ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2013. Вип. 20. С. 49–56
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 20. P. 49–56

УДК 519.6

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВНУТРІШНІХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННИХ СИСТЕМ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Ю. Музичук

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

Розглянуто чисельне розв'язування крайових задач для нескінченних систем еліптичних рівнянь спеціального вигляду у тривимірних областях з ліпшицевою границею. Крайові задачі через відповідний аналог формули Гріна редуковано до систем граничних інтегральних рівнянь. Для чисельного розв'язування застосовано метод граничних елементів на підставі методу Гальоркіна. Подано результати чисельних експериментів.

Ключові слова: крайові задачі, системи еліптичних рівнянь, граничні інтегральні рівняння, метод граничних елементів, метод Гальоркіна.

1. ВСТУП

Один із можливих підходів чисельного розв'язування нестаціонарних задач полягає у їхній частковій дискретизації за часовою змінною та зведенні до стаціонарних еліптичних задач. Якщо для цього використовують перетворення Лагерра або метод Роте, то нестаціонарні задачі редукуються до крайових задач для нескінченних трикутних систем еліптичних рівнянь спеціального вигляду [1-3]. Зважаючи на структуру системи, відповідні крайові задачі можна звести до систем граничних інтегральних рівнянь. У підсумку розмірність вихідної задачі понижується на дві одиниці, що особливо ефективно при розгляді тривимірних задач.

В [8] детально досліджено еквівалентність внутрішніх тривимірних крайових задач для нескінченних систем еліптичних рівнянь відповідним системам граничних інтегральних рівнянь та з'ясовано їхню коректність у випадку ліпшицевих поверхонь. Побудоване там інтегральне зображення узагальненого розв'язку задач для різних типів крайових умов дало змогу отримати системи граничних інтегральних рівнянь зі спеціальною структурою. Цікавою є побудова наближеного розв'язку таких систем інтегральних рівнянь. Ми використали метод граничних елементів на підставі методу Гальоркіна. Метод граничних елементів дає змогу розглядати поверхні будь-якої конфігурації, а метод Гальоркіна – отримати апріорну оцінку похибки наближеного розв'язку. Як приклад розглянуто задачу з крайовою умовою типу Діріхле, розробену схему можна перенести на інші типи крайових умов. Наведені результати чисельних експериментів підтверджують ефективність побудованого алгоритму.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглядатимемо нескінченну систему еліптичних рівнянь стосовно невідомих функцій $u_0,\dots u_k,\dots$ у деякій обмеженій області $\Omega \subset R^3$ з ліпшицевою межею Γ

$$\begin{cases} Pu_0 = f_0 \\ c_{1,0}u_0 + Pu_1 = f_1 \\ \ldots \\ c_{k,0}u_0 + \ldots + c_{k,k-1}u_{k-1} + Pu_k = f_k\,, \\ \ldots \end{cases} \tag{1}$$

де еліптичний оператор другого роду $P \equiv -\Delta + \kappa^2, \kappa > 0$; $c_{i,j}$ – відомі сталі коефіцієнти; f_i – задані в Ω функції, $i, j \in N_0 \equiv N \cup \{0\}$.

Для системи (1) будемо досліджувати крайову задачу Діріхле, яка полягатиме у знаходженні розв'язків цієї системи, що задовольнятимуть такі крайові умови:

$$u_k\big|_\Gamma = g_k, k \in N_0\,, \tag{2}$$

де $g_k, k \in N_0$, – задані функції на Γ.

Нехай $L_2(\Omega)$ – простір Лебега, $H^1(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$ – простори Соболєва скалярних дійснозначних функцій та спряжені до них, відповідно, $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ і $H^{-1}(\Omega)$ (див., наприклад, [5]). Якщо X – довільний лінійний простір над полем дійсних чисел, то $(X)^\infty$ будемо трактувати як простір нескінченних послідовностей $\boldsymbol{z} := (z_0, \ldots, z_k, \ldots)^T$. Далі похідні розумітимемо в сенсі простору розподілів $D'(R^3)$, а крайові умови – в сенсі слідів. Позначатимемо $\gamma_0\boldsymbol{u} := (\gamma_0 u_0, \gamma_0 u_1, \ldots) \in (H^{1/2}(\Gamma))^\infty$ слід послідовності $\boldsymbol{u}$ на межі Γ. Будемо шукати узагальнений розв'язок крайової задачі за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь, запропонований у праці [8].

Означення. Нехай $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^\infty$ і $\boldsymbol{g} \in (H^{1/2}(\Gamma))^\infty$. Узагальненим розв'язком задачі Діріхле (1),(2) називатимемо послідовність $\boldsymbol{u} \in (H(\Omega))^\infty$, для якої виконується варіаційна рівність

$$\boldsymbol{a}_\Omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{L_2(\Omega)} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{H_0^1(\Omega)} \text{ для будь-яких } \boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^\infty \tag{3}$$

та крайова умова

$$\gamma_0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \text{ на } \Gamma\,. \tag{4}$$

Тут $\boldsymbol{C}$ – задана трикутна матриця, $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{u})_k = \sum_{l=0}^{k} c_{k,l}(\boldsymbol{u})_l, k \in N_0$, а $\boldsymbol{a}_\Omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ – діагональна матриця, елементами якої є асоційована з оператором P білінійна форма

$$\big(\boldsymbol{a}_\Omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\big)_{k,k} := a_\Omega(u_k, v_k) = \int_\Omega \big(\nabla u_k(x)\nabla v_k(x) + \kappa^2 u_k(x) v_k(x)\big)dx\,. \tag{5}$$

Для заданих вхідних даних узагальнений розв'язок задачі Діріхле (1),(2) існує і є єдиним ([8], теорема 1).

3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ

Нехай $\widetilde{\boldsymbol{E}}(x) = (\widetilde{E}_0(x), \widetilde{E}_1(x), \ldots)^T, x \in R^3$, – фундаментальний розв'язок матричного оператора $\boldsymbol{G} := \boldsymbol{P} + \boldsymbol{C}$, де оператор $\boldsymbol{P}$ діє за правилом $(\boldsymbol{P}\boldsymbol{u})_k = Pu_k$, $k \in N_0$. Можна довести, що послідовність $\boldsymbol{E} := (E_0, E_1, \ldots)^T$, де $E_0 := \widetilde{E}_0$ та $E_i := \widetilde{E}_i - \widetilde{E}_{i-1}, i \in N$, є розв'язком рівняння $\boldsymbol{G}\boldsymbol{E} = \overline{\boldsymbol{\delta}}$ в $(D'(R^3))^\infty$, де $\overline{\boldsymbol{\delta}}(x) = (\delta(x), 0, 0, \ldots)^T$, $\delta(x)$ – функція Дірака. За допомогою *q*-згортки [8] та послідовності $\boldsymbol{E}$ побудуємо послідовності, які, за аналогією з теорією еліптичних рівнянь, також називатимемо потенціалами.

Означення. Нехай $\boldsymbol{f} \in (L_2(\Omega))^\infty$ – задана послідовність. Послідовність $\boldsymbol{u} := \boldsymbol{Uf}$, де

$$\boldsymbol{Uf}(x) := (\boldsymbol{Uf})(x) \equiv \boldsymbol{f}(\cdot) \underset{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)}{\circ} \boldsymbol{E}(x-\cdot), x \in \Omega, \tag{6}$$

називатимемо об'ємним потенціалом для оператора $\mathbf{G}$.

Означення. Нехай $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{1/2}(\Gamma))^\infty$ та $\boldsymbol{\mu} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$ – задані послідовності. Послідовності $\boldsymbol{u} := \boldsymbol{V\mu}$ і $\boldsymbol{u} := \boldsymbol{W\lambda}$, де

$$\boldsymbol{V\mu}(x) := (\boldsymbol{V\mu})(x) \equiv \boldsymbol{\mu}(\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma)}{\circ} \boldsymbol{E}(x-\cdot), x \in \Omega, \tag{7}$$

і

$$\boldsymbol{W\lambda}(x) := (\boldsymbol{W\lambda})(x) \equiv \partial_{\overline{\nu}(\cdot)} \boldsymbol{E}(x-\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma)}{\circ} \boldsymbol{\lambda}(\cdot), x \in \Omega, \tag{8}$$

називатимемо, відповідно, потенціалами простого та подвійного шару стосовно поверхні Γ для оператора $\mathbf{G}$.

Відомо [4], що у випадку ліпшицевої області на підпросторі $H^1(\Omega, P) := \{u \in H^1(\Omega) \mid Pu \in L_2(\Omega)\}$ можна ввести лінійний неперервний оператор нормальної похідної $\gamma_1 : H^1(\Omega, P) \to H^{-1/2}(\Gamma) := (H^{1/2}(\Gamma))'$. Стосовно послідовностей будемо розглядати оператор нормальної похідної та використовувати таке саме позначення $\gamma_1 \boldsymbol{u} := (\gamma_1 u_0, \gamma_1 u_1, \ldots) \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$.

Теорема ([8], теорема 6). Для довільної послідовності $\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega, P))^\infty$ правильне таке зображення:

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{Uf}(x) + \boldsymbol{V\mu}(x) - \mathbf{W}\boldsymbol{\lambda}(x) \text{ в області } \Omega, \tag{9}$$

де $\boldsymbol{f} := \boldsymbol{Gu}$, $\boldsymbol{\lambda} := \gamma_0 \boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{\mu} := \gamma_1 \boldsymbol{u}$.

Інтегральне зображення (9) можна використати для зведення вихідної крайової задачі до граничних інтегральних рівнянь. Зауважимо, що об'ємний потенціал $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Uf}$ належить простору $(H^1(\Omega, P))^\infty$ та задовольняє рівняння $\boldsymbol{Gu} = \boldsymbol{f}$ ([8], теорема 4). За його допомогою можна побудувати частковий розв'язок системи (1) і звести її до однорідної. Тому надалі розглядатимемо лише однорідну систему $\boldsymbol{Gu} = 0$ в Ω. У цьому випадку для довільного значення $k \in N_0$ відповідний компонент розв'язку в області Ω обчислюватимемо за формулою

$$\left(\boldsymbol{u}(x)\right)_k = \sum_{i=0}^{k} \int_\Gamma E_i(x-y)\mu_{k-i}(y)ds_y - \sum_{i=0}^{k} \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu(y)} E_i(x-y)\lambda_{k-i}(y)ds_y . \tag{10'}$$

Введемо граничні оператори $\boldsymbol{V} : (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty \to (H^{1/2}(\Gamma))^\infty$ і $\boldsymbol{K} : (H^{1/2}(\Gamma))^\infty \to (H^{1/2}(\Gamma))^\infty$, які діють за правилами

$$\boldsymbol{V\mu} := \gamma_0 \boldsymbol{V\mu}, \; \boldsymbol{K\lambda} := (\gamma_0 \boldsymbol{W} + \frac{1}{2}\boldsymbol{I})\boldsymbol{\lambda}.$$

Враховуючи задану крайовою умовою (2) послідовність $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{g} \in (H^{1/2}(\Gamma))^\infty$, на підставі інтегрального зображення (9) можна отримати таке граничне інтегральне рівняння (ГІР) стосовно невідомої послідовності $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{V\mu} = (\frac{1}{2}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{g} \text{ в } (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty} . \tag{10}$$

Теорема ([8], теорема 9). Нормальна похідна узагальненого розв’язку $\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega, P))^{\infty}$ задачі Діріхле (1), (2) задовольняє граничне рівняння (10). Навпаки, якщо послідовність $\boldsymbol{\mu} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty}$ є розв’язком граничного рівняння (10), то функція, побудована за формулою (9) при $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{g}$, є узагальненим розв’язком задачі Діріхле (1), (2).

За теоремою 12 [8] для довільної послідовності $\boldsymbol{g} \in (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty}$ існує єдиний розв’язок $\boldsymbol{\mu} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty}$ граничного інтегрального рівняння (10).

Проаналізуємо покомпонентно отримане ГІР. Для знаходження невідомої нормальної похідної $\mu_0 \in H^{-1/2}(\Gamma)$ отримаємо рівняння

$$V_0\mu_0 = \frac{1}{2}g_0 + K_0 g_0 \text{ в } H^{1/2}(\Gamma) . \tag{11}$$

Якщо його розв’язати, то у наступних рівняннях системи (10) вирази з компонентом μ_0 можна перенести у праву частину. Аналогічно на кожному кроці будемо переносити знайдені раніше компоненти. Тоді для довільного $n \in N$ відповідне n-те рівняння системи (10) набуде вигляду

$$V_0\mu_n = \frac{1}{2}g_n + \sum_{i=0}^{n} K_{n-i}g_i - \sum_{i=0}^{n-1} V_{n-i}\mu_i, \quad n \in N, \text{ в } H^{1/2}(\Gamma) . \tag{12}$$

Як бачимо, ліві частини усіх рівнянь містять той самий граничний інтегральний оператор V_0, а у праві входять розв’язки рівнянь, знайдені на попередніх кроках. Отож, знаходження узагальненого розв’язку задачі Діріхле (1),(2) звелося до послідовного розв’язування ГІР Фредгольма першого роду (12) з правою частиною, до якої на кожному кроці долучаються вирази з обчисленими раніше компонентами.

4. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для знаходження розв’язку отриманої послідовності ГІР застосуємо чисельну реалізацію методу Гальоркіна у вигляді методу граничних елементів (див., наприклад, [9]). Розглядатимемо апроксимацію граничної поверхні Г деякою поверхнею

$$\Gamma_M = \bigcup_{l=1}^{M} \tau_l ,$$

утвореною трикутними елементами τ_l, $l = \overline{0, M}$, $M \in N$, та введемо на ній простір $S_h^0(\Gamma)$, $\dim S_h^0(\Gamma) = M$, за допомогою лінійної оболонки кусково-сталих базисних функцій $\{\varphi_l\}_{l=1}^{M}$

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} 1, x \in \tau_l, \\ 0, x \notin \tau_l. \end{cases}$$

Невідомі роз’язки інтегральних рівнянь будемо апроксимувати лінійними комбінаціями таких функцій:

$$\mu_n^h = \sum_{l=1}^{M} \mu_{n,l}^h \varphi_l \in S_h^0(\Gamma), \quad n \in N, \tag{13}$$

де $\{\mu_{n,l}^h\}_{l=1}^M$ – невідомі коефіцієнти.

Базис також використаємо для наближення пробних функцій $\omega_n^h = \sum_{l=1}^{M} \omega_{n,l}^h \varphi_l$ та заданої функції $g_n^h = \sum_{l=1}^{M} g_{n,l}^h \varphi_l$. Тоді варіаційне співвідношення, яке відповідає рівнянню (11), набуде вигляду

$$\left\langle V_0 \mu_0^h, \omega_0^h \right\rangle_{H^{1/2}(\Gamma)} = \left\langle \left(\frac{1}{2} I + K_0\right) g_0^h, \omega_0^h \right\rangle_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{для всіх } \omega_0^h \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

або

$$\left(V_0^h \underline{\mu}_0^h, \underline{\omega}_0^h\right) = \left(\widetilde{K}_0^h \underline{g}_0^h, \underline{\omega}_0^h\right), \tag{14}$$

де $V_0^h[k,l] := \left\langle V\varphi_k, \varphi_l \right\rangle_{H^{1/2}(\Gamma)}$ і $\widetilde{K}_0^h[k,l] := \left\langle \left(\frac{1}{2} I + K_0\right) \varphi_k, \varphi_l \right\rangle_{H^{1/2}(\Gamma)}$ при $k,l = \overline{0,M}$ – елементи матриць, отриманих після дискретизації відповідних граничних операторів. Тут $(\bullet,\bullet)$ – скалярний добуток у просторі R^M.

Оскільки оператор V_0 є $H^{-1/2}(\Gamma)$-еліптичним, то легко бачити, що ця властивість перенесеться і на оператор V_0^h

$$\left(V_0^h \underline{\mu}_0^h, \underline{\mu}_0^h\right) = \left\langle V\mu_0^h, \mu_0^h \right\rangle_{H^{1/2}(\Gamma)} \ge c \left\|\mu_0^h\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{для всіх } \mu_0^h \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Отож, розв'язок μ_0^h системи лінійних алгебричних рівнянь (14) існує і є єдиним для довільної кількості M трикутних елементів. Згідно з теоремою 4 [4] при $M \to \infty$ цей розв'язок збігається до розв'язку μ_0 рівняння (11) за нормою простору $H^{-1/2}(\Gamma)$ і для прийнятого базису з кусково-сталих функцій за теоремою 5 [4] правильна апріорна похибка

$$\left\|\mu_0 - \mu_0^h\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c_1 h^{1/2} \left\|\widetilde{g}\right\|_{H^1(\Gamma)},$$

де $\widetilde{g} = \widetilde{K}_0^h g_0$. Зауважимо, що при чисельному розв'язуванні системи (14) за пробні функції беремо елементи базису $\{\varphi_l\}_{l=1}^M$.

Зазначимо, що елементи матриць, які виникають при дискретизації граничних інтегральних операторів, набувають інтегровну особливість в підінтегральній функції. Для обчислення таких інтегралів виділяємо її адитивно:

$$\begin{aligned} V_0^h[k,l] &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_k}\int_{\tau_l} \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{|x-y|} ds_y ds_x = \frac{1}{4\pi} \Big(\int_{\tau_k}\int_{\tau_l} \frac{e^{-\kappa|x-y|} - 1}{|x-y|} ds_y ds_x + \int_{\tau_k} I_l(x) ds_x \Big), \\ I_l(x) &= \int_{\tau_l} \frac{1}{|x-y|} ds_y. \end{aligned} \tag{15}$$

Тоді інтеграл $I(x)$ можна обчислити аналітично. Для цього в ньому зробимо заміну змінних, ввівши нову систему координат $(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{n})$ з центром у точці x_1, прив'язану до граничного елемента $\tau \subset R^3$ з координатами x_1, x_2, x_3. Зауважимо, що індекс елемента l опускатимемо задля спрощення записів. Тоді базисні вектори визначають за формулами

$$\underline{r}_2 = \frac{1}{t_\tau}(x_3 - x_2),\ t_\tau = |x_3 - x_2|;$$

$$\underline{r}_1 = \frac{1}{s_\tau}(x_* - x_1),\ s_\tau = |x_* - x_1|,\ x_* = x_2 + t_* \underline{r}_2,\ t_* = (x_1 - x_2, \underline{r}_2);$$

$$\underline{n} = \underline{r}_1 \times \underline{r}_2.$$

Також введемо ще дві величини $\alpha_1 = -\frac{t_*}{s_\tau}$ та $\alpha_2 = \frac{t_\tau - t_*}{s_\tau}$.

У новій системі координат довільну точку $x \in R^3$ можна зобразити так:

$$x = x_1 + s_x \underline{r}_1 + t_x \underline{r}_2 + z_x \underline{n}\ ,$$

де $s_x = (x - x_1, \underline{r}_1),\ t_x = (x - x_1, \underline{r}_2),\ z_x = (x - x_1, \underline{n})$, а граничний елемент τ можна подати у вигляді

$$\tau = \{y = y(s,t) = x_1 + s\underline{r}_1 + t\underline{r}_2 : 0 < s < s_\tau,\ \alpha_1 s < t < \alpha_2 s\}.$$

Тоді для відстані між довільними точками $x \in R^3$ та $y \in \tau$ отримаємо такий вираз:

$$|x - y|^2 = (s - s_x)^2 + (t - t_x)^2 + z_x^2. \tag{18}$$

Враховуючи його, інтеграл $I(x)$ можна обчислити аналітично [9]

$$I(x) = \int_\tau \frac{1}{|x-y|} ds_y = F(s_\tau, \alpha_2) - F(0, \alpha_2) - F(s_\tau, \alpha_1) + F(0, \alpha_1)\ ,$$

де

$$F(s,\alpha) = (s - s_x)\ln(\alpha s - t_x + \sqrt{(s-s_x)^2 + (\alpha s - t_x)^2 + z_x^2}) - s +$$
$$+ \frac{\alpha s_x - t_x}{\sqrt{1+\alpha^2}} \ln(\sqrt{1+\alpha^2}(s-p) + \sqrt{(1+\alpha^2)(s-p)^2 + q^2}) +$$
$$+ 2z_x \arctan \frac{(q - \frac{\alpha s_x - t_x}{1+\alpha^2})\sqrt{(1+\alpha^2)(s-p)^2 + q^2} + (\alpha s - t_x - q)q}{(s-p)z_x},$$

$$p = \frac{\alpha t_x + s_x}{1+\alpha^2},\quad q^2 = z_x^2 + \frac{(t_x - \alpha s_x)^2}{1+\alpha^2}.$$

Адитивну процедуру виділення особливості застосовуємо і до інших подібних інтегралів. Решту інтегралів у (15) знаходимо чисельно, використовуючи квадратурні формули Гауса.

Систему (14) далі розв'язуємо методом *LU*-декомпозиції. Такий підхід дає змогу реалізувати процес покрокового знаходження компонентів розв'язку, коли перераховується лише права частина (14) і виконується обернений хід розв'язування системи. Це дає змогу значно оптимізувати обчислення. Знайдені на черговому кроці коефіцієнти апроксимації невідомої функції можна відразу використовувати для обчислення нового компонента розв'язку задачі за формулою (10).

Зазначимо, що запропоновані алгоритми методу граничних елементів легко поширюються на інші типи крайових задач, зокрема на зовнішні задачі.

5. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Як модельний приклад розглянемо випадок сфери одиничного радіуса, яку розіб'ємо на трикутні елементи. У цьому разі $\kappa = 2$ та граничні умови утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію $g_k = 2^{-k}$. У табл. подано максимальні відносні похибки розв'язків системи (10) залежно від кількості рівнянь і деталізації розбиттів (кількість трикутників та їхніх вершин).

Відносні похибки розв'язків системи рівнянь

Кількість рівнянь системи	Кількість трикутників / кількість вершин			
	20/12	32/18	80/42	360/184
1	0,05266	0,00876	0,00518	0,0008
4	0,12470	0,05900	0,01966	0,0045
8	0,31000	0,16000	0,05226	0,0118
12	0,40670	0,18520	0,06730	0,0218

6. ВИСНОВКИ

Для побудови наближеного розв'язку внутрішніх тривимірних крайових задач для системи еліптичних рівнянь спеціального вигляду використано метод граничних елементів на підставі методу Гальоркіна і проведено чисельні експерименти. Наявність розробленого алгоритму дає змогу використати його для розв'язування різних нестаціонарних задач, які редукуються до розглянутої системи стаціонарних задач.

Список використаної літератури

1. *Людкевич И.В.* Численное решение краевых задач для волнового уравнения / И.В. Людкевич, А.Е. Музычук. – Львов: ЛГУ, 1990. – 80 с.
2. *Chapko R.* Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations / R. Chapko, R. Kress // Journal of Integral Equations and Applications. – 1997. – Vol. 9. – P. 47–69.
3. *Chapko R.* On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations / R. Chapko, R. Kress // In Agarwal, O'Regan, eds. Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Series in Mathematical Analysis and Applications. – Vol. 2. – Cordon and Breach Science Publishers, Amsterdam. – 2000. – P. 55–69.
4. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – Vol. 19. – P. 613–626.
5. *Hsiao G.C.* Boundary integral equations / G.C. Hsiao, W.L. Wendland. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 640 p.
6. *Litynskyy S.* Boundary elements method for some triangular system of boundary integral equations / S. Litynskyy, Yu. Muzychuk // Proceedings of XIV International Seminar / Workshop on Direct and Inverse problem of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2009). – IAPMM, NASU, Lviv. – 2009. – P. 208–211.
7. *Muzychuk Yu.* Numerical solution of Neumann boundary value problem for an infinite triangular system of elliptic equations / Yu. Muzychuk // Proceedings of the International Conference "Integral Equations – 2010" dedicated to 50 years of the

Department of Numerical Mathematics, 25-27 August 2010, Lviv. – Lviv: PAIS, 2010. – P. 99–104.
8. *Muzychuk Yu.A*. On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Yu. A. Muzychuk, R.S. Chapko // Matematychni Studii. – 2012. – Vol. 38, № 1. – P. 12–34.
9. *Rjasanow S*. The Fast Solution of Boundary Integral Equations / S. Rjasanow, O. Steinbach. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2007. – 284 p.

Стаття: надійшла до редколегії 28.11.2012
доопрацьована 26.12.2012
прийнята до друку 24.01.2013

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВНУТРЕННИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ю. Музычук

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

Рассмотрено численное решение краевых задач для бесконечных систем эллиптических уравнений специального вида в трехмерных областях с липшыцевой границей. Краевые задачи через соответствующий аналог формулы Грина редуцированы до систем граничных интегральных уравнений. Для численного их решения применен метод граничных элементов на основе метода Галеркина. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: краевые задачи, системы эллиптических уравнений, граничные интегральные уравнения, метод граничных элементов, метод Галеркина.

NUMERICAL SOLUTION OF INNER BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR INFINITE SYSTEMS OF ELLIPTIC EQUATIONS

Yu. Muzychuk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kom@franko.lviv.ua

We consider the numerical solution of boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind in three-dimensional domains with Lipschitz boundaries. Boundary-value problems are reduced through corresponding analogues of the Green formulae to a system of boundary integral equations. Boundary elements method based on Galerkin method is used for the numerical solution. The results of numerical experiments are specified.

Key words: boundary value problem, system of elliptic equations, boundary integral equation method, boundary element method, Galerkin method.