УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
АРАКЕЛЯН Г.А.,
КУТ В.И.

НАХОЖДЕНИЕ ВЕСОВ ОБЪЕКТОВ ПО МАТРИЦЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЙ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

По матрице парных сравнений, содержащей информацию вида $w_i \gtrless w_j$ (w_i, $i=\overline{1,n}$ вес *i*-того объекта), при определенных допущениях предлагаются и обосновываются процедуры оценки значений весов объектов.

In this paper the procedures of the objects weights estimation are offered and proved at the certain assumption by the matrix of pair comparisons containing the following information: $w_i \gtrless w_j$ ($w_i, i=\overline{1,n}$ weight of i object).

Эффективность метода анализа иерархий Саати существенно зависят от точности нахождений весов объектов по матрицам парных сравнений [1–7]. В этих работах предполагалось, что матрицы парных сравнений содержат пусть искаженную, но цифровую информацию о сравнении двух альтернатив.

В статье исследуется формально некорректная задача: $\forall\, ij$ элемент матриц парных сравнений последнего уровня иерархии [6] содержит только информацию вида $w_i > w_j$ или $w_j > w_i$ $\forall i \neq j$ ($w_i, i=\overline{1,m}$ – неизвестные веса объектов, которые априори считаются неотрицательными) либо являются пустыми. В такой общей постановке, корректно оценить неизвестные значения весов невозможно.

Однако в некоторых случаях и такая постановка задачи может привести к конструктивным результатам.

Предварительно рассмотрим кратко метод анализа иерархий Саати. (МАИ).

Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу многокритериального выбора:

Есть глобальная цель и ряд альтернатив $A_1 \ldots A_m$. Необходимо выбрать ту альтернативу, которая является «наилучшей» с точки зрения глобальной цели. Если бы можно было, введя единицу измерения достижения альтернативой глобальной цели, построить функцию $f(A_i)$ $i=\overline{1,m}$, измеряющую в заданных единицах соответствие альтернативы A_i, $i=\overline{1,m}$ заданной цели, то задача имеет тривиальное решение: выбирается та альтернатива, для которой достигается максимум $\max_i f(A_i)$.

Примечание. Глобальная цель может принципиально не задаваться функцией $f(A)$ – числовой, скалярной, ограниченной, однозначной. Относительно глобальной цели может нарушаться условие транзитивности: существуют такие альтернативы A_i, A_j, A_e, для которых выполняется $A_i \succ A_j$, $A_j \succ A_e$, $A_e \succ A_i$.

Для большинства реальных задач проблема непосредственного построения функции $f(A_i)$ является неразрешимой в силу многих факторов:

1) слабо структурированные задачи;

2) сочетания количественных и качественных факторов, с помощью которых оцениваются задачи;

3) уверенность в том, что существуют факторы, задающие функцию $f(A_i)$, которые исследователю не известны либо непосредственно не могут быть измерены.

В этом случае и применяется метод анализа иерархий, который является аппроксимацией исходной задачи.

Вкратце основные этапы решения задачи многокритериального выбора с помощью метода анализа иерархий Т. Саати [1–4] следующие.

1. Очертить проблему и определить, что необходимо узнать.

2. Построить иерархию, начиная с вершины (цели – с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят следующие уровни) к самому нижнему уровню, который обычно является перечнем альтернатив.

3. Построить множество матриц парных сравнений для каждого из нижних уровней – по одной матрице для каждого элемента примыкающего сверху уровня.

4. По матрицам парных сравнений найти значения весов объектов.

5. Найти согласованность всей иерархии.

6. Найти наилучшую альтернативу.

Заложенный в МАИ принцип идентичности и декомпозиции предусматривает структурирование проблем в виде иерархии или сети. Обычно в наиболее элементарном виде иерархическая структура строится с вершины, через промежуточные уровни к самому низкому уровню. Поэтому первый шаг при решении задачи многокритериального выбора состоит в декомпозиции и представлении задачи в иерархической форме. Имеем следующую задачу принятия решений (Рис. 1), представленную в иерархической форме.

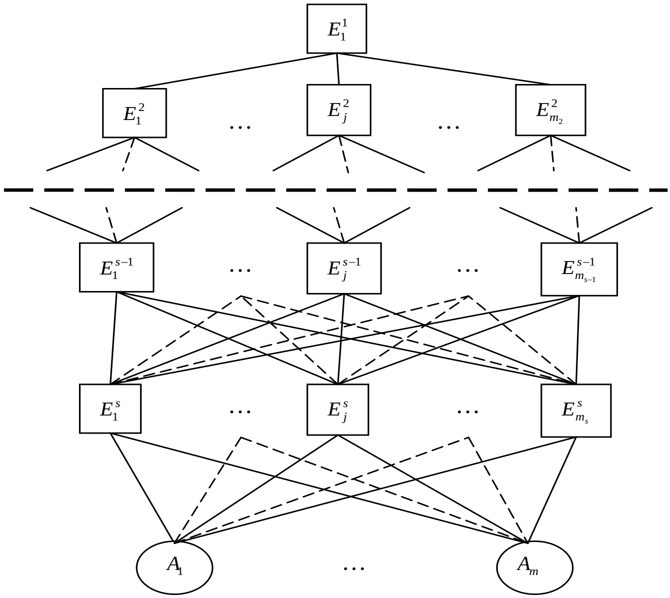

Рис. 1 Пример иерархического представления задачи принятие решений

В представленной на рисунке задаче имеем m альтернатив $A_1 ... A_m$ и s уровней критериев E_j^i, $i = \overline{1, s}$ $j = \overline{1, m_i}$.

На последующих этапах МАИ элементы иерархии сравниваются попарно по отношению к их воздействию на общую характеристику (глобальную цель либо критерий верхнего уровня). Из группы матриц парных сравнений формируется набор локальных приоритетов, которые выражают относительное влияние множества элементов на элемент примыкающего сверху уровня, т.е. в нашем случае компоненты векторов будут иметь следующий вид [6]:

$$W^A_{E_1^{s-1}} = [W^A_{E_1^s} W^A_{E_2^s} \ldots W^A_{E_{m_s}^s}] W^E_{E_1^{s-1}}$$

…

$$W^A_{E_{m_{s-1}}^{s-1}} = [W^A_{E_1^s} W^A_{E_2^s} \ldots W^A_{E_{m_s}^s}] W^E_{E_{m_{s-1}}^{s-1}}$$

…

$$W^A_{E_1^{s-j}} = [W^A_{E_1^{s-j+1}} W^A_{E_2^{s-j+1}} \ldots W^A_{E_{m_{s-j+1}}^{s-j+1}}] W^E_{E_1^{s-j}}$$

…

$$W^A_{E_{m_{s-j}}^{s-j}} = [W^A_{E_1^{s-j+1}} W^A_{E_2^{s-j+1}} \ldots W^A_{E_{m_{s-j+1}}^{s-j+1}}] W^E_{E_{m_{s-j}}^{s-1}}$$

Последняя формула

$$W^A_{E^1_1} = [W^A_{E^2_1} W^A_{E^2_2} \dots W^A_{E^2_{m_2}}] W^E_{E^1_1}, \qquad (1)$$

$W^E_{E^1_1} = \begin{pmatrix} w^{E^2_1}_{E^1_1} \\ \vdots \\ w^{E^2_{m_2}}_{E^1_1} \end{pmatrix}$, где $w^{E^2_j}_{E^1_1}$ – вес критерия E^2_j в глобальную цель E^1_1, $j = \overline{1, m_2}$.

$W^A_{E^1_1} = \begin{pmatrix} w^1_{E^1_1} \\ \vdots \\ w^m_{E^1_1} \end{pmatrix}$, где $w^j_{E^1_1}$ – результирующий вес i-ой альтернативы в глобальную цель E^1_1, $j = \overline{1, m}$.

Таким образом, j-я компонента (1) – это $W^{\,j}_{E^1_1}$.

$W^A_{E^{s-j}_l} = \begin{pmatrix} w^1_{E^{s-j}_l} \\ w^2_{E^{s-j}_l} \\ \vdots \\ w^m_{E^{s-j}_l} \end{pmatrix}$, где $w^i_{E^{s-j}_l}$ – вес (вклад) j-ой альтернативы в критерий E^{s-j}_l, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s-1}$, $l = \overline{1, m_{s-j}}$.

$W^E_{E^{s-j}_l} = \begin{pmatrix} w^{E^{s-j+1}_1}_{E^{s-j}_l} \\ w^{E^{s-j+1}_2}_{E^{s-j}_l} \\ \vdots \\ w^{E^{s-j+1}_{m_{s-j+1}}}_{E^{s-j}_l} \end{pmatrix}$, где $w^{E^{s-j+1}_p}_{E^{s-j}_l}$ - вес E^{s-j+1}_p критерия в критерий E^{s-j}_l, $j = \overline{1, s-1}$, $l = \overline{1, m_{s-j}}$, $p = \overline{1, m_{s-j+1}}$.

Принимается та альтернатива, на которой достигается максимум $\max\limits_j w^j_{E^1_1}$.

Если в дереве иерархий не все связи имеют место, то соответствующие веса принимаются равными нулю. Поэтому в данной статье рассматривается только общий случай.

Рассмотрим, каким образом дерево иерархий с весами приписанными каждой из ветвей, аппроксимирует неизвестное выражение $f(A_i)$, $i = \overline{1, m}$. Для этого рассмотрим следующие выражения:

$E_j^s(A_i)$ – значение, которое принимает критерий E_j^s – на альтернативе A_i,

$E_j^s(A_i) = w^i_{E_j^s}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_s}$. При этом для фиксированного j $w^i_{E_j^s}$ измеряются в одних и тех же единицах и нормируются: $\sum_{i=1}^{m} w^{\,i}_{E_j^s} = 1$.

$E_j^{s-1}(A_i) = \sum_{l=1}^{m_s} w_{E_j^{s-1}}^{E_l^s} E_l^s(A_i)$, при этом веса $w_{E_j^{s-1}}^{E_l^s}$ при фиксированных s и j измеряются в одних и тех же единицах и нормируются $\sum_{j=1}^{m_s} w_{E_j^{s-1}}^{E_l^s} = 1$.

В общем случае $E_t^{s-j}(A_i) = \sum_{l=1}^{m_{s-j+1}} w_{E_t^{s-j}}^{E_l^{s-j+1}} E_l^{s-j+1}(A_i)$, при этом веса $w_{E_t^{s-j}}^{E_l^{s-j+1}}$ при фиксированных s j и t измеряются в одних и тех же единицах и нормируются.

$\sum_{l=1}^{m_{s-j+1}} w_{E_t^{s-j}}^{E_l^{s-j+1}} = 1$.

Примечание: в иерархической системе Саати все веса считаются неотрицательными.

И наконец:

$$E_1^1(A_i) = \sum_{l=1}^{m_2} w_{E_1^1}^{E_l^2} E_l^2(A_i), \quad i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

Выражение (2) и есть аппроксимация неизвестного значения $f(A)$, $i = \overline{1,m}$.

$E_1^1(A_i)$, $i = \overline{1,m}$ можно также представить следующим образом:

$$E_1^1(A_i) = \sum_{t=1}^{m_s} \alpha_t w^{\,i}_{E_t^s}, \quad i = \overline{1,m},$$

где коэффициенты $\alpha_t \geq 0$ очевидным образом определяются из выражения (2).

Посылка 1. Веса объектов (альтернатив) объективно существуют ($f(A)$ существует).

В этом случае не может нарушаться условие транзитивности и анализ неравенств каждой матрицы парных сравнений последнего уровня иерархии (рис. 1) приводит к построению полного порядка $w_{i_1} > w_{i_2} \dots > w_{i_m}$.

Рассмотрим последний и предпоследний ряды дерева иерархий МАИ (рис 1).

Пусть $W_1 \dots W_{m_s}$ матрицы парных сравнений альтернатив $A_1 \dots A_m$, относительно критериев E_j^s, $j = \overline{1, m_s}$ соответственно.

Матрицы $W_1 \dots W_{m_s}$ удовлетворяют посылке 1.

Веса альтернатив $A_1 \dots A_m$ в каждой матрице парных сравнений задают строгий порядок:

$$w_{E_j^s}^{j_1} > \dots > w_{E_j^s}^{j_m}, \quad j = \overline{1, m_s}, \ (3)$$

j_l – номер альтернативы, у которой вес в W_j является l-тым по величине.

Обозначим через I множество номеров альтернатив, удовлетворяющих следующим условиям:

Условие 1.

Пусть $|I|$=к, к – мощность множества I. Тогда из альтернатив множества I можно построить последовательности альтернатив $A_{j_1} \ A_{j_2} \dots A_{j_k}$ для всех $j = \overline{1, m_s}$, т.е. начальные подпоследовательности длины к последовательностей (3).

Условие 2.

Число к является минимально возможным натуральным числом, для которого выполняется условие 1.

Утверждение. Номер оптимальной альтернативы принадлежит множеству I.

Доказательство следует из анализа выражения (2), т.к. $\alpha_t \geq 0 \quad \forall t,$ а для $\forall j \in I$ и любого $l \notin I$ выполняется $w_{E_t^s}^j \geq w_{E_t^s}^l$, $t = \overline{1, m_s}$.

Следствие 1. Если к=1, то множество I задает оптимальную альтернативу.

Следствие 2. Вместо альтернатив $A_1 \dots A_m$ достаточно рассматривать только альтернативы с индексами из множества I.

Обоснуем выбор значений весов в случае, когда матрицы парных сравнений задают лишь полный порядок. Обоснование построим по принципу аналогии. Вспомним классическое определение вероятности: если ни одному элементарному событию нельзя заранее отдать предпочтение до испытания, все элементарные события считаются равновероятными и равными $\frac{1}{s}$, s – общее число элементарных событий.

Матрица парных сравнений не содержит цифровой информации, т.е эксперт (эксперты) не имеет основания считать, что величины

$$\left| w_{E_j^s}^{j_e} - w_{E_j^s}^{j_{e+1}} \right| \text{ и } \left| w_{E_j^s}^{j_t} - w_{E_j^s}^{j_{t+1}} \right|, \qquad (4)$$

$e,t = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, m_s}$, являются различными.

Таким образом, с учетом нормировки получим:

$$w_{E_j^s}^{j_m} = \left| w_{E_j^s}^{j_e} - w_{E_j^s}^{j_{e+1}} \right| = \frac{2}{m(m+1)}; e = \overline{1, m-1} \quad w_{E_j^s}^{j_1} = \frac{2m}{m(m+1)};$$

$$w_{E_j^s}^{j_e} = \frac{2(m-e+1)}{m(m+1)}, \quad e = \overline{2, m}.$$

Посылка 1 должна соответствовать всем матрицам парных сравнений последнего уровня иерархии (рис. 1).

Посылка 2. В матрицах парных сравнений последнего уровня иерархии (рис. 1) дерева иерархий нарушаются условия транзитивности и формально элементы матриц парных сравнений содержат условия вида $A_i \succ A_j$ или $A_j \succ A_i$, втесто неравенств $w_i > w_j$ или $w_j > w_i$.

Это обозначает (в случае достоверности информации, содержащейся в матрицах парных сравнений), что глобальная цель не выражается числовой скалярной ограниченной однозначной функцией от альтернатив. Тогда можно предложить следующую модификацию метода анализа иерархий, которую следует считать «грубой» формализацией процесса принятия решений для всех уровней иерархий. По матрицам парных сравнений последнего уровня иерархии (рис. 1)оценки весов находятся с помощью аналога алгоритма Копленда [8].

Выражения записываем для абстрактной матрицы парных сравнений (т.е. веса не привязаны к критериям предпоследнего уровня иерархии (рис.1)).

Для $j = \overline{1, m}$ рассматриваем j-ю строку матрицы парных сравнений: $w_j = 1 + k_j$, где κ_j – количество неравенств в j строке вида $w_j > w_p$ $p = \overline{1, m}$, $p \neq j$.

Примечание. Исходя из общих положений МАИ найденные значения весов должны быть пронормированы $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1\cdot$

Список используемой литературы

1. *Saaty T.L.* Multycriteric Decision Making. The Analytic Hierarchy Process, McGraw Hill International. – New York, 1980. Translated to Russian, Portuguese, and Chinese. Revised edition, Paperback. – Pittsburgh, PA: RWS Publications, 1990,1996.
2. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с

англ. Р.Г. Вачнадзе: Под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1991. – 223 с.
3. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: Tomas Saaty. The Analytic Hierarchy Process. –Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе. – М.: Радио и связь, 1993. – 315 с.
4. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. – Киев: Наукова думка. – 2002. – 381 с.
5. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятие решений. – М.:Логос, 2000.
6. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. – Москва: Финансы и статистика. – 2001.
7. *А.А. Павлов, Е.И. Лищук, В.Н. Кут.* Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов в методе парных сравнений. // Системні дослідження та інформаційні технології 2007р. №2.
8. *Э. Мулен.* Кооперативное принятие решений аксиомы и модели М.: Мир.– 1991.– 451 с.