

УДК 677.075

**ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ВОДОВБИРАННЯ
ТЕКСТИЛЬНИМИ МАТЕРІАЛАМИ**

В.І. ВЛАСЕНКО

Київський національний університет технологій та дизайну

*Повідомлення 1***Напівемпірична модель водовбирання текстильних матеріалів з постійним коефіцієнтом дифузії**

В «Повідомленні 1» запропоновано загальні підходи до розв'язку задачі побудови математичної моделі нестационарного вбирання вологи текстильними матеріалами перпендикулярно їх площині; запропоновано також лінеаризоване рівняння руху вологи, в якому для спрощення вирішення рівняння прийняли коефіцієнт дифузії постійним, а шукану концентрацію вологи представили у вигляді ряду, що є добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від часу, а друга – тільки від координати. Цей підхід передбачається використати при рішенні нелінійної моделі водовбирання

Постановка завдання

Розробити загальний план розв'язку задачі побудови моделі нестационарного водовбирання багатошаровими матеріалами перпендикулярно площині матеріалу та розробити метод розв'язання диференційного рівняння вбирання та розподілу вологи по товщині індивідуального шару матеріалу.

Об'єкти та методи дослідження

Об'єкт досліджень – аналітичне рішення задачі опису водовбирання текстильними матеріалами в лінійній постановці.

Предмет досліджень – напівемпірична модель водовбирання текстильних матеріалів з постійним коефіцієнтом дифузії.

Для математичного моделювання процесу водовбирання використовувались методи математичного аналізу. За допомогою обґрунтованих методів математичної фізики склались і розв'язувались кінетичні рівняння, що описують нестационарний процес водовбирання текстильними матеріалами. Для розв'язку рівнянь водовбирання використаний метод Бубнова-Гальоркіна.

Результати та їх обговорення

Нами були досліджені експериментальні дані щодо зміни концентрації вологи в окремих шарах текстильних матеріалів різного складу та фізичних властивостей [1]. Для визначення характеристик кінетики водовбирання в декількох суміжних шарах різних матеріалів, що щільно прилягають один до одного, необхідно мати інформацію про зміну концентрації на границях двох суміжних матеріалів. Так, для першого (нижнього) матеріалу, що граничить з вологою і через який волога поступає в систему, граничною величиною є стовідсоткова концентрація вологи на його зовнішній поверхні (рис.1). У той же час для другого матеріалу вхідною концентрацією вологи є та, що встигла пройти крізь перший шар матеріалу на його протилежну поверхню. Ця концентрація є змінною у часі величиною і, як правило, не може бути визначеною експериментально. Визначення вхідних умов для другого і кожного наступного матеріалу в багатошаровій структурі потребує побудови математичної моделі нестационарного водовбирання перпендикулярно площині кожного шару.

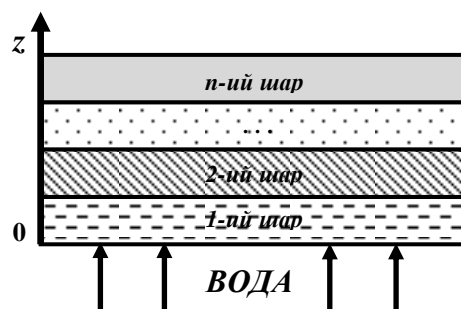


Рис.1. Схема водовбирання двошаровим матеріалом

n – кількість шарів текстильних матеріалів;

z – координата, що проходить перпендикулярно площині матеріалу (напрямок переносу волого);

t – час.

Для вирішення поставленої мети ми прийняли такий загальний план розв'язання задачі:

1. Побудова диференційного рівняння вбирання волого матеріалом, яке містить невідомі характеристики (константи) матеріалу, що залежать від вмісту волого та часу сорбції.
2. Розробка методів розв'язання диференційного рівняння вбирання та розподілу волого по товщині матеріалу.
3. Вибір та визначення зв'язку невідомих характеристик матеріалу, що входять в диференційне рівняння, з даними експериментальних досліджень.
4. Визначення концентрації рідини на границі між першим та другим шаром як функції часу, з урахуванням визначених характеристик матеріалу.
5. Побудова рівняння вбирання волого в кожний наступний шар з урахуванням, що вхідна концентрація для кожного шару є функцією часу.
6. Розробка методів розв'язання рівняння для двох, трьох та n -шарів матеріалів з різними характеристиками.
7. Проведення чисельних експериментів по визначенню характеристик водовбирання пакетів матеріалів з різними характеристиками.

Означимо: U – концентрація волого у певній точці шару матеріалу. Тоді на деякій відстані dz від цієї точки концентрація може набути величини $U+dU$. Кількість волого, що проходить за час dt по точці z може бути знайдена, як:

$$dQ = -D \frac{\partial U}{\partial z} dt,$$

де Q – кількість волого, що проходить по точці

z – безрозмірна координата, що йде крізь матеріал;

t – час;

D – коефіцієнт дифузії.

Тоді кількість волого по всій товщині (розрахунок проводиться на одиницю поверхні матеріалу):

$$\Delta Q = U \cdot h$$

де h – товщина.

Звідси одержуємо, що зміна кількості вологи на ділянці (z_1, z_2) при зміні концентрації на ΔU дорівнює:

$$\Delta Q = \int_{z_1}^{z_2} \Delta U dz.$$

Рівняння балансу кількості рідини на ділянці (z_1, z_2) за проміжок часу (t_1, t_2) має вигляд:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(D(z_2) \frac{\partial U}{\partial z}(z_2, \tau) - D(z_1) \frac{\partial U}{\partial z}(z_1, \tau) \right) d\tau = \int_{z_1}^{z_2} (U(\xi, t_2) - U(\xi, t_1)) d\xi.$$

Проводимо інтегрування за змінними границями t_1-t_2 , z_1-z_2 , які будуть використані в диференційному рівнянні. Для інтегрування за змінними границями в підінтегральній функції формально використовуємо проміжні змінні τ та ξ , які мають той же фізичний сенс, що t та z .

Використовуючи теорему про середнє і теорему про кінцеві прирости. [2] цей інтеграл можна перетворити до виразу:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[D(z) \frac{\partial U}{\partial z}(z, t) \right]_{z=z_c, t=t_c} \cdot \Delta t \Delta z = \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_{z=z_c, t=t_c} \Delta t \Delta z,$$

де z_c, t_c – проміжні точки довільно вибраних інтервалів (t_1, t_2) та (z_1, z_2) .

Звідси знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(D(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=z_c, t=t_c} = \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{z=z_c, t=t_c}.$$

Переходячи до границь при $(z_1, z_2) \rightarrow z$ і $(t_1, t_2) \rightarrow t$, одержуємо рівняння руху рідини крізь шар матеріалу:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ D(U, z) \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \quad (1)$$

Як відомо з багатьох експериментальних досліджень [3–5], коефіцієнт дифузії рідини в пористі тіла залежить від її концентрації. Але для розуміння і спрощення процесу знаходження рішення рівняння (1) умовно, у першому наближенні, приймаємо коефіцієнт дифузії за постійну величину. Тоді диференційне рівняння приймає вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Для рішення задачі переходимо до безрозмірних координат:

– координата z змінюється від нуля до одиниці,

– концентрація змінюється як функція часу від одиниці на поверхні шару, що контактує з вологою, до деякої поточної величини на його протилежній поверхні.

Уявимо шукану концентрацію у вигляді ряду, що є добутком двох функцій:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} V_i \cdot W_i \quad (3)$$

де V_i – функція концентрації, що залежить тільки від часу;

W_i – функція концентрації, що залежить тільки від координати.

i – номер ряду Фур'є.

Враховуючи граничні умови, окремий член ряду функції W , що залежить тільки від координати, представимо у вигляді

$$W_i = C_i \left(1 - \sin \frac{\pi z (2i-1)}{2} \right) \quad (4)$$

де C_i – постійна, що з'являється при інтегруванні.

Для призначення функції, що використовується у методах розв'язання диференціальних рівнянь, треба насамперед уявити, який вигляд взагалі може мати ця функція. Враховуючи, що на зовнішній границі концентрація дорівнює одиниці, а на протилежному – нулю.

Графічне представлення шуканої функції може мати вигляд рис.2.

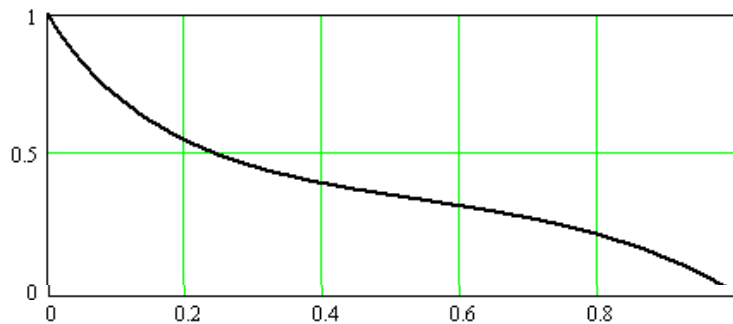


Рис 2. Графік шуканої функції

Для розв'язку диференціальних рівнянь зручно брати тригонометричні функції. Виберемо просту функцію $f(z) = \sin(\pi \cdot z)$, при цьому використання π приводить до зміни інтервалу аргументу від нуля до одиниці. Побудуємо графік цієї функції (рис.3).

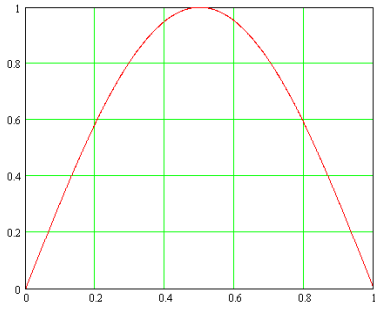


Рис.3. Графік функції

$$f(z) = \sin(\pi \cdot z)$$

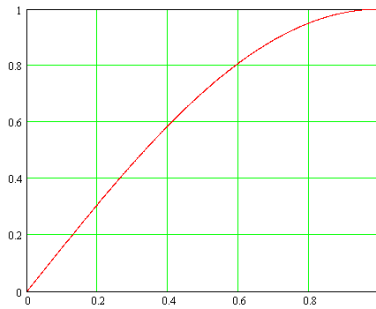


Рис.4. Графік

функції $f(z) = \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{2}\right)$

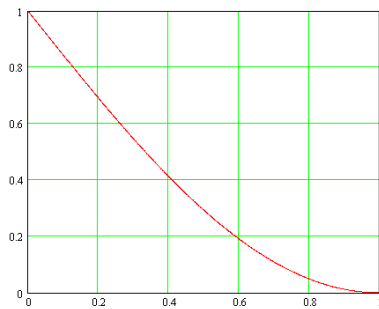


Рис.5. Графік функції

$$f(z) = 1 - \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot z}{2}\right)$$

Одержаний графік не схожий на «уявлену функцію» (графік рис. 2). Але якщо взяти половину цього графіка, одержуємо функцію $f(z) = \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{2}\right)$, графік буде мати вигляд рис.4. Виходячи з останнього графіку, можна побудувати функцію $f(z) = 1 - \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{2}\right)$, яка подібна передбачуваній.

Для одержання рішення за методами Бубнова-Галеркіна треба брати нескінченний ряд функцій, що задовольняють граничним умовам [6, 7]. Враховуючи такий підхід, знаходимо шукані функції у вигляді $f(z) = 1 - \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot z}{2}\right)$, де i – порядковий номер (рис.5).

При дослідженні залежності для синусів з парними і непарними коефіцієнтами, можна побачити різницю у вигляді функцій: для залежностей $f(z) = 1 - \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot z}{2}\right)$ з номерами 1, 3, 5 графіки мають вигляд (рис.6). Вигляд (форма) кривих (рис.6), задовольняє граничним умовам: на зовнішній границі концентрація дорівнює одиниці, а на протилежному – нулю. Для парних членів 2, 4, 6 графіки мають вигляд, що не відповідає граничним умовам (рис.7).

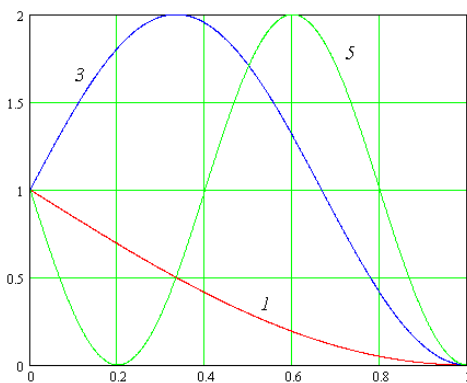


Рис.6. Графік функції $f(z) = 1 - \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot z}{2}\right)$

при $i = 1, 3, 5$ (непарні числа)

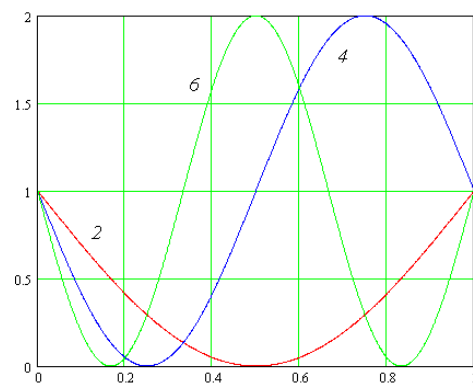


Рис.7. Графік функції $f(z) = 1 - \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot z}{2}\right)$

при $i = 2, 4, 6$ (парні числа)

Тобто, шукана функція повинна мати вигляд $f(z) = 1 - \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot z}{2}\right)$, де i – тільки непарні члени ряду. Для забезпечення прямого виклику парних чисел в математичних програмах окремий ряд нашої функції перепишемо у вигляді $f(x) = 1 - \sin\left(\frac{(2 \cdot i - 1) \cdot \pi \cdot z}{2}\right)$.

Після підстановки в рівняння (3) та вихідне диференціальне рівняння (2), знайдення похідної, скорочення подібних, одержуємо звичайне диференціальне рівняння відносно функції, що залежить від часу:

$$\frac{dV_i}{dt} = -\frac{D}{4} \cdot \pi^2 \cdot (2i - 1)V_i,$$

Розв'язком цього рівняння є функція [8]:

$$V = C_i e^{-\frac{D}{4} \pi^2 (2i-1)^2 t} \tag{5}$$

В результаті загальне рішення рівняння (3) буде мати вигляд:

$$U = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} C_i e^{-\frac{D}{4} \pi^2 (2i-1)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi z (2i-1)}{2}\right) \tag{6}$$

Невідомі константи C_i знаходимо з початкової умови: в початковий момент часу концентрація по всьому шару матеріалу, крім поверхні, дорівнює нулю. Ця умова виконується, коли безкінечна сума виражається функцією $U(z,0)=0$. Враховуючи, що при $t=0$ експонента з будь-яким множником дорівнює одиниці, одержуємо ряд Фур'є з невідомими коефіцієнтами:

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i \cdot \sin\left(\frac{\pi z (2i-1)}{2}\right) = 1. \tag{7}$$

Знайшовши коефіцієнти C_i одержуємо шуканий ряд у вигляді [8]:

$$U = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4e^{-\frac{D}{4} \pi^2 (2i-1)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi z (2i-1)}{2}\right)}{\pi (2i-1)} \tag{8}$$

Надамо коефіцієнту дифузії деякого довільного значення і побудуємо декілька графіків, що відображують процес зміни концентрації вологи в матеріалі як функцію часу (рис.8).

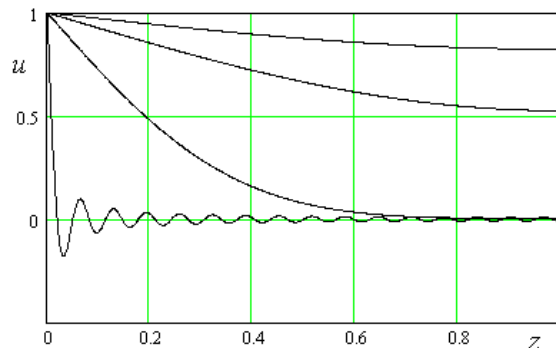


Рис.8. Динаміка зміни концентрації вологи по товщині за умови постійності коефіцієнту дифузії

(вихідні дані: $D = \text{const} \approx 1 \text{ c}^{-1}$; $t_1 < t_2 < t_3 < t_{\text{max}}$; $i = 30$)

Питома концентрація по всьому шару матеріалу:

$$\bar{U}(t) = \int_0^1 U(z,t) dz \quad (9)$$

Після виконання процесу інтегрування, одержуємо:

$$U(t) = \left(z + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8e^{-\frac{D}{4}\pi^2(2i-1)^2 t} \cdot \cos\left(\frac{\pi z(2i-1)}{2}\right)}{\pi^2 \cdot (2i-1)^2} \right) \Bigg|_0^1 \quad (10)$$

Підставивши границі, одержуємо рівняння вбирання вологи шаром матеріалу:

$$U(t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8e^{-\frac{D}{4}\pi^2(2i-1)^2 t}}{\pi^2 \cdot (2i-1)^2} \quad (11)$$

та рівняння зміни концентрації по товщині (швидкість вбирання):

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} 2De^{-\frac{D}{4}\pi^2(2i-1)^2 t}, \quad (12)$$

Розрахункова крива вбирання вологи шаром матеріалу в часі може бути представлена графічною залежністю рис.9, а крива швидкості вбирання вологи – на рис.10. (Розрахунки проводились в програмі MathCAD).

Порівняння форми розрахункових кривих (рис.9 та рис. 10) з експериментальними [3–5] показує, що математична модель з постійним коефіцієнтом дифузії не відповідає реальним даним. Але це допущення зроблене нами виключно для знаходження шляху розв'язання рівняння руху рідини з урахуванням нелінійності процесу. Знаходження та рішення рівняння руху рідини для загального випадку, коли коефіцієнт дифузії залежить від кількості накопиченої рідини, буде представленим у наступному повідомленні.

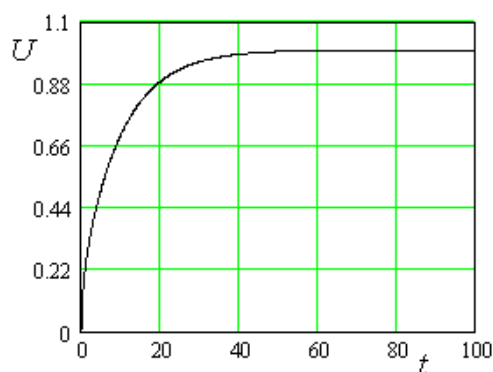


Рис.9. Крива вбирання вологи матеріалом для моделі з постійним коефіцієнтом дифузії

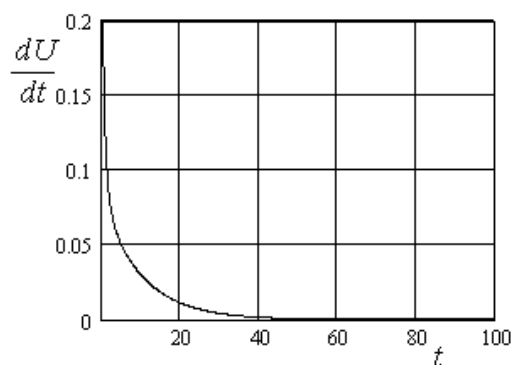


Рис.10. Крива швидкості вбирання вологи матеріалом для моделі з постійним коефіцієнтом дифузії

Висновки

Запропоновано лінеаризоване рівняння нестационарного переносу вологи перпендикулярно товщині матеріалу для моделі з постійним коефіцієнтом дифузії. При цьому був використаний оригінальний штучний прийом, який полягає в представленні концентрації рідини в матеріалі у вигляді ряду, що є добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від часу, а друга – тільки від координати. Цей прийом буде використаний для вирішення неліаризованого рівняння, яке враховує залежність коефіцієнту дифузії від накопиченої концентрації вологи в будь-який момент часу для заданої точки матеріалу.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Власенко В.І. Дослідження процесу водовбирання текстильними матеріалами технічного призначення // Вісник КНУТД. – 2009. – №5. – с.
2. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. – М.: Наука, –2004. – 798 с.
3. Иодкаускас И.А., Жиemiaлис Р.Ф., Пакшвер А.Б. Определение водопоглощаемости текстильных материалов // Текстильная промышленность. –1986. – №9. – с. 63–64.
4. Li Y., Luo Z.X. Physical Mechanisms of Moisture Diffusion into Hygroscopic Fabrics during Humidity Transients // Journal of the Textile Institute. – 2000. – Vol. 91, No 2. – p. 302–316.
5. Das B., Das A., Kothari V.K., Fanguero R, M de Araujo Studies on moisture transmission properties of PV-blended fabrics // Journal of the Textile Institute. –2009. – Vol. 100, No 7. – p. 588–597.
6. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. – М.: Мир, –1988. – 158 с.
7. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, – 1991. – 303 с.
8. Жук В.В., Натансон Г.И. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, –1983. – 188 с.

Надійшла 15.10.2009