

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 681.324

ЗАСТОСУВАННЯ ШТУЧНОЇ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ СТОКУ МІЛКОЇ ВОДИ У КІНЕМАТИЧНОМУ НАБЛИЖЕННІ

Н. Гринкевич¹, В. Трушевський¹, Н. Щербина²

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kdais@franko.lviv.ua

²Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79601

Досліджено ефективність застосування нейронної мережі на підставі радіальних базисних функцій (РБФ) до розв'язування задачі стоку мілкої води у кінематичному наближенні. Побудовано РБФ-мережу з використанням мультікватричних базисних функцій. Навчання мережі полягає у мінімізації отриманого функціонала похибки. Розглянуто різні методики навчання нейронної мережі та наведено рекомендації щодо вибору найкращої з них. Проведено порівняльний аналіз отриманих чисельних результатів з використанням РБФ-мережі, методу скінченних елементів (МСЕ) та аналітичним розв'язком. РБФ-мережа дає змогу отримати ліпше наближення точного розв'язку порівняно з МСЕ, де кількість елементів значно перевищує кількість нейронів мережі, й може ефективно застосовуватись до розв'язування нелінійних задач стоку мілкої води.

Ключові слова: метод скінченних елементів, нейронна мережа, радіально-базисні функції, мультікватрик, функціонал похибки, початково-крайова задача, мілка вода, кінематична хвиля.

1. ВСТУП

Зростаючі вимоги до оптимального використання водних ресурсів, дефіцит води у багатьох районах земної кулі, зниження її якості роблять актуальним розвиток теорії формування вод суші як основи для керування водними ресурсами. Моделі гідрологічного циклу можуть бути використані не тільки в задачах, пов'язаних із проектуванням та експлуатацією водноресурсних систем, а й для створення методів активного впливу на формування стоку та якості води на водозборі. Тому математичне моделювання гідрологічних процесів на територіях водозборів рік та озер є актуальною та важливою задачею, яка потребує побудови адекватних моделей і розробки наближених числових методів для аналізу характеристик існуючих чи прогнозованих процесів шляхом проведення кваліфікованого обчислювального експерименту.

Отримати аналітичні розв'язки задач гідродинаміки в багатьох практично важливих випадках неможливо. Тому для розв'язання задач такого класу активно використовують чисельні методи [2, 5, 6], які зазвичай потребують значної кількості обчислювальних ресурсів. У більшості випадків після редукції диференціальної задачі до дискретної одержують системи лінійних алгебричних рівнянь великої розмірності. Для пошуку їхнього розв'язку найчастіше застосовують ітераційні методи, які припускають послідовну, а не паралельну обробку даних. У цьому разі для прискорення обчислювального процесу треба збільшувати продуктивність

процесора. Проте екстенсивний шлях розвитку обчислювальної техніки, пов'язаний зі збільшенням тактової частоти процесора, вичерпує себе. З огляду на цю обставину набувають поширення багатоядерні процесори, які дають змогу в повному обсязі використовувати паралельні обчислення. Отже, оптимальне використання наявних ресурсів можливе лише за максимального розпаралелювання процесів обчислень, що в багатьох випадках ефективно досягається завдяки використанню нейронних мереж.

Можна виокремити три головні напрями застосування нейронних мереж до розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних: мережа на підставі радіальних базисних функцій (РБФ-мережа) [1, 7, 10, 11], багатосаровий персептрон [8, 9, 11], клітинкові мережі [4].

Ми досліджуватимемо ефективність застосування РБФ-мережі до задачі стоку мілкої води у кінематичному наближенні [2].

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Важливе значення серед гідрологічних моделей відіграють моделі схилового стоку (дощовий стік, русловий стік) [2, 3, 5]. Рівняння, які описують ці процеси, отримують із загальних рівнянь мілкої води у гідродинамічному наближенні й називають кінематичними рівняннями. У цьому випадку переміщення водних мас відбувається в умовах рівноваги сил опору та сили тяжіння. Такий рух набуває вигляду хвиль, які виникають внаслідок зміни в часі складових водного балансу, тому М. Лайтхілл і Дж. Уїзем [3] назвали їх кінематичними хвилями. На відміну від динамічних хвиль, які можуть поширюватися вниз і вгору за течією, кінематичні хвилі поширюються тільки вниз за течією. Динамічні хвилі на природних водозборах і на річних схилах розповсюджуються з набагато більшою швидкістю, ніж кінематичні, тому й швидко зникають. Внаслідок цього більша частина поверхневих хвиль рухається зі швидкістю близькою до швидкості кінематичної хвилі.

Спрощені рівняння стоку у кінематичному наближенні набувають такого вигляду:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = R - I, \quad q = \alpha h^m, \quad \text{в області } (0, L) \times (0, T], \quad (1)$$

де h – глибина стоку; R – інтенсивність дощу; Re – число Рейнольдса; I – інтенсивність інфільтрації води в ґрунт; $\alpha = C i_0^{1/2}$, $m = 3/2$ – за формулою Шезі для турбулентного руху або $\alpha = \frac{g i_0}{2\nu}$, $m = 3$ – для ламінарного руху, ν – кінематична в'язкість; i_0 – нахил поверхні стоку, який вважають додатним у бік зменшення відміток дна русла; C – коефіцієнт Шезі; g – прискорення вільного падіння.

Щоб сформулювати початкову-крайову задачу, доповнимо рівняння (1) такими початковою і крайовими умовами, відповідно:

$$h|_{t=0} = h_0; \quad \left(-\beta \frac{\partial h}{\partial x} + (1-\beta)h \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\gamma \frac{\partial h}{\partial x} + (1-\gamma)h \right) \Big|_{x=L} = 0, \quad \gamma, \beta > 0. \quad (2)$$

Для розв'язування задачі (1)–(2) застосуємо нейронну мережу з використанням радіально-базисних функцій. Загальну ідею цього підходу розглянемо далі.

3. НЕЙРОМЕРЕЖЕВИЙ ПІДХІД НА ОСНОВІ РБФ

Нейронна мережа на основі РБФ – універсальний апроксиматор функцій [1, 7, 10, 11]. Отже, її можна застосовувати до розв’язування початково-крайових задач математичної фізики. У загальному випадку початково-крайову задачу можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} L(u) &= f, \quad u = u(x, t), \quad (t, x) \in \Omega \subset R^n; \\ B_i(u)|_{\Gamma_i} &= b_i, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \partial\Omega = \Gamma = \bigcup_i \Gamma_i, \end{aligned} \quad (3)$$

де n – розмірність простору задачі; L, B_i – диференційні оператори.

Розв’язок задачі (3) шукаємо у вигляді

$$u(x) = \sum_{i=1}^m w_i \phi_i(x). \quad (4)$$

Тут ϕ_i – радіальні базисні функції; w_i – вагові коефіцієнти мережі.

Схематично структуру нейронної мережі на основі РБФ зображено на рис. 1.

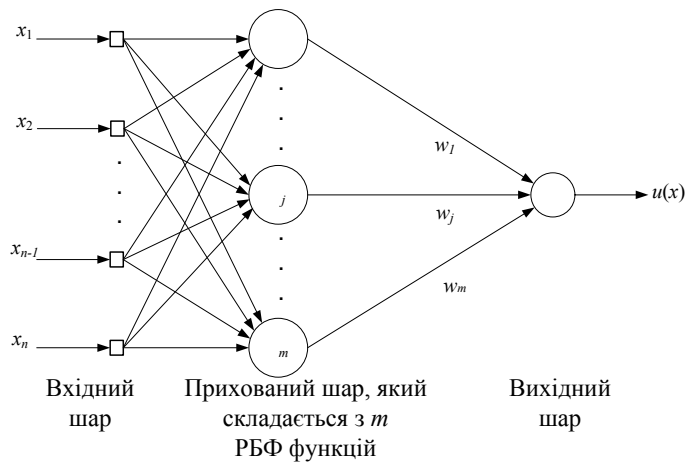


Рис. 1. Структура нейронної мережі на основі РБФ

Кожен i -й нейрон РБФ-мережі виконує нелінійне перетворення, яке характеризують такі параметри: c_i – центр та a_i – ширина. Для побудови мережі можна використовувати різні РБФ. Найчастіше використовують мультіквадрик (multiquadric)

$$\phi_i(x) = \sqrt{(x - c_i)^2 + a_i^2}, \quad (5)$$

та Гаусіан (Gaussian)

$$\phi_i(x) = \exp\left(-\frac{(x - c_i)^2}{a_i^2}\right). \quad (6)$$

На вхід мережі подають координати точок області $\{x_i\}_{i=1}^n$ (точки колокації), де n – розмірність простору. На виході отримують значення шуканої функції (4) в точці x . Навчання мережі зводиться до знаходження невідомих параметрів w_i, c_i , та a_i завдяки мінімізації функціонала похибки

$$E(u) = \int_{\Omega} |L(u) - g|^2 d\Omega + \sum_i \int_{\Gamma_i} \delta_i |B_i(u) - f_i|^2 d\Gamma, \quad (7)$$

де $\delta_i > 0$ – штрафні множники, які відповідають за виконання крайових умов на відповідних частинах границі.

У процесі навчання нейронної мережі використовують дискретний аналог функціонала похибки (7) вигляду

$$E(w, c, a) = \sum_{j=1}^M |L(u) - g|^2(x^j) + \sum_{i=1}^l \delta_i \cdot \sum_{j=1}^{M_i} |u - f_i|^2(x^j), \quad (8)$$

де $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$; $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$; $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$; $\{x^j\}_{j=1}^M \in \Omega$; $\{x^{j_i}\}_{j_i=1}^{M_i} \in \Gamma_i$. – деякі фіксовані дискретні точки, які подають на вхід нейронній мережі.

Для навчання мережі використовують градієнтний алгоритм [7] мінімізації функціонала E шляхом налаштування ваг w_i , центрів c_i та ширини a_i

$$\begin{aligned} w_i^k &= w_i^{k-1} - \eta \frac{\partial E(c_i^{k-1}, a_i^{k-1}, w_i^{k-1})}{\partial w_i^{k-1}}, \\ c_i^k &= c_i^{k-1} - \beta \frac{\partial E(c_i^{k-1}, a_i^{k-1}, w_i^k)}{\partial c_i^{k-1}}, \\ a_i^k &= a_i^{k-1} - \alpha \frac{\partial E(c_i^k, a_i^{k-1}, w_i^k)}{\partial a_i^{k-1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут η , β , α – коефіцієнти швидкості навчання.

Процес налаштування параметрів відбувається до досягнення певної точності ε ($E \leq \varepsilon$). Застосуємо розглянуту методику до розв'язування початково-крайової задачі (1)–(2).

4. ЗАСТОСУВАННЯ

Для розв'язування сформульованої початково-крайової задачі застосуємо РБФ-мережу з мультікватратичними базисними функціями (5). На вхід мережі подаються координати точок області (точки колокації), $X = (t, x)$. Радіально базисна функція кожного нейрона характеризується своїми параметрами: центром $c_i = (c_i^t, c_i^x)$ і шириною $a_i > 0$, які уточнюють у процесі навчання. Кожен нейрон виконує нелінійне перетворення $\phi_i = (r_i^2 + a_i^2)^{1/2}$, аргументом якого є відстань від точки (t, x) до відповідного центра c^i : $r_i^2(t, x) = (t - c_i^t)^2 + (x - c_i^x)^2$. На виході нейронної мережі отримуємо значення шуканої функції в точці x : $u(t, x) = \sum_{i=1}^m w_i \phi_i(t, x)$.

Задача мережі зводиться до мінімізації функціонала похибки (8), використовуючи градієнтний алгоритм (9) для відшукування невідомих параметрів w_i , c_i , та a_i .

Під час пошуку розв'язку актуальним залишається питання розміщення центрів РБФ. Для регулярної області зручно розміщувати центри у вузлах сітки або розставляти випадково. Один із варіантів – зосередження основної кількості нейронів на границі області, деякої кількості всередині та зовні області. Варіант корегування

розміщення центрів нейронів у процесі навчання мережі дає ліпші результати. Питання щодо кількості нейронів можна вирішувати експериментально або виконувати поступове збільшення їхньої кількості, долучаючи новий нейрон у ту точку області, компонента функціонала похибки якої найбільша. Нові нейрони можуть долучатись також й у тому випадку, коли загальне значення функціонала похибки не зменшується за рахунок корегування значень параметрів. Зауважимо, що немає математичної теорії, яка забезпечує вибір типу РБФ при долученні нового нейрона. Ініціалізація початкових значень параметрів мережі w_i , c_i , та a_i виконується невеликими величинами. Єдиного правила для присвоєння початкових значень цим змінним не існує, тому ця обставина потребує експериментальних досліджень для конкретної моделі. Проте практика свідчить, що найліпше ці значення визначати від 10^{-4} до 10^{-2} . Під час процесу навчання можна змінювати навчальну вибірку через певну визначену кількість ітерацій. Такий підхід дає змогу отримати розв'язок, який не залежить від вхідних даних, та уникнути “злипання” центрів радіально-базисних функцій. Навчання мережі продовжується доти, доки значення функціонала не буде меншим за певну точність.

Для спрощення запису функціонала похибки введемо такі позначення:

$$E_{\Omega} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - R + I \right\}^2 (t_i, x_i) = \sum_{i=1}^n E_{\Omega}^{(i)^2},$$

де $(t_i, x_i) \in \Omega = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$;

$$E_{\Gamma_i} = \sum_{i=1}^{n_i} \{h - h_0\}^2(0, x_i) = \sum_{i=1}^{n_i} E_{\Gamma_i}^{(i)^2}, \quad (t_i, x_i) \in \Gamma_i = \{(t, x) | t = 0, 0 < x < L\};$$

$$E_0 = \sum_{i=1}^{n_0} \left\{ -\beta \frac{\partial h}{\partial x} + (1 - \beta)h \right\}^2 (t_i, 0) = \sum_{i=1}^{n_0} E_0^{(i)^2}, \quad (t_i, x_i) \in \Gamma_0 = \{(t, x) | 0 < t \leq T, x = 0\};$$

$$E_L = \sum_{i=1}^{n_L} \left\{ \gamma \frac{\partial h}{\partial x} + (1 - \gamma)h \right\}^2 (t_i, L) = \sum_{i=1}^{n_L} E_L^{(i)^2}, \quad (t_i, x_i) \in \Gamma_L = \{(t, x) | 0 < t \leq T, x = L\}.$$

Тоді функціонал похибки набуде вигляду

$$E = E_{\Omega} + E_{\Gamma_i} + E_0 + E_L. \quad (10)$$

Для завершення обчислення виразу (10) скористаємось розвиненням наближеного розв'язку за радіальними базисними функціями (4) та обчислимо такі похідні:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{i=1}^m w_i (t - c_i') [r_i^2 + a_i^2]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^m w_i (t - c_i') \left[(t - c_i')^2 + (x - c_i^x)^2 + a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sum_{i=1}^m w_i (x - c_i^x) [r_i^2 + a_i^2]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^m w_i (x - c_i^x) \left[(t - c_i')^2 + (x - c_i^x)^2 + a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^m w_i (r_i^2 + a_i^2 - (x - c_i^x)^2) [r_i^2 + a_i^2]^{\frac{3}{2}} = \sum_{i=1}^m w_i (t - c_i') \left[(t - c_i')^2 + (x - c_i^x)^2 + a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Навчання нейронної мережі зводиться до мінімізації функціонала похибки (10), використовуючи градієнтний алгоритм навчання (9).

5. ТЕСТОВІ ЗАДАЧІ

Приклад 1. Розглянемо тестову задачу з відомим аналітичним розв'язком. Для задачі (1)–(2) виберемо такі параметри:

$$\begin{aligned} \alpha = 0.1, \quad m = 1, \quad L = 1, \quad \text{Re} = 50, \\ R - I = (x - x^2) - 0.1(1 - 2x)t - 2t/50, \\ h|_{x=0} = h|_{x=L} = 0, \quad \forall t \in [0, 0.15], \\ h|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Досліджувана задача має такий аналітичний розв'язок:

$$h = (x - x^2)t.$$

Графічне зображення точного та аналітичного розв'язків у момент часу $t = 0.2$ показано на рис. 2. У табл. 1 наведено числові результати точного та наближеного розв'язків і абсолютна похибка.

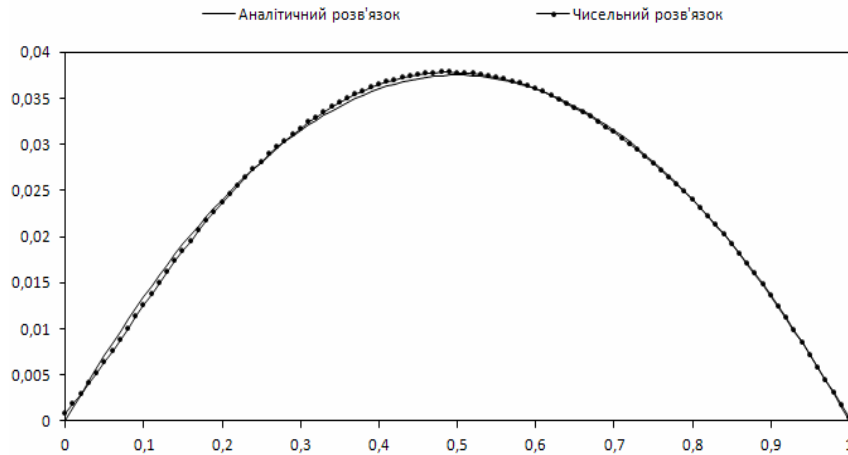


Рис. 2. Порівняння точного та наближеного розв'язків

Навчання мережі відбувалося на підставі рівномірно-розподіленої навчальної вибірки за більшої концентрації вузлів на межі області. Початкові положення нейронів вибирали рівномірно з області, для кращого наближення граничних умов частина з них розташовувалася поза областю. Через задану кількість кроків відбувалася зміна навчальної вибірки, щоб забезпечити незалежність нейронної мережі від вхідних даних. Якщо похибка функціонала не зменшується, то навчальна вибірка змінюється. Протягом процесу навчання відбувалося долучення нових нейронів у вузли, де функціонал похибки (10) досягав максимального значення. Початкові значення ширини та ваг радіально-базисних функцій задавали порядку 10^{-2} та 10^{-4} , відповідно. У процесі навчання значення функціонала похибки зменшується до 10^{-4} .

Розглянуту задачу було розв'язано також методом скінченних елементів (кількість елементів $N = 100$). Для нейронної мережі початкова кількість нейронів становила 56 і до завершення навчання досягнула 63. Результати порівняння цих методів наведено у табл. 2. Зауважимо, що РБФ-мережа дає змогу отримати ліпше наближення розв'язку за меншої кількості нейронів (у нашому випадку 63), ніж МСЕ з кількістю скінченних елементів $N = 100$.

Таблиця 1

Точний і наближений розв'язки

x	h_T	h_H	$ h_T - h_H $	x	h_T	h_H	$ h_T - h_H $
0.40	0.036000	0.036460	0.000460	0.53	0.037365	0.037545	0.000180
0.41	0.036285	0.036745	0.000460	0.54	0.037260	0.037417	0.000157
0.42	0.036540	0.036995	0.000455	0.55	0.037125	0.037259	0.000134
0.43	0.036765	0.037210	0.000445	0.56	0.036960	0.037070	0.000110
0.44	0.036960	0.037389	0.000429	0.57	0.036765	0.036850	0.000085
0.45	0.037125	0.037533	0.000408	0.58	0.036540	0.036598	0.000048
0.46	0.037260	0.037642	0.000382	0.59	0.036285	0.036316	0.000031
0.47	0.037365	0.037718	0.000353	0.60	0.036000	0.036002	0.000002
0.48	0.037440	0.037761	0.000321	0.61	0.035685	0.035659	0.000026
0.49	0.037485	0.037773	0.000288	0.62	0.035340	0.035285	0.000055
0.5	0.037500	0.037757	0.000257	0.63	0.034965	0.034882	0.000083
0.51	0.037485	0.037714	0.000229	0.64	0.034560	0.03445	0.000115
0.52	0.037440	0.037643	0.000203	0.65	0.034125	0.033991	0.000134

Таблиця 2

Порівняння результатів, отриманих на основі РБФ-мережі та МСЕ

x	РБФ	МСЕ	Точний розв'язок	Абсолютна похибка РБФ	Абсолютна похибка МСЕ
0.4	0.036460	0.037200	0.03600	0.000460	0.001200
0.44	0.037389	0.038192	0.03696	0.000429	0.001232
0.48	0.037761	0.038688	0.03744	0.000321	0.001248
0.52	0.037643	0.038688	0.03744	0.000203	0.001248
0.56	0.037070	0.038192	0.03696	0.000110	0.001232
0.6	0.036002	0.037200	0.03600	0.000001	0.001200
0.64	0.034450	0.035712	0.03456	0.000110	0.001152
0.68	0.032451	0.033728	0.03264	0.000189	0.001088
0.72	0.030041	0.031248	0.03024	0.000199	0.001008
0.76	0.027229	0.028272	0.02736	0.000131	0.000912
0.8	0.023981	0.024800	0.02400	0.000019	0.000800
0.84	0.020251	0.020832	0.02016	0.0000910	0.000672
0.88	0.016021	0.016368	0.01584	0.000181	0.000528
0.92	0.011178	0.011408	0.01104	0.000138	0.000368
0.96	0.005810	0.005952	0.00576	0.000010	0.000192
1	0.000374	0.000000	0.00000	0.000374	0.000000

Приклад 2. Розглянемо тестову задачу зі сталим дощовим притоком. Поверхню водозбору зображено на рис. 3. Для дослідження розв'язку початково-крайової задачі (1)–(2) вибрано такі вхідні дані:

$$Re = 20, m = 3/2, R - I = 0.01,$$

$$h|_{x=0} = h|_{x=L} = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad T = 0.2,$$

$$h|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

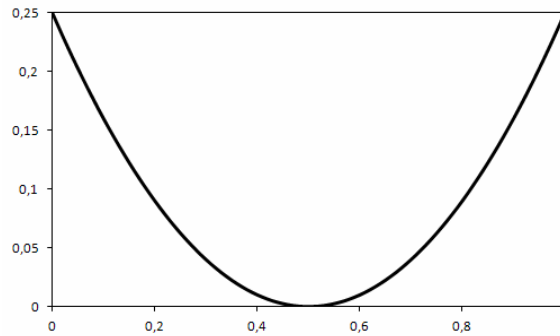


Рис. 3. Рельєф поверхні водозбору

Зауважимо, що значення параметра α в (1) у конкретному випадку відображає зміну рельєфу дна в кожній точці x . Це величина, що прямо пропорційна тангенсу кута нахилу поверхні до горизонту, і змінюється за законом $\alpha(x) = 2x - 1$.

Навчання мережі проводили на підставі сталої рівномірно-розподіленої вибірки навчальних даних за більшої концентрації вузлів на межі області. Кількість навчальних вузлів загалом становила 121: у середині області – 54 і на її межі – 67. Початкові значення ширини та ваг радіально-базисних функцій задавали порядку 10^{-2} та 10^{-4} , відповідно.

На рис. 4 схематично зображено початкове розміщення нейронів. Розміщення нейронів після навчання зображено на рис. 5. З рисунків легко побачити, що симетричність розміщення нейронів в області зберігається після навчання.

Проведено дослідження зміни глибини з часом. На рис. 6 та у табл. 3 подано значення глибини стоку в різні моменти часу $t = 0.15, 0.175, 0.2$.

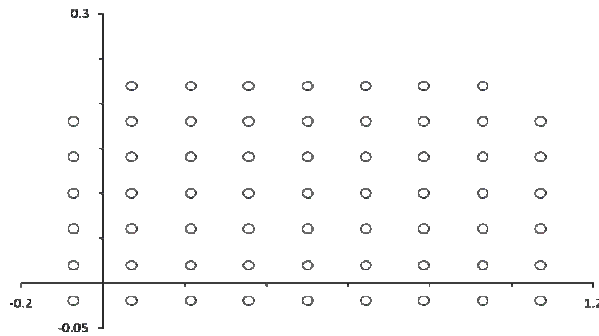


Рис. 4. Початкове розміщення нейронів

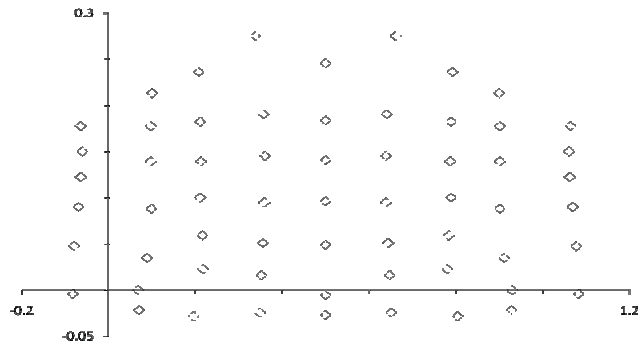


Рис. 5. Розміщення нейронів після навчання мережі

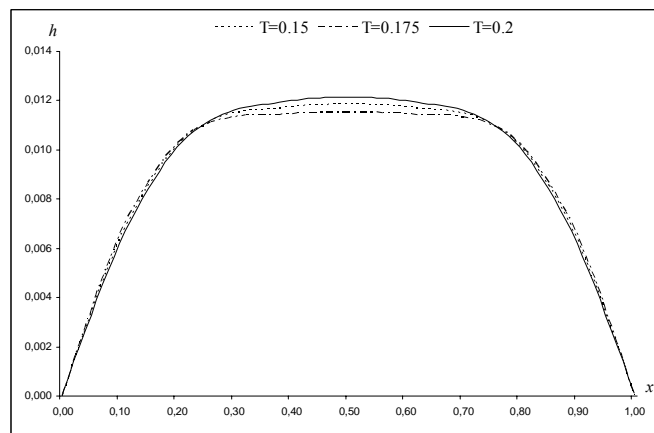


Рис. 6. Значення глибини в різні моменти часу

Таблиця 3

Значення глибини у різні моменти часу

x	$h(t = 0.15)$	$h(t = 0.175)$	$h(t = 0.2)$
0.00	0.0000506675	0.0000118719	0.0001394323
0.10	0.0063381638	0.0065290724	0.0062058727
0.20	0.0101610820	0.0102321871	0.0100970206
0.30	0.0114974085	0.0113480396	0.0116241835
0.40	0.0117458440	0.0114625141	0.0120085651
0.50	0.0118528822	0.0115366969	0.0121523171
0.60	0.0117458440	0.0114625141	0.0120085651
0.70	0.0114974085	0.0113480396	0.0116241835
0.80	0.0101610820	0.0102321871	0.0100970206
0.90	0.0063381638	0.0065290724	0.0062058727
1.00	0.0000506675	0.0000118719	0.0001394323

На підставі аналізу отриманих числових результатів можна зробити висновок, що глибина стоку з часом постійно зростає та відбувається заповнення водою заглибини поверхні. Це пояснюється тим, що дощовий притік є сталим з нульовою інфільтрацією рідини в ґрунт. Цей приклад відображає процес поступового збільшення глибини при турбулентному режимі водосток.

6. ВИСНОВКИ

Ми досліджували ефективність застосування РБФ-мережі до розв'язування одновимірної задачі стоку мілкої води у кінематичному наближенні. Наведено чисельну схему побудови нейронної мережі.

Побудовано функціонал похибки у вигляді (10) для задачі стоку мілкої води у кінематичному наближенні. Задача нейронної мережі полягала у мінімізації отриманого функціонала, використовуючи алгоритм навчання (9). Застосовано різні методи навчання мережі: 1) навчальна вибірка не змінюється протягом навчання; 2) протягом процесу навчання долучаються нові нейрони у вузли, де функціонал похибки досягає максимального значення; 3) через задану кількість кроків проводиться зміна навчальної вибірки, щоб забезпечити незалежність нейронної мережі від вхідних даних. За результатами чисельних експериментів можна зробити такі рекомендації щодо навчання РБФ-мережі:

- 1) початкове розташування нейронів треба обирати у вузлах рівномірно розподіленої сітки області, частину з них розміщувати поза областю з метою кращого наближення граничних умов;
- 2) навчання варто проводити на підставі рівномірно-розподіленої навчальної вибірки за більшої концентрації вузлів на межі області;
- 3) навчальну вибірку потрібно оновлювати та збільшувати через певну кількість кроків;
- 4) початкові значення невідомих параметрів мережі вибирати порядку $10^{-4} - 10^{-2}$.

Проведено порівняння отриманих результатів з аналітичним розв'язком і результатами з застосуванням методу скінченних елементів. З'ясовано, що нейронна мережа дає змогу досягнути високої точності розв'язку порядку 10^{-4} , причому кількість нейронів, яка потрібна для цього, значно менша, ніж кількість скінченних елементів у МСЕ для досягнення такої ж точності.

Отже, отримані числові результати свідчать про ефективність застосування РБФ-мережі до розв'язування нелінійних задач стоку мілкої води. Важливо зауважити, що за великих значень числа Рейнольдса потоки та їхні градієнти різко змінюються, внаслідок чого розв'язок задачі, отриманий МСЕ, втрачає стійкість і з'являються "паразитичні" осциляції. Для їхнього усунення автори пропонують різні протипотокові схеми МСЕ. На противагу цьому нейронна мережа здатна врахувати тонкі прошарки області, де розв'язки різко змінюються та результати не потребують згладжування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Васильев А.Н.* Нейронные сети как новый универсальный подход к численному решению задач математической физики / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов // *Нейрокомпьютеры: разработка, применение.* – 2004. – № 7–8. – С. 111–118.
2. *Венгерський П.С.* Чисельне моделювання мілкого схилового стоку в кінематичному наближенні / П.С. Венгерський, В.М. Трушевський // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф.* – 1999. – № 1. – С. 44–49

3. *Кучмент Л.С.* Модели процессов формирования речного стока / Л. С. Кучмент. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 142 с.
4. *Нестеренко Б.Б.* Решение краевых задач на дискретных клеточных нейронных сетях / Б.Б. Нестеренко, М.А. Новотарский // Искусственный интеллект. – 3. – 2008. – С. 568–578.
5. *Трушевський В.М.* Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізикоматематичних наук / В.М. Трушевський, 2004. – 146 с.
6. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач / Г.А. Шинкаренко. – Київ: НМК ВО, 1991. – 87 с.
7. *Яничкина Е.В.* Решение эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных с использованием радиально-базисных нейронных сетей / Е.В. Яничкина, В.И. Горбаченко // Нейроинформатика. –2006. – Ч. 3. – С. 15–21.
8. *Mohsen H.* Feedforward Neural Network for Solving Partial Differential Equation / H. Mohsen, K. Behnam // Journal of Applied Sciences. – 2007. –7(19). – P. 2812–2817.
9. *Lagaris I.E.* Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations / I. E. Lagaris, A. Likas, D. I. Fotiadis // IEEE Trans. on Neural Networks. – 1998. – Vol. 4. – P. 987–1000.
10. *Hacib T.* Computational Investigation on the Use of FEM and RBF Neural Network in the Inverse Electromagnetic Problem of Parameter Identification / T. Hacib, M.R. Mekideche, N. Ferkha // IAENG International Journal of Computer Science, 33:2. Advance online publication: 24 May 2007.
11. *Haykin S.* Neural Networks: A comprehensive foundation / S. Haykin. – Prentice-Hall, New Jersey, 1999. – 842 p.
12. *Trushevsky V.* Application of neural networks to the non-stationary heat conductivity problems / V. Trushevsky, G. Shynkarenko, N. Shcherbyna // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: зб. праць наук. техн. конф., Львів, 7–8 жовтня 2010 р. – Львів: ФМІ НАНУ, 2010. – С. 20–23.

Стаття: надійшла до редколегії 12.09.2012

доопрацьована 28.11.2012

прийнята до друку 05.12.2012

ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СТОКА МЕЛКОЙ ВОДЫ В КИНЕМАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

И. Гринкевич¹, В. Трушевский¹, Н. Щербина²

¹Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kdais@franko.lviv.ua

²Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача НАН Украины, ул. Наукова, 3б, Львов, 79601

Исследована ефективність застосування нейронної мережі з використанням радіальних базисних функцій (РБФ) до рішення задачі стоку мелкої води в кінематическому наближенні. Побудована РБФ-мережа з використанням мультиквадратических базисних функцій. Навчання мережі складалося в мінімізації отриманого функціонала погрешності. Розглянуті різні методи навчання нейронної мережі та наведені рекомендації по вибору кращої з них. Проведено порівняльний аналіз отриманих чисельних результатів з використанням РБФ-мережі, методу кінцевих елементів (МКЕ) та аналітическим рішенням. РБФ-мережа дозволяє отримати краще наближення точного рішення в порівнянні з МКЕ, где

количество элементов значительно превышает количество нейронов сети, и может эффективно применяться к решению нелинейных задач стока мелкой воды.

Ключевые слова: метод конечных элементов, нейронная сеть, радиально-базисные функции, мультиквадрик, функционал погрешности, начально-краевая задача, мелкая вода, кинематическая волна.

APPLYING OF ARTIFICIAL NEURAL NETWORK TO SOLVING OF SHALLOW WATER FLOW PROBLEM IN KINEMATICAL APPROXIMATION

N. Grynkevych¹, V. Trushevsky¹, N. Shcherbyna²

¹*Ivan Franko National University of Lviv*

Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kis@franko.lviv.ua

²*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics*

NAS Ukraine, Naukova Str., 3b, Lviv, 79601

The efficiency of a neural network, which is based on radial basis functions (RBF), to the solving of a shallow water problem in a kinematics approximation, is investigated. RBF-network by using multiquadric basis functions is constructed. Training of neural network is to minimize the error functional. Different methodologies of neural network training are considered. The best choice of them is proposed. A comparative analysis of numerical results with the finite element method (FEM) and analytical solution is done. RBF-network provides a better approximation of the exact solution than the FEM, where the number of finite elements is much higher than the number of neurons in the network. RBF-network can be effectively applied to solving of nonlinear shallow water problems.

Key words: finite element method, neural network, radial basis functions, multiquadric, error functional, initial-boundary value problem, shallow water, kinematics wave