельвіна-Фойгта [18].

З огляду на закон перетворення характеристик суцільного середовища при переході з однієї системи відліку в іншу відповідно до перетворень Галілея (фактично відповідає заміні одного поля швидкостей на інше див. [19]) формулюємо основну систему рівнянь (3), (17), (27) для динаміки зернистого шару в системі відліку K .

5. Вихідна система рівнянь динаміки зернистого середовища

Будемо розглядати ізотермічні процеси, що протікають в зернистому середовищі, коли теплові явища можуть розглядатися окремо. Наведемо повну систему рівнянь для даного випадку.

$$\rho = \text{const} \quad (28)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + \rho g_i \quad (29)$$

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + 2(\nu + \mu p) \gamma_{ik} + \mu_1 \mathcal{G} \delta_{ik} + 2\mu_2 e_{ik} \quad (30)$$

$$\gamma_{ik} = \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (31)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \mu \gamma_{ik} \gamma_{ki} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = v_i \quad (33)$$

Із співвідношення (30) бачимо, що дана модель визначає тіло Кельвіна-Фойгта [18].

6. Граничні умови

Співвідношення динаміки зернистого середовища представляються рівняннями в приватних похідних. Вони повинні бути доповнені граничними і початковими умовами. Межі є поверхнею, яка відділяє досліджуване тіло від зовнішніх тіл (рис.1).

Граничні умови залежать від характеру взаємодії середовища з навколишніми тілами. Якщо пов'язана з нерухомим твердим тілом, то можливі варіанти:

1) умова прилипання (в'язка рідина, або дотичне напруження на межі - це менше граничного співвідношення, відповідного закону Кулона)

$$\vec{u} = \vec{v} = 0 \quad (|\vec{p}_t| < f_e |\vec{p}_n|, p_n < 0) \quad (34)$$

де \vec{p}_t - дотичне напруження на S , \vec{p}_n - нормальне напруження, f_e - зовнішній коефіцієнт тертя;

2) має місце гранична умова рівноваги на поверхні S

$$u_n = 0, v_n = 0 \quad (|\vec{p}_t| = f |\vec{p}_n|, p_n < 0) \quad (35)$$

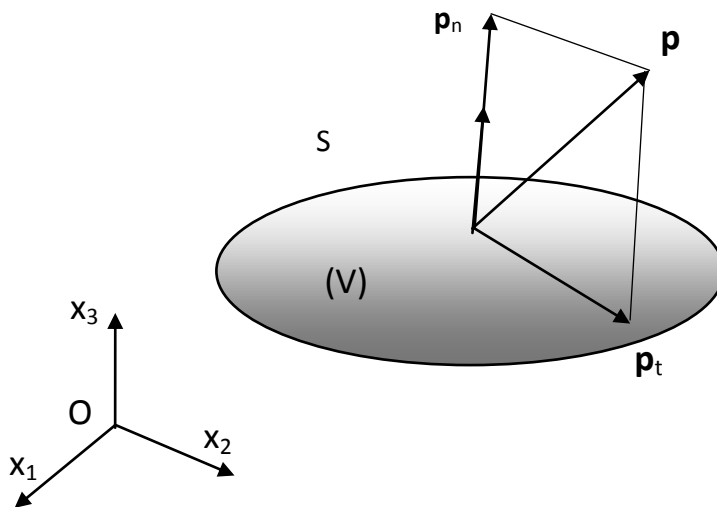


Рис.1 – До граничних умов

де f - коефіцієнт тертя ковзання / кочення, u_n, v_n - нормальні складові векторів переміщень і швидкостей, \vec{n} - одинична нормаль до S зовнішня по відношенню до об'єму V . Остання нерівність в лапках у виразах (34), (35) говорить про те, що зернисті середовища не сприймають напруги розтягнення.

Якщо S є вільною поверхнею, то тут мають місце динамічні умови

$$\begin{aligned} (n_k \sigma_{ki} n_i)_e &= (n_k \sigma_{ki} n_i)_i \\ (n_k \sigma_{ki} \tau_i)_e &= (n_k \sigma_{ki} \tau_i)_i \end{aligned} \quad (36)$$

де індекс `e` говорить про те, що вираз визначається з зовнішньої сторони S , а індекс `i` - з внутрішньої сторони, τ_i - будь-який одиничний вектор,

дотичний до S .

Якщо напружений стан поза об'ємом відомий, тоді співвідношення Коші механіки суцільних середовищ дозволяє висловити ліві частини (36) через зовнішні навантаження

$$\begin{aligned} (n_k \sigma_{ki} n_i) &= p_n \\ (n_k \sigma_{ki} \tau_i) &= p_i \cdot \tau_i \end{aligned} \quad (37)$$

Слід зауважити, що останнє рівняння фактично відповідає двом незалежним рівнянням в силу свободи вибору вектора.

7. Рівновага зернистого шару на похилій площині

Розглянемо плоску задачу про рівновагу зернистого шару на похилій твердій площині ($u_1 = u_1(x, y), u_2 = u_2(x, y), u_3 = 0, v_1 = v_2 = v_3 = 0$) (рис.2).

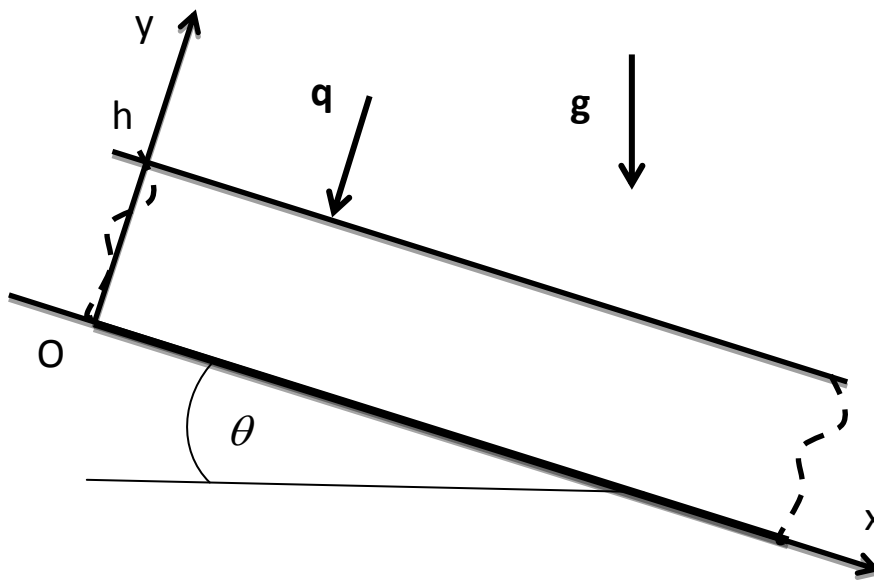


Рис. 2 – Зернистий шар на похилій площині

На шар діє сила тяжіння інтенсивності \vec{g} , площина утворює з горизонтом кут θ . Нехай на вільну поверхню діє нормальне постійне навантаження \vec{q} , спрямоване всередину шару. Для даного випадку маємо

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Ненульові компоненти тензора напружень дорівнюють

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p + 2(\nu + \mu p) \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = (\nu + \mu p) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ \sigma_{22} &= -p + 2(\nu + \mu p) \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \sigma_{33} = -p\end{aligned}\tag{39}$$

Рівняння рівноваги

$$\begin{aligned}2(\nu + \mu p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1 + (\nu + \mu p) \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_1 + (\nu + \mu p) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_2 + \\ + \left(2\mu \frac{\partial}{\partial x} u_1 - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} p + \mu \left(\frac{\partial}{\partial y} u_1 + \frac{\partial}{\partial x} u_2 \right) \frac{\partial}{\partial y} p + \rho g \sin(\theta) = 0\end{aligned}\tag{40}$$

$$\begin{aligned}(\nu + \mu p) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_1 + (\nu + \mu p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2 + 2(\nu + \mu p) \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_2 + \\ + \mu \left(\frac{\partial}{\partial y} u_1 + \frac{\partial}{\partial x} u_2 \right) \frac{\partial}{\partial x} p + \left(2\frac{\partial}{\partial y} u_2 \mu - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} p - \rho g \cos(\theta) = 0\end{aligned}\tag{41}$$

Рівняння зв'язку дилатації з дотичними деформаціями

$$\begin{aligned}-\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{\partial u_2}{\partial y} \mu + 1 \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u_2}{\partial y} - \\ - \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial}{\partial x} u_1 \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} u_2 \mu + 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} u_1 - \\ - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} u_2 \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} u_2 - \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} u_1 + \frac{\partial}{\partial x} u_2 \right)^2 = 0\end{aligned}\tag{42}$$

В якості граничних умов прийнемо умову прилипання на площині ($y = 0$)

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0\tag{43}$$

і безперервності напружень на вільній поверхні ($y = h$)

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} + q = 0\tag{44}$$

8. Алгоритм розв'язання задачі

Для поставленої задачі скористаємося методом прямих Канторовича (різновиди методу Гальборкіна) [20]. Будемо шукати рішення задачі в формі

$$u_1(x, y) = U(y), \quad u_2(x, y) = V(y), \quad p(x, y) = P_0(y) + x P_1(y)\tag{45}$$

Підставляючи співвідношення (45) у рівняння (40) та інтегруючи отримані вирази по x на інтервалі $[0, 1]$, потім, помноживши (40) на x та інтегруючи по x ще раз, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2}U \frac{d}{dy} P_1(y) + \mu \frac{d}{dy} P_0(y) &= 0 \\ \frac{\mu}{3}U \frac{d}{dy} P_1(y) + \frac{\mu}{2}U \left(\frac{d}{dy} P_0(y) \right) + \frac{1}{2} \rho g \sin(\theta) - \frac{1}{2} P_1(y) &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Простими обчисленнями можна показати, що величини U, V є постійними. Розв'язання системи рівнянь (46), дає вирази, довільні константи C_1, C_2

$$P_0(y) = -\sin(\theta)g\rho y/(\mu U) + C_1 + C_2 y/(\mu U), \quad P_1(y) = C_2 \quad (47)$$

Тоді рівняння (42) приводить до виразу

$$\frac{2V\mu-1}{\mu U} (C_2 - \rho g \sin \theta) - \rho g \cos \theta + \mu C_2 U = 0 \quad (48)$$

Що дозволяє знайти залежність $C_2 = C_2(U, V)$

$$C_2 = g\rho \frac{\cos \theta \mu U + 2 \sin \theta V \mu - \sin \theta}{U^2 \mu^2 + 2V\mu - 1} \quad (49)$$

Інтегруючи рівняння (42) по $x \in [0, 1]$, отримаємо співвідношення

$$-\frac{2}{3} \mu V^2 + V - \frac{1}{2} \mu U^2 = 0 \quad (50)$$

Скористаємось рівнянням (50) для виключення змінної U

$$U = \frac{\sqrt{6\mu V(3-2V\mu)}}{3\mu} \quad (51)$$

Таким чином співвідношення (47)-(51) дозволяють записати граничні умови (44) у проінтегрованому по x для $y = h$ у вигляді двох трансцендентних рівнянь відносно невідомих C_1, V . В силу громіздкості цих співвідношень не наводимо тут їх вираження. Зауважимо, що рішення цієї системи рівнянь не єдине. Вибираємо з них усвідомлений фізичний зміст

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{q}{2} - \rho g \frac{h \cos \theta + \sin \theta}{2} - \frac{3v}{2\mu} \\ V &= \frac{3}{2\mu} \end{aligned} \quad (52)$$

9. Отримані результати

Наведені співвідношення дозволяють записати вирази для компонент тензора напружень.

На рис. 3 - 6 наведені графіки для компонент тензора напружень та інтенсивності дотичних напружень для двох випадків $\theta = 0^\circ$ і $\theta = 45^\circ$. Для компонент тензора напружень спостерігається лінійний розподіл по змінним

x, y , абсолютні значення величин зі збільшенням θ зростають.

Інтенсивність дотичних напружень є важливою характеристикою при розрахунках тіла на міцність [21]. Міцність має місце при виконанні нерівності

$$T < \min T(x, y)$$

З порівняння графіків рис.4 і рис.6 бачимо, що для горизонтального розташування площини розподіл $T(x, y)$ більш рівномірний. При $\theta > 0$ спостерігається зростання інтенсивності на нескінченності, що пов'язано, взагалі кажучи, з постановкою завдання в нескінченному уздовж осі Ox шарі (аналогія з плином Пуазейля для нескінченно довгих труб).

На рис.7 наведені лінії рівня для залежностей горизонтальних U і вертикальних V переміщень в залежності від змінних μ, θ . Зі збільшенням μ переміщення ростуть, а зі збільшенням θ зменшуються.

10. Висновки

Уже з розглянутої найпростішої задачі рівноваги зернистого шару на похилій площині ясно, що сформульована модель представляє значні труднощі математичного плану. Для вирішення більш складних завдань, зокрема, динаміки потрібна розробка адекватних чисельних методів. Перевірка моделі, природно, вимагає проведення експериментів.

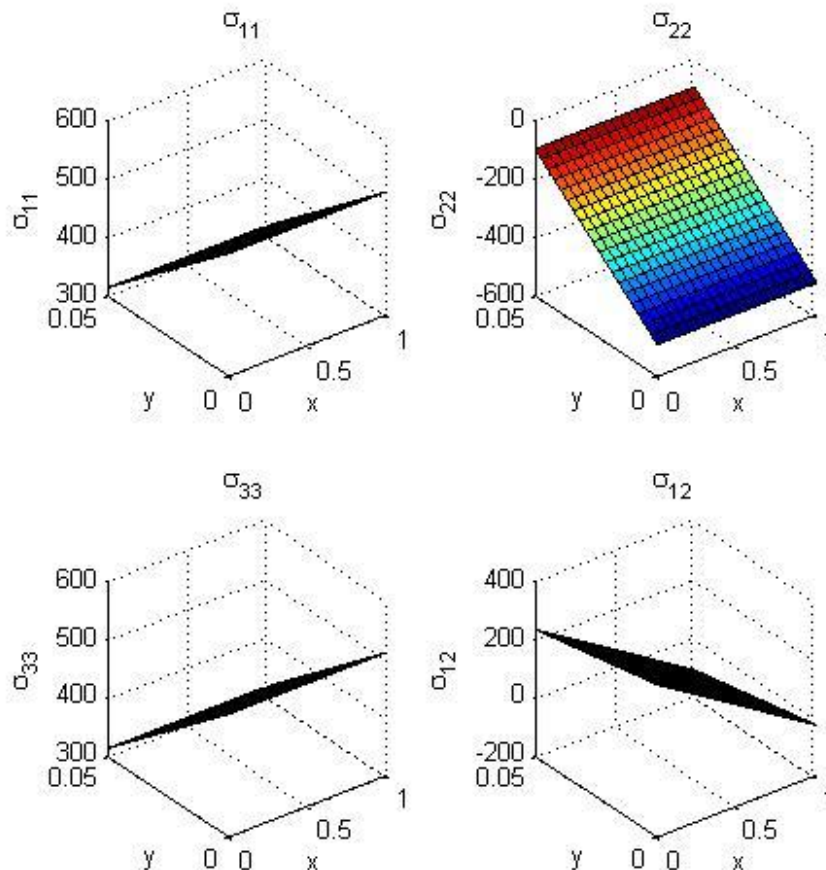


Рис. 3 – Компоненти тензора напружень $\theta = 0^\circ$, $q = 100 \text{ н} / \text{ м}^2$

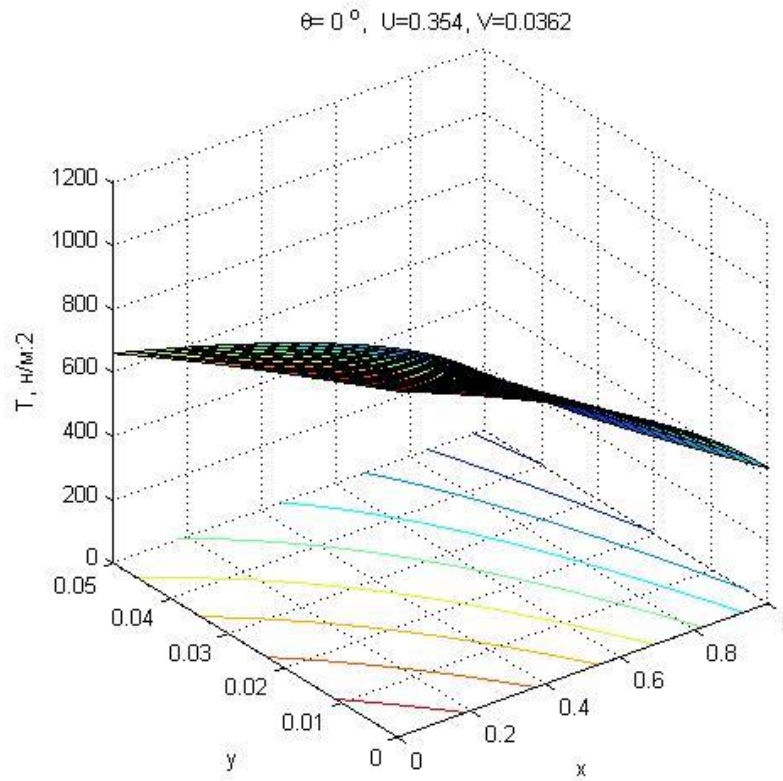


Рис. 4 – Інтенсивність дотичних напружень $\theta = 0^\circ, q = 100 \text{ н} / \text{м}^2$

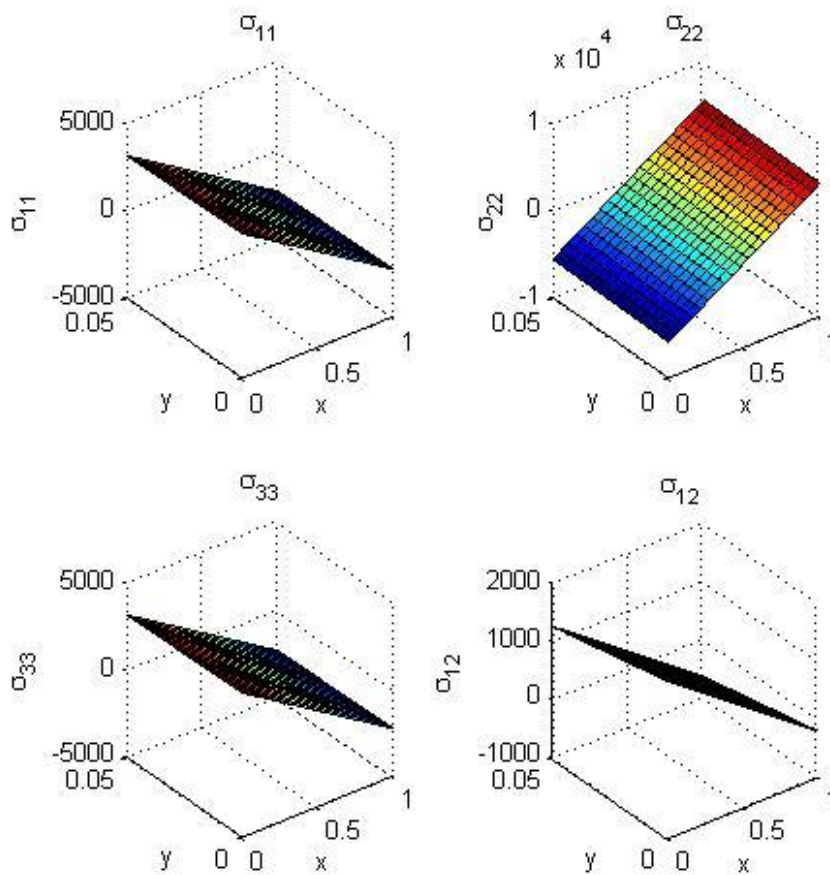


Рис. 5 – Компоненти тензора напружень $\theta = 45^\circ, q = 100 \text{ н} / \text{м}^2$

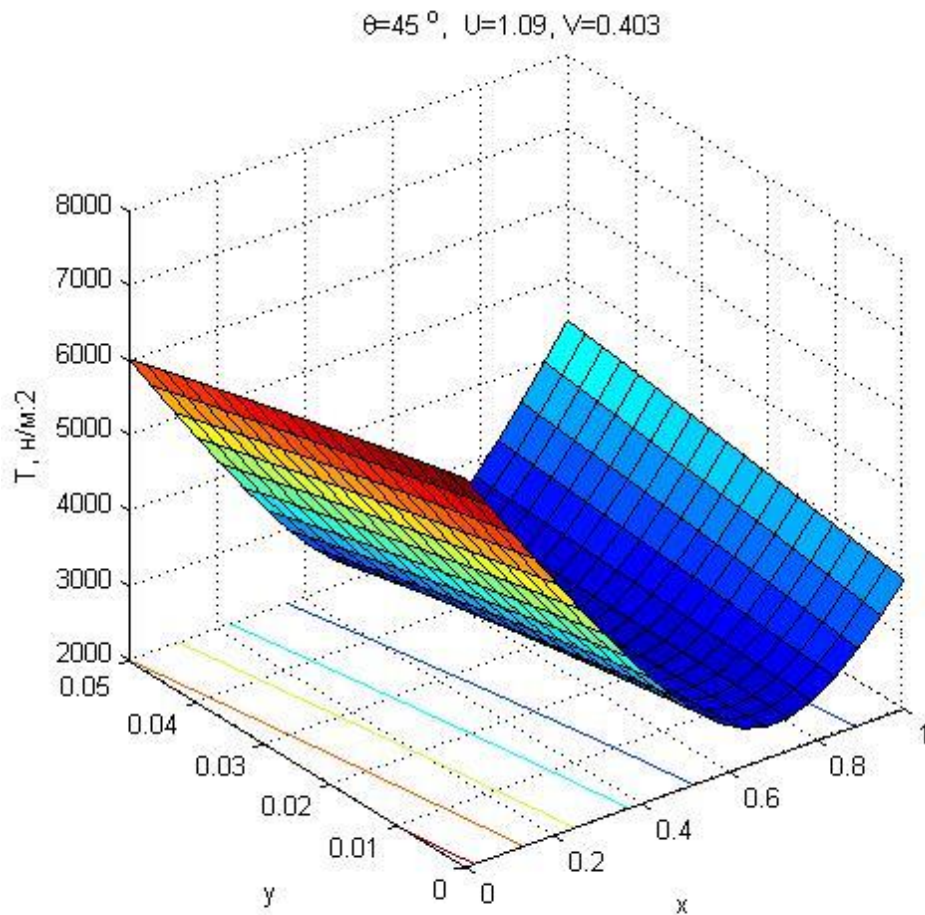


Рис. 6 – Інтенсивність дотичних напружень $\theta = 45^\circ, q = 100 \text{ н} / \text{м}^2$

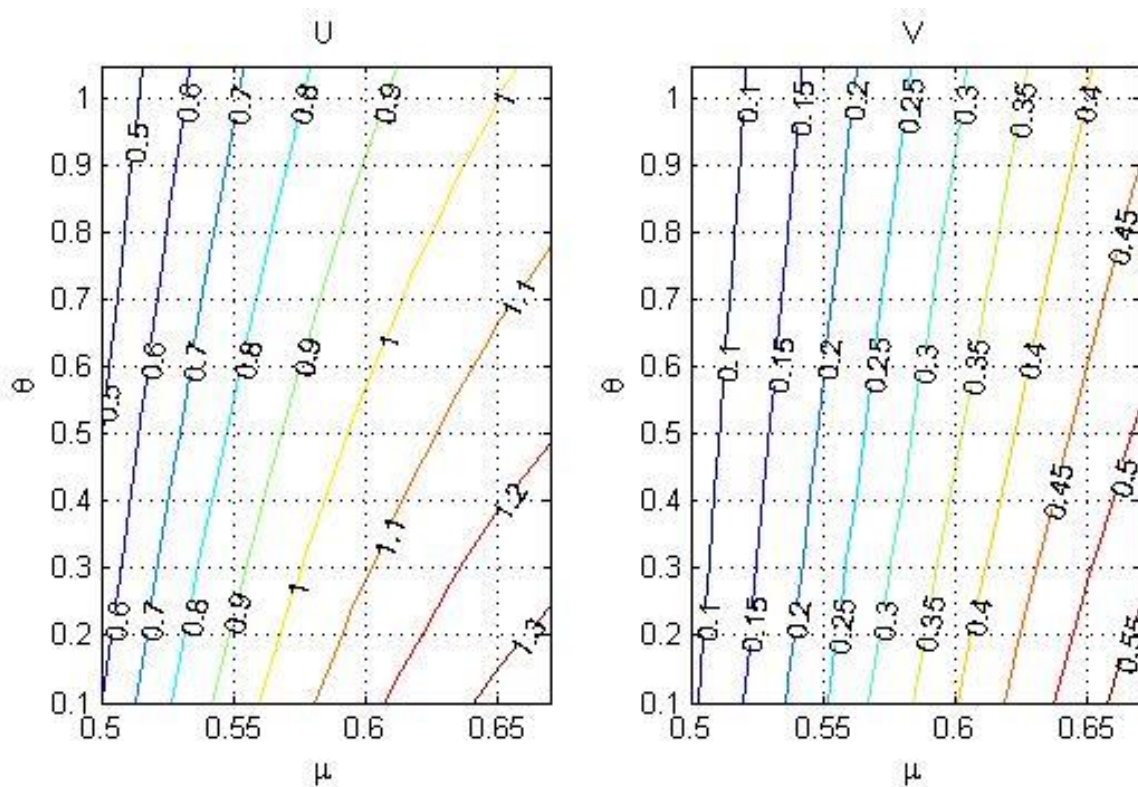


Рис.7 – Лінії рівня горизонтальних і вертикальних переміщень

Список використаних джерел

1. Jorg Schwedes. Review on testers for measuring flow properties of bulk solids. *Granular Mater*, v.5, number 1, 1-43. 2003. Doi 10.1007/s10035-002-0124-4.
2. Aranson I. S. , Tsimring L. S. Patterns and collective behavior in granular media: Theoretical concepts. // *Rev. Mod. Phys.* 2006. Vol. 78. Issue. 2. P. 641-692.
3. Kaviani Rad H., Nejat Pishkenari H. Frictional viscoelastic based model for spherical particles collision. // *Granular Matte.* 2018. Vol. 20. Issue. 4. P. 62-71.
4. Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений. : стат. сб. Под ред. Широ И.В.: стат. сб. / М. Мир. 1985. 280 с.
5. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Наука. 1990. 272 с.
6. Зенков Р.Л. Механика насыпных грузов. М.: Машиностроение.-1964. 251 с.
7. Сподарева Л.А. Стационарное движение слоя сыпучего материала по шероховатой поверхности в инерционном режиме с учетом конечного времени контакта между гранулами. *ПМТФ*, 1999, т.40, №6, с.128-132
8. Reynolds O. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations. *Philosophical Magazine Series 5*, 20(127): 469–481. Dec. 1885.
9. Гольдштик М. А. Процессы переноса в зернистом слое: монография / Новосибирск. СО АН СССР. Ин-т теплофиз. 1984. 163 с.
10. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука.- 1983.- с. 447-461.
11. Liu H., Zhang S.-H., Cheng M., Song H.-W., Trentadue F. A minimum principle for contact forces in random packings of elastic frictionless particles. // *Granular Matter.* 2015. Vol. 17, Issue. 4. P. 475-482.
12. Alexander Nanka, Ivan Iyevlev, VitaliySementsov, DenisBoiko, Viktor Duhanets. Construction Of Mathematical Models Of The Statics Of Grain Media Considering The Reynolds Effect. *Eastern-european journal of enterprise technologies.* Vol 6, no 7 (102) (2019). p.53-62
13. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы: монография / М. Мир. 1974. 304 с.
14. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций: монография / М. Мир. 1973. 280 с.
15. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
16. Steven R. Dahl, Christine M. Hrenya, Vicente Garzo, James W. Dufty. Kinetic Temperatures for a Granular Mixture. // *Physical Review* 2002. E. November. P. 1-31.
17. Седов Л. И. Механика сплошной среды: монография / В 2 т. Т. 1. М.: ФМЛ, "Наука". 1976. 536 с.
18. Рейнер М. Реология. М.: Наука.- 1965.- 223 с.
19. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974. - 520 с.
20. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977, 742 с.
21. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969, 420 с.

Аннотация

Об уравнениях равновесия и динамики зернистого тела
А.В. Нанка, И.И. Иевлев, В.И. Семенцов, В.В. Семенцов,
В.М. Нагаев, И.А. Данченко

Исследование посвящено разработке математической модели, описывающей динамику и статику зернистой среды, подверженной эффекту Рейнольдса. Имеется множество подходов к построению моделей зернистых материалов. Однако, эффект Рейнольдса не учитывался. В настоящей работе используются методы построения моделей сплошных сред равновесной и неравновесной термодинамики. Получено реологическое соотношение, говорящее о том, что данная модель соответствует телу Кельвина-Фойгта. В качестве приложения рассматривается задача о равновесии зернистого слоя на наклонной плоскости в поле сил тяжести. Предложен приближенный способ решения задачи аналогичный методу прямых Канторовича.

Abstract

About equations of equilibrium and dynamics of a grain body
A. Nanka, I. Ievlev, V. Sementsov, V. Sementsov, V. Nagayev, I. Danchenko

The study is devoted to the development of a mathematical model that describes the dynamics and statics of a granular medium subject to the Reynolds effect. There are many approaches to building models of granular materials. However, the Reynolds effect was not taken into account. In this article, we use methods for constructing models of continuous media of equilibrium and non-equilibrium thermodynamics. A rheological relation is obtained, indicating that this model corresponds to the body of Kelvin-Voigt. As an application, the problem of the equilibrium of a granular layer on an inclined plane in the field of gravity is considered. An approximate method for solving the problem is proposed, similar to the method of Kantorovich lines.

УДК 636.087.7

НОВА КОРМОВА ДОБАВКА З ЦИТРУСОВИХ ВИЧАВОК

Котець Г. І., Карунський О. Й., Гноєвий В. І, Гноєвий І. В., Гарлицький В. М., Кишлалі О. К.

У статті наведено результати досліджень з вивчення технологічної лінії гранулювання цитрусових відходів, вивчений їх хімічний склад, визначений валовий вмісту білків, жирів, засвоєних вуглеводів, зокрема простих цукрів та