

**МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЗАЛИШКОВО-ВІЛЬНИХ БУЛЬБАШОК
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ З ВЕЛИКИМИ
ЧИСЛАМИ ПЕКЛЕ**

В. Кухарський¹, Я. Савула¹, І. Кривень²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: vetaley@franko.lviv.ua

²Амстердамський університет,
Сайнс парк 904, 1098 ХН Амстердам, e-mail: I.Kryven@uva.nl

Для розв'язування задач адвекції-дифузії з домінуючою адвекцією запропоновано числову схему, в якій поєднано дискретизацію залишково-вільними бульбашками та дискретизацію на ієрархічному базисі. У підсумку отримано метод, який має високу стійкість до осциляцій, при великих числах Пекле, високу швидкодію, простоту у розпаралеленні обчислень. Проведено числовий аналіз збіжності та швидкодії цього методу застосованого до двовимірної симетричної задачі з числом Пекле 10^{10} .

Ключові слова: адвекція-дифузія, стабілізаційний метод, дискретизація Гальоркіна, МСЕ, залишково-вільні бульбашки, ієрархічний базис, число Пекле.

1. ВСТУП

Ми розглядаємо проблему побудови числового розв'язку задачі адвекції-дифузії у випадку домінування адвективного перенесення субстанції над дифузією. Стандартний метод скінченних елементів (МСЕ) добре зарекомендував себе для широкого спектра задач, проте для знаходження розв'язку задач цього класу він потребує деяких модифікацій. Методи, спеціально зорієнтовані до розв'язування таких задач, назвали стабілізаційними методами. Зокрема, до них належить МСЕ з ієрархічним базисом [1], який також відомий як метод *hp*. У цьому методі простір пошуку розв'язку розширюється кусково поліноміальними функціями до степеня p .

Інший підхід запропоновано у дворівневому методі з залишково-вільними бульбашками, вперше запропонований у [2]. Тут простір, у якому шукається розв'язок, розширюється так званими функціями бульбашками, що апроксимують розв'язок деякої допоміжної задачі. Цей метод також відомий під назвою Residual-free bubble method (RFB). Оскільки допоміжну задачу треба будувати для кожного елемента, то для зручності називатимемо її локальною. На противагу – основну задачу називатимемо глобальною.

Степінь апроксимації розв'язку локальної задачі має значний вплив на точність розв'язку глобальної задачі. Справді, прийнявши функції-бульбашки u^b такими, що тотожно дорівнюють нулю, метод, який розглядають, вироджується до звичайного МСЕ з лінійними чи білінійними апроксимаціями. З іншого боку, знаходження точного вигляду u^b приводить до майже оптимального наближення розв'язку в просторі H^1 [3].

Аналіз використання аналітичного розв'язку локальної задачі для побудови збагачення базису двовимірної задачі подано у [3]. В інших публікаціях [4] зроблено спробу використати одновимірний аналітичний розв'язок побудови апроксимації u^b

для двовимірної задачі. Такі підходи зазвичай не є гнучкими, оскільки зумовлюють труднощі пов'язані зі знаходженням аналітичного розв'язку локальної задачі.

Противагу переліченим способам становить концепція “внутрішньої сітки” (або sub-mesh), коли для розв'язання локальної задачі вводять розбиття елемента, на якому визначено систему піделементів. І вже на ній проводять обчислення наближеного розв'язку допоміжної задачі за звичайною схемою МСЕ [5, 6, 7]. Незважаючи на значні обчислювальні затрати, підхід набув поширення. Зокрема для задач з осцилюючими коефіцієнтами [8, 9, 10, 11]. Така концепція знайшла успішне застосування для задач адвекції-дифузії [12]. У випадках домінуючої адвекції запропоновано два основні підходи: використання спеціальних стратегій згущення сітки [13, 14], враховуючи напрям градієнта та заміну оператора локальної задачі на його асимптотичне значення [15].

Найбільша перевага класу методів з внутрішньою сіткою – придатність до розпаралелення обчислень. Час, затрачений на знаходження розв'язку задачі, обернено пропорційний до кількості центральних процесорів (якщо ця величина не перевищує кількості елементів) [9].

Проте методам з внутрішньою сіткою притаманні і певні недоліки, які мотивують пошук нових підходів для розв'язування локальної задачі в контексті задачі адвекції-дифузії з домінуючою адвекцією. Дослідження цього питання є метою нашої праці.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ

Нехай Ω обмежена в R^2 область з ліпшицевою границею $\partial\Omega$. Під задачею адвекції-дифузії розумітимемо задачу, яка полягає у знаходженні такого $u \in H_0^1(\Omega)$, що задовольняє співвідношення

$$Lu = k\Delta u + \bar{w} \cdot \nabla u = f \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1)$$

У контексті моделювання адвективно-дифузійного масоперенесення коефіцієнти рівняння мають такий фізичний зміст: k – коефіцієнт дифузії, вважатимемо його додатним; \bar{w} – поле швидкостей конвективного перенесення, вважатимемо його кусково сталим; функція f – інтенсивність внутрішніх джерел змін концентрації, припустимо її належність до $L^2(\Omega)$.

Визначимо білінійну форму $a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow R^2$, яку задамо так:

$$a(u, v) = (k\nabla u, \nabla v) + (\bar{w} \cdot \nabla u, v). \quad (2)$$

Тоді варіаційне формулювання для задачі (1) набуде вигляду: знайти таке $u \in H_0^1(\Omega)$, що задовольняє співвідношення $a(u, v) = (f, v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Вважатимемо, що $\nabla \cdot \bar{w} \leq 0$, це забезпечить коректність задачі (1.1) для довільного $k > 0$, а також приведе білінійну форму (2) до коерцитивного в $H_0^1(\Omega)$ вигляду, тобто $a(v, v) \geq k\|v\|_H^2$ [15].

3. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ МЕТОДОМ ГАЛЬБОРКІНА

Позначимо $\xi^h = \{K_i\}_{i=1}^n$ такий поділ множини $\bar{\Omega}$ на n елементів, що: $\sum_{i=1}^n K_i = \bar{\Omega}$; перетин довільної пари елементів із ξ^h є або ребром, або вузлом, або порожньою множиною; $h = \max_{i=1..n} \text{diam}(K_i)$.

Нехай $V^h \subset H_0^1(\Omega)$ скінченно вимірний простір кусково поліноміальних (а на кожному елементі з ξ^h поліноміальних) функцій. Сформулюємо дискретний метод Гальоркіна для задачі (2) так: знайти $u^h \in V^h$ таке, що

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h), \quad \forall v^h \in V^h. \quad (3)$$

Відомим [16,17] є факт, що при використанні як V^h простору кусково лінійних чи білінійних функцій, цей метод дає погане наближення, коли $k \ll |\bar{w}|h$, проте такі випадки часто виникають у прикладних задачах моделювання фізичних процесів [18]. У таких випадках говорять про виникнення фіктивних осциляцій і потребу зменшення h кроку розбиття. Для кількісної оцінки останньої нерівності зручно користуватись відношенням Пекле $Pe = \frac{|\bar{w}|h}{k}$. Проте інший спосіб поліпшення результатів – пошук нових шляхів конструювання простору V^h [16, 17].

4. ЗБАГАЧЕННЯ БАЗИСУ ЗАЛИШКОВО-ВІЛЬНИМИ БУЛЬБАШКАМИ

Нехай $S^1(K)$ – простір білінійних функцій визначених на елементі K . Введемо до розгляду простори

$$V_1^h(\Omega) = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_K \in S^1(K), \forall K \in \xi^h\}, \quad (4)$$

$$B^h(\Omega) = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_{\partial K} = 0, \forall K \in \xi^h\}. \quad (5)$$

Як переконаємось далі, умова $v|_{\partial K} = 0$ у заданні $B^h(\Omega)$ забезпечить неперервність інтерполянта. Визначимо простір $V^h(\Omega)$ як композицію просторів $V_1^h(\Omega)$ та $B^h(\Omega)$

$$V^h(\Omega) = V_1^h(\Omega) \oplus B^h(\Omega). \quad (6)$$

Згідно з означенням довільний елемент цього простору можна подати у вигляді

$$u^h \in u^1 + u^b, \text{ де } u^1 \in V_1^h(\Omega) \text{ та } u^b \in B^h(\Omega). \quad (7)$$

Використовуючи (7) та (3), отримаємо

$$a(u^h, v^1 + v^b) = (f, v^1 + v^b), \quad \forall v^1 \in V_1^h(\Omega), v^b \in B^h(\Omega), \quad (8)$$

що еквівалентно системі

$$a(u^h, v^1) = (f, v^1), \quad \forall v^1 \in V_1^h(\Omega), \quad (9)$$

$$a(u^h, v^b) = (f, v^b), \quad \forall v^b \in B^h(\Omega). \quad (10)$$

Зауважимо, що з огляду на (7) та (1) для кожного елемента $K \in \xi^h$

$$\begin{cases} Lu_K^b = f - Lu_K^1, \text{ на } K, u_K^1 \in S^1(K), u_K^b \in H_0^1(K), \\ u_K^b|_{\partial K} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Введемо відображення $F_K(x) : S^1(K) \rightarrow H_0^1$, яке ставить у відповідність елементу $u_K^1 \in S^1(K)$ розв'язок задачі (11). Легко бачити, що $F_K(x)$ лінійний оператор, який не має оберненого.

Враховуючи скінчену вимірність простору $S^1(K)$, подамо його для довільного K у вигляді: $S^1(K) = \text{span}\{\varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots, \varphi_m^1\}$, де $\varphi_i^1 \in S^1(K)$ – система білінійних базисних функцій; m – кількість вузлів елемента K . Тоді

$$u_K^1 = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i^1, \quad \forall K \in \zeta^h. \quad (12)$$

Подамо u_K^b як лінійну комбінацію деяких функцій з $B^h(K)$ з такими самими коефіцієнтами як у (12)

$$u_K^b = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i^b, \quad \forall \varphi_i^b \in B^h(K), K \in \zeta^h.$$

З (7), (10), (11), (12) та лінійності оператора F випливає

$$u_{K_j}^h = \sum_{i=1}^m c_{i,j} (\varphi_i^1 + \varphi_i^b), \quad \varphi_i^b = F_K(\varphi_i^1), \quad l = 1..m, j = 1..n. \quad (13)$$

Отже, для застосування методу залишково-вільних бульбашок треба виконати такі кроки: 1) задати розбиття ζ^h ; 2) відповідно до ζ^h обрати систему білінійних базисних функцій $\varphi_i^1 \in S^1(K)$; 3) обчислити значення $F_K(\varphi_i^1)$, $i = 1..m$, $\forall K \in \zeta^h$; 4) опираючись на варіаційне рівняння (9) та співвідношення (13), обчислити коефіцієнти $c_{i,j}$.

Зауважимо, що у випадку сталих у всій області Ω коефіцієнтів рівняння (1) виконуються рівності $F_{K_1}(\varphi_i^1) = F_{K_2}(\varphi_i^1) = \dots = F_{K_n}(\varphi_i^1)$, $i = 1..m$. Це дає змогу зменшити обчислювальні затрати.

Наведений метод не є повністю дискретним. Справді, $\dim(B^h(\Omega)) = \infty$. Тому спосіб обчислення значень $F_K(x)$ потребує додаткових міркувань. Обговорення цього факту часто є темою сучасних досліджень. Різні підходи до обчислення $F_K(x)$ зумовили появу цілої низки дискретних, часто вузькоспеціалізованих методів [8, 10, 13, 15, 5].

Найпоширеніший метод обчислення $F_K(x)$ – концепція внутрішньої сітки, коли для задачі (11) застосовують звичайний МСЕ, часто у поєднанні спеціальних стратегій згущення розбиття елемента K на піделементи. Такий підхід має багато недоліків. Справді, подальше використання $u_K^{b,l}$ у варіаційному формулюванні передбачає знаходження градієнта $\nabla u_K^{b,l}$ тоді, коли $u_K^{b,l}$ є кусково-лінійною функцією, тому її чисельне диференціювання сповільнює збіжність методу. З іншого боку, застосування такої стратегії потребує обчислення інтеграла від наближено знайдених функцій $u_K^{b,l}$ та $\nabla u_K^{b,l}$, а чисельне інтегрування виконується точно тільки для поліномів певного степеня. Це означає, що точніша апроксимація $u_K^{b,l}$ та $\nabla u_K^{b,l}$, ніж апроксимація поліномом від двох змінних степеня P є надлишковою, де P параметр, що залежить від обраного методу чисельного інтегрування (для методу квадратур Гауса

$$P = \frac{2G_n - 1}{2},$$

де G_n – кількість вузлів інтегрування). Зрештою, у випадку сильно несиметричного оператора задачі у розв’язку МСЕ для локальної задачі з’являються неприродні осциляції, що відображається на сповільненні збіжності методу для глобальної задачі.

5. БЕЗСІТКОВІ МЕТОДИ ДЛЯ ПОБУДОВИ ЗАЛИШКОВО-ВІЛЬНИХ БУЛЬБАШОК

Вважатимемо елемент K чотирикутним. Відобразимо його на стандартний елемент $\{(\xi, \eta) : -1 \leq \xi, \eta \leq 1\}$ невідродженим перетворенням з якобіаном J .

Позначимо

$$a^J(u, v) = (k \nabla u, \nabla v) + (\mathcal{J}\bar{w} \cdot \nabla u, v). \quad (14)$$

Розглянемо такий безсітковий метод зі слабким варіаційним формулюванням для задачі (11). Перетворимо варіаційне формулювання (9) для задачі (11) з врахуванням (14)

$$a^J(u_K^b, v_K^b) = (f, v_K^b) - (\mathcal{J}\bar{w} \nabla u_K^1, v_K^b), \quad \forall v_K^b \in B_0^p(K) \subset B^h(K). \quad (15)$$

Для простоти запису надалі упустимо індекси b та K . Тут і далі будемо розуміти, що ці функції розглядають на області K . Введемо таку систему базисних функцій:

$$M_{i,j}^p = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)L_i(\eta)L_j(\xi), \quad i + j = p - 1, p = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

де $L_p(\tau)$ – поліном Лежандра степеня p .

Будемо шукати наближений розв’язок для варіаційного рівняння (15) у вигляді

$$u^p = \sum_{s=1}^p \sum_{i+j=p-1} c_{i,j}^s M_{i,j}^s. \quad (17)$$

Такий запис коректний, оскільки система (16) є функціонально повною в B^h . Отже, зафіксувавши характеристику ступенів свободи p , дискретне формулювання для апроксимації розв’язку (15) набуде вигляду

$$\sum_{s=1}^p \sum_{i+j=p-1} c_{i,j}^s a^J(M_{i,j}^s, M_{i_1,j_1}^r) = (f, M_{i_1,j_1}^r) - (\mathcal{J}\bar{w} \cdot \nabla u^1, M_{i_1,j_1}^r), \quad (18)$$

$$i_1 + j_1 = r - 1, r = 1..p.$$

Це співвідношення є СЛАР із $\frac{p+p^2}{2}$ кількістю рівнянь та такою самою кількістю невідомих коефіцієнтів і повністю заповненою матрицею.

Використання такої стратегії для збагачення базису залишково-вільних бульбашок принесе звичні переваги безсіткових методів, а саме:

- 1) розв’язок u^p має певний запас гладкості, а саме $u^p \in C^p$, на противагу C^1 у методах [6,7]. Це дає змогу адекватно обчислити градієнт;
- 2) спільною перевагою безсіткових методів є їхня, порівняно зі стандартним МСЕ, ліпша збіжність при застосуванні до несиметричних білінійних форм [19];

- 3) до u^p просто застосовувати точне чисельне інтегрування з оптимальною кількістю вузлів;
- 4) якщо степінь апроксимацій сталий для всіх локальних задач, то цей підхід дає змогу сформувати локальну, однакову (з точністю до лінійних множників) для кожного елемента систему, що значно заощаджує час обчислення.

З іншого боку, внаслідок великого запасу гладкості u^p безсіткові методи не демонструють добрих результатів, коли точний розв'язок містить локальні мікроколивання [19] (наприклад, у задачах дифузії у неоднорідних матеріалах [8, 9, 11]). Проте це застереження не є актуальним для задачі адвекції-дифузії (1) з огляду на обмеження щодо коефіцієнтів ключових співвідношень записаних у другому розділі.

6. ПОРІВНЯННЯ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ, ОТРИМАНИХ МЕТОДОМ ЗАЛИШКОВО-ВІЛЬНИХ БУЛЬБАШОК ТА МСЕ З ІЄРАРХІЧНИМ БАЗИСОМ

Розглянемо деякі результати дослідження задачі (1). Для порівняння будемо використовувати дворівневий МСЕ збагачений залишково-вільними бульбашками, метод МСЕ з ієрархічним базисом та аналітичний розв'язок.

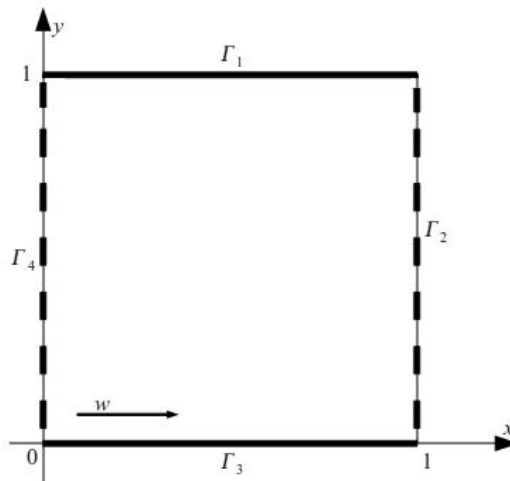


Рис. 1. Двовимірна область дослідження

Визначимо таку область $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ (рис. 1), задамо умови ізоляції на Γ_1 , Γ_2 та концентрацію $u|_{\Gamma_4} = 0$, $u|_{\Gamma_2} = 1$. Також вважатимемо $\bar{w}_y = 0$.

Введемо рівномірне розбиття області на 100 прямокутних елементів. Обчислення проводили у системі GNU Octave, на ПЕОМ оснащені одним процесором архітектури x86-64, 3000МГц. Поведінка похибки у вузлових значеннях розв'язків, для різних значень p зображена на рис. 2, приклади самих розв'язків показано на рис. 3, а характер швидкодії на рис. 4.

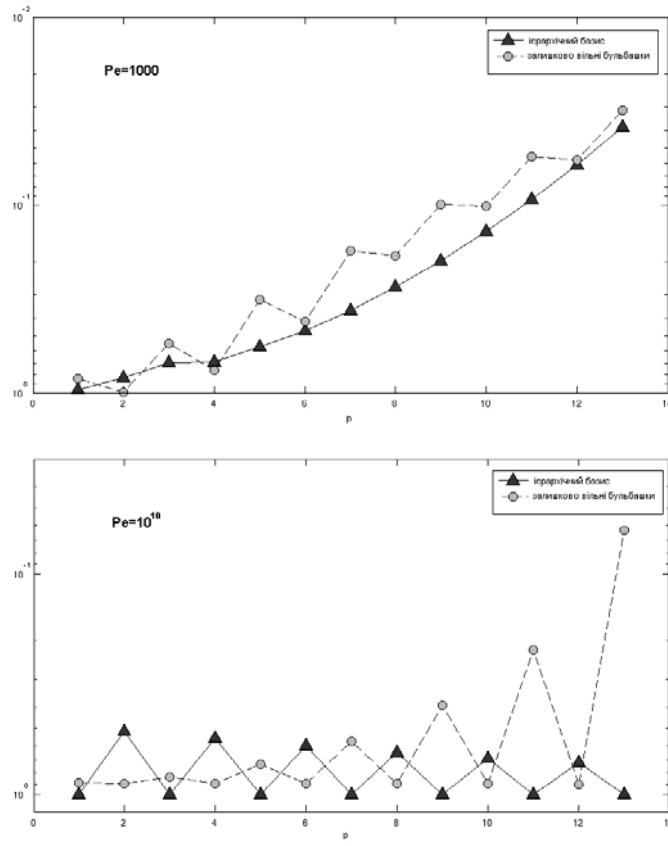


Рис. 2. Порівняння збіжності методів залишково-вільних бульбашок і МСЕ з ієрархічним базисом за нормою L_∞ для $Pe = 1000$ та $Pe = 10^{10}$, 100 прямокутних елементів

7. ВИСНОВКИ

Введено нову дискретну схему для методу залишково-вільних бульбашок. Яка допомагає знаходити розв'язок крайової задачі адвекції-дифузії у просторі кусково-поліноміальних функцій. У порівнянні до МСЕ з ієрархічним базисом, який апроксимує розв'язок функцією з цього ж простору, розроблена чисельна схема демонструє кращу збіжність, менший вплив похибки заокруглення, та ліпшу швидкодію.

У випадках із всюди сталими, у досліджуваній області, коефіцієнтами рівняння, запропонована числова схема спрощується, що суттєво відображається на швидкодії. Якщо ж коефіцієнти не є сталими, то такої самої швидкодії можна досягнути шляхом розпаралелення обчислень, які впроваджуються для розглядуваної схеми досить просто.

Проведено результати обчислень, які засвідчують, що описана числова схема приводить до адекватного результату для задач з сітковими числами Пекле, які сягають 10^{10} за досить короткий час. Більші числа Пекле потребують додаткових числових експериментів.

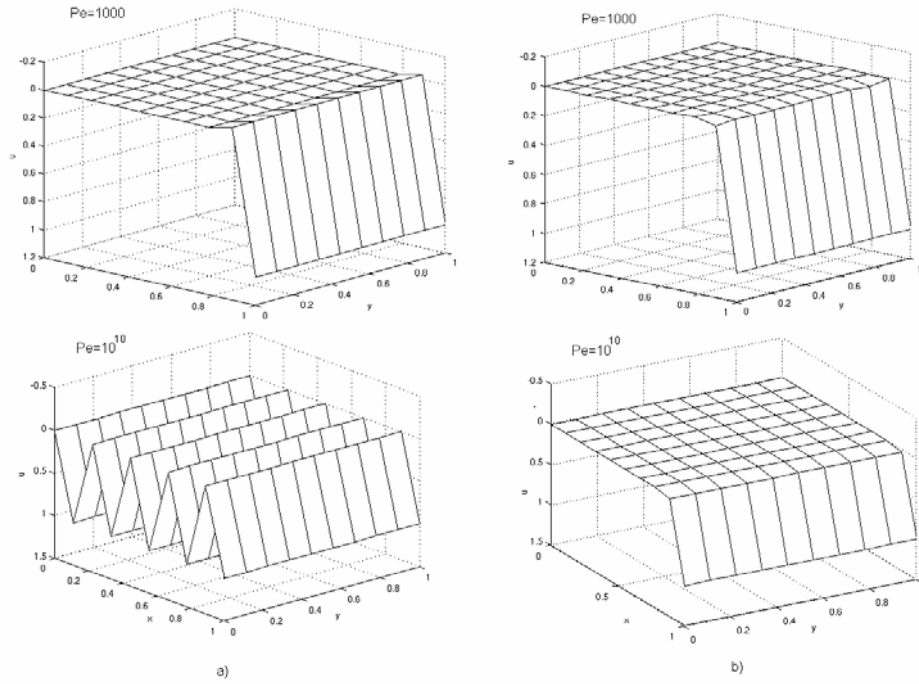


Рис. 3. Приклади розв’язків: а) МСЕ з ієрархічним базисом; б) метод залишково-вільних бульбашок; $Pe = 1000$ та $Pe = 10^{10}$, 100 прямокутних елементів

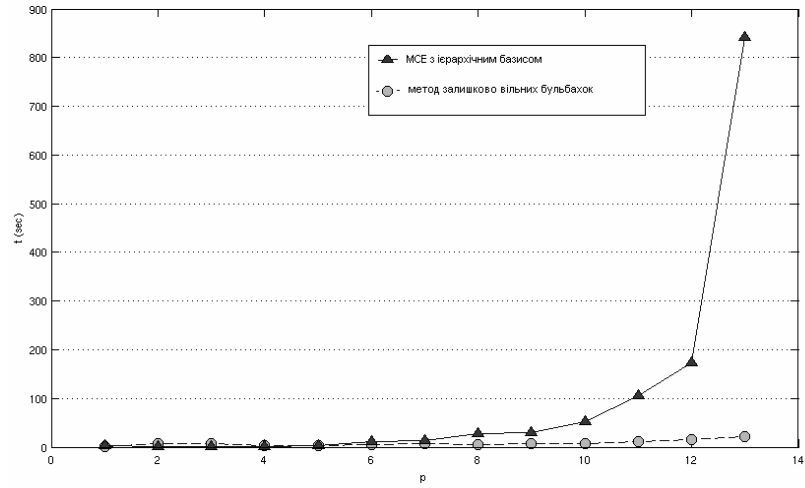


Рис. 4. Порівняння швидкодії методу МСЕ з ієрархічним базисом і методу залишково-вільних бульбашок; $Pe = 10^{10}$, 100 прямокутних елементів

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Dey S. A straightforward structure to construct shape functions for variable p -order meshes / M.S. Shephard, J.E. Flaherty // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. –1997. – No 147. – P. 209–233.
2. Brezzi F. Choosing bubbles for advection-diffusion problems / A. Russo // *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* –1994. – No 4. – P. 571–587.
3. Barbone P.E. Nearly h_1 -optimal finite element methods / I. Harari // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2001. – No 190. – P. 5679–5690.
4. Houzeaux G. A variational multiscale model for advection-diffusion-reaction equation / B. Eguzkiza, M. Vazquez // *Commun. Numer. Meth. Engrg.* – 2009. – No 25. – P. 787–809
5. Franca L.P. Multiscale and residual-free bubble functions for reaction-advection-diffusion problems / J.V.A. Ramalho, F. Valentin // *Int. J. Mult. Comp. Eng.* – 2005. – No 3/3. – P. 297–312.
6. Sangalli G.A. discontinuous residual-free bubble method for advection-diffusion problems // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2008. – No 197. – P. 3751–3759.
7. Dolbow J.E. Residual-free bubbles for embedded Dirichlet problems / L.P. Franca // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2008. – No 197. – P. 3751–3759.
8. Sangalli G. Capturing small scales in elliptic problems using a residual-free bubbles finite element method / G. Sangalli // *SIAM, Multiscale Model. Simul.* – 2003. – No 1/3. – P. 485–503.
9. Hou T.Y. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media / X.H. Wu // *Journal Of Comp. Physics.* – 1997. – No 134. – P. 169–189.
10. Carius A.C. Hierarchical modeling of the heat equation in a heterogeneous plate / A.L. Madureira // *Applied Numerical Mathematics.* – 2009. – No 59. – P. 2105–2118.
11. Barrenechea G.R. A petrov_galerkin enriched method: A mass conservative finite element method for the Darcy equation / L.P. Franca, F. Valentin // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2007. – No 196. – P. 2449–2464.
12. Ayuso B. Discontinuous galerkin methods for advection-diffusion-reaction problems / I.D. Marini // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2007. – No 47/2. – P. 1391–1420.
13. Brezzi F. On the choice of a stabilizing subgrid for convection-diffusion problems / L.D. Marini, A. Russo // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2005. – No 194. – P. 127–148.
14. Franca L.P. Refining the submesh strategy in the two level finite element method: Application to the advection-diffusion equation / F.N. Hawang // *International Journal of Numerical Methods in Fluids.* – 2007. – No 39/2. – P. 161–187.
15. Asensio M.I. The residual-free bubble numerical method with quadratic elements / A. Russo, G. Sangalli // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.* – 2004. – No 14/5. – P. 641–661.
16. Кухарський В.М. Використання проекційно-сіткових методів до розв'язання задач адвекції-дифузії у тонких криволінійних каналах / Я.Г. Савула // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 1998. – Вип. 50. – С. 148–152.
17. Кухарський В.М. Стабілізація розв'язків задач адвекції-дифузії з великими числами Пекле, отриманих засобами методу скінченних елементів / Я.Г. Савула, Н.П. Головач // *Моделювання та інформаційні технології.* – 2002. – Вип. 15. – С. 3–14.

18. Чанля С.Я. Кінетика переносу домішок при зміні стану частинок / О.Ю. Чернуха // Академія НАН України. Центр математичного моделювання ІППМ ім. Я.С. Підстригача, препринт 5. – 1993.
19. Idelsohn S.R. The meshless finite element method / E. Onate, N. Calvo // International journal for numerical methods in engineering. – Pin F. D. – 2003. – No 58/6. – P. 893–912.

Стаття: надійшла до редколегії 12.12.2012
доопрацьована 16.01.2013
прийнята до друку 24.01.2013

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ОСТАТОЧНО-СВОБОДНЫХ ПУЗЫРЬКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АДВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С БОЛЬШИМИ ЧИСЛАМИ ПЕКЛЕ

В. Кухарский¹, Я. Савула¹, И. Кривень²

¹Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: vetaley@franko.lviv.ua

²Амстердамский университет,
Сайнс парк 904, 1098 XH Амстердам, e-mail: I.Kryven@uva.nl

Для решения задач адвекции-диффузии с доминантной адвекцией предлагается числовая схема, в которой сочетается дискретизация RFB и дискретизация на иерархическом базисе. В результате получен метод, обладающий высокой устойчивостью к осцилляции, при больших числах Пекле, высоким быстродействием и простотой в процессе распараллеливания вычислений. Проведен численный анализ сходимости и быстродействия этого метода примененного к двумерной симметричной задаче с числом Пекле 10^{10} .

Ключевые слова: адвекция-диффузия, стабилизационный метод, дискретизация Галеркина, МСЭ, RFB, иерархический базис, число Пекле.

MODIFIED METHOD OF RESIDUAL-FREE BUBBLES FOR SOLVING THE ADVECTION-DIFFUSION PROBLEM WITH HIGHT PECLET NUMBER

V. Kukharsky¹, Ya. Savula¹, I. Kryven²

¹Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: vetaley@franko.lviv.ua

²University of Amsterdam,
Science Park 904, 1098 XH Amsterdam, e-mail: I.Kryven@uva.nl

The numerical scheme based on a residual free bubbles approach and a hierarchy basis discretization for advection-diffusion problems with dominated advection is introduced. Among properties of the developed method are: better stability to oscillations for hight Peclet numbers, better time performance, and simplicity in parallel computing application. The computational analysis of convergence and time performance on an example of 2D symmetric advection-diffusion problem for 10^{10} Peclet number is performed.

Key words: advection-diffusion, stabilized method, Galerkin discretization, FEM, residual-free bubbles, hierarchical basis, Peclet number.