ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 22. С. 85–91
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 22. P. 85–91

УДК 511.3

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА ТА ЯКОБІ

О. Мильо, Я. Холявка

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Нехай $\wp(z)$, $\operatorname{sn} z$ − алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса та Якобі з алгебричними інваріантами та еліптичним модулем, $(2\omega_1, 2\omega_3)$ і $(4K, 2iK')$ − пари основних періодів $\wp(z)$, $\operatorname{sn} z$. Отримано оцінку сумісного наближення $\wp(4K)$, $\operatorname{sn} 2\omega_1$.

Ключові слова: сумісні наближення, еліптична функція Вейєрштрасса, еліптична функція Якобі.

1. ВСТУП

Еліптична функція Вейєрштрасса $\wp(z)$ задовольняє рівняння $(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ ([1], с. 37), числа g_2, g_3 називають інваріантами $\wp(z)$. Нехай $2\omega_1, 2\omega_3$ − деяка фіксована пара її основних періодів.

Еліптична функція Якобі $\operatorname{sn} z$ задовольняє рівняння $(\operatorname{sn}' z)^2 = (1-\operatorname{sn}^2 z)(1-\kappa^2\operatorname{sn}^2 z)$ ([1], с. 46). Число κ називають модулем $\operatorname{sn} z$, $0<\kappa<1$, число $\kappa' = (1-\kappa^2)^{1/2}$ називають її додатковим модулем. Парою основних періодів $\operatorname{sn} z$ є $(4K, 2iK')$, де K, K' − повні еліптичні інтеграли першого роду, що відповідають κ, κ' ([1], с. 23, 44; [5]).

Надалі будемо розглядати алгебрично незалежні еліптичні функції $\wp(z)$ та $\operatorname{sn} z$ з алгебричними g_2, g_3 і κ, періоди яких $2\omega_1$, $4K$ утворюють решітку.

Через $d(P)$, $L(P)$ позначимо степінь та довжину полінома P з цілими коефіцієнтами, через $d(\alpha)$, $L(\alpha)$ − степінь і довжину алгебричного числа α ([3], с. 267); ξ_i − наближаючі алгебричні числа, $d_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ − їхні степені та довжини, відповідно $(i = 1, 2)$, $n = \deg Q(\xi_1, \xi_2)$.

Теорема. Якщо хоча б одне з чисел $\wp(4K)$, $\operatorname{sn}(2\omega_1)$ трансцендентне, то для довільних алгебричних чисел ξ_1, ξ_2 справджується

$$|\wp(4K) - \xi_1| + |\operatorname{sn}(2\omega_1) - \xi_2| > \exp\left(-\Lambda n^3 T^2\right), \tag{1}$$

де

$$T = \max\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \frac{\ln L_2}{d_2} + 1, \ln n\right), \tag{2}$$

$\Lambda > 0$ − константа залежна лише від g_2, g_3 і κ.

2. ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Сформулюємо основні леми, потрібні для доведення теореми. Через $c_1, c_2, \ldots$ будемо позначати додатні константи, залежні лише від g_2, g_3 і κ.

Лема 1. Нехай $m \in \mathbf{N}$. Тоді існують такі поліноми з цілими коефіцієнтами $P_{1,m}$, $P_{2,m}$, $Q_{1,m}$, $Q_{2,m}$, що

$$\wp(mz) = \frac{P_{1,m}(\wp(z), g_2, g_3)}{Q_{1,m}(\wp(z), g_2, g_3)}, \quad \mathrm{sn}(mz) = \frac{P_{2,m}(\mathrm{sn}\, z, \mathrm{sn}' z)}{Q_{2,m}(\kappa^2, \mathrm{sn}\, z)},$$

де $L(P_{i,m}), L(Q_{i,m}) \le \exp(c_1 m^2)$, $\deg P_{i,m}$, $\deg Q_{i,m} \le m^2$, $i = 1,2$.

Лема 2. Нехай $s, l \in \mathbf{N}$. Тоді існують такі многочлени з цілими коефіцієнтами $P_{1,s,l}$, $P_{2,s,l}$, що

$$(\wp^l(z))^{(s)} = \frac{d^s}{d\, z^s}((\wp(z)^l) = P_{1,s,l}(g_2, g_3, \wp(z), \wp'(z)),$$

$$(\mathrm{sn}^l z)^{(s)} = \frac{d^s}{d\, z^s}((\mathrm{sn}\, z)^l) = P_{2,s,l}(\kappa^2, \mathrm{sn}\, z, \mathrm{sn}' z),$$

$$\deg P_{i,s,l} \le c_2(s+l), \; L(P_{i,s,l}) \le \exp(c_3 s \log(s+l)), \; i = 1,2.$$

Доведення леми 1 та леми 2 для функції $\wp(z)$ є, наприклад, в [2], [3], [5], а для $\mathrm{sn}\, z$ подібне доведенню для $\wp(z)$.

Лема 3 ([5]). Якщо z, w, $z+w$ допустимі значення, то

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2 - \wp(z) - \wp(w),$$

$$\mathrm{sn}(z+w) = \frac{\mathrm{sn}\, z\, \mathrm{sn}' w + \mathrm{sn} w\, \mathrm{sn}' z}{1 - \kappa^2 \mathrm{sn}^2 z\, \mathrm{sn}^2 w}.$$

Лема 4 ([8]). Нехай $B, P \in \mathbf{N}$, $Q_{p,b} \in \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $0 \le b < B$, $0 \le p < P$, $L(Q_{p,b}) \le L$, $\deg_{x_i} Q_{p,b} \le \mathsf{N}_i$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ − алгебричні числа, $m = \deg \mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Якщо $P > mB$, то система лінійних рівнянь

$$\sum_{p=0}^{P-1} x_p\, Q_{p,b}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad 0 \le b < B$$

має цілі раціональні розв'язки $A_0, \ldots, A_{P-1}$ такі, що

$$0 < \max |A_i| < 1 + (LP)^{\frac{mB}{P-mB}} \left(\prod_{i=1}^{n} (1+\mathsf{N}_i)\big(L(\alpha_i)(1+d(\alpha_i))\big)^{\frac{\mathsf{N}_i}{d(\alpha_i)}}\right)^{\frac{mB}{P-mB}}.$$

Лема 5 ([3]). Нехай $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ − алгебричні числа, $P \in \mathsf{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $\deg_{x_i} P \le \mathsf{N}_i$, $m = \deg \mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Якщо $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \not\equiv 0$, то

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \ge L(P)^{1-m} \prod_{i=1}^{n} L(\alpha_i)^{\frac{-\mathsf{N}_i m}{d(\alpha_i)}}.$$

Позначимо $|f(z)|_D = \sup_{|z| \le D} |f(z)|$.

Лема 6 ([8]). Нехай R_1, $R_2 \in \mathbb{R}$, $8 < 4R_1 < R_2$, $f(z)$ аналітична в крузі $|z| \le R_2$, E − множина з D^2 точок, які належать кругу $|z| \le R_1$ і відстань між якими для кожної пари точок не менше ε, $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

$$|f(z)|_{|z|\le R_1} \le 2|f(z)|_{|z|\le R_2}\left(\frac{4R_1}{R_2}\right)^{D^2 S} + 2DR_1^{-1}\left(\frac{33R_1}{\varepsilon D}\right)^{D^2 S}\max_{x\in E, 0\le s\le S}\left|\frac{f^{(s)}(x)}{s!}\right|. \tag{3}$$

Лема 7 ([6]). Нехай $\sigma_1(z)$ − σ-функція Вейєрштрасса, що відповідає $\wp(z)$. Функції $\sigma_1(z)$ та $\sigma_1(z)\wp(z)$ цілі і для $M > 1$ виконуються оцінки

$$|\sigma_1(z)\wp(z)|_M, |\sigma_1(z)|_M \le c_4^{M^2}.$$

Якщо ε − відстань від найближчого полюса $\wp(z)$ до z_0 і $|z_0| \le M$, то $|\sigma(z_0)| \ge \varepsilon c_5^{-M^2}$.

Лема 8. Нехай $\sigma_2(z)$ − σ-функція Вейєрштрасса, що відповідає пов'язаній з $\mathrm{sn}(z)$ функції $\tilde{\wp}(z)$. Функції

$$\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1-e_3}),\quad \sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1-e_3})\,\mathrm{sn}\,(z)$$

цілі і для $M > 1$

$$|\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1-e_3})\mathrm{sn}(z)|_{|z|\le M} \le c_6^{M^2},$$

$$|\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1-e_3})|_{|z|\le M} \le c_7^{M^2}.$$

Якщо δ − відстань від z_0 до найближчого полюсу $\mathrm{sn}(z)$ і $|z_0| \le M_0$, тоді $|\sigma_2((z+iK')/\sqrt{e_1-e_3})| \ge \delta c_8^{-M_0^2}$.

Доведення леми 8 подібне до доведення леми 7.

Лема 9 ([5], [7]). Нехай $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, $P(x_1, x_2) \not\equiv 0$, − поліном степеня не більше D_1 по x_1 і D_2 по x_2, D_1, $D_2 \ge 1$, $\wp(z)$, $\mathrm{sn}\, z$ − алгебрично незалежні еліптичні функції. Тоді кількість нулів $P(\wp(z), \mathrm{sn}\, z)$ з врахуванням їхньої кратності при $|z| < K$ не перевищує $c_9 K^2 (D_1 + D_2)$.

3. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ

Доведення теореми будемо проводити другим методом Гельфонда (див., наприклад, [2], [7]).

Припустимо, що (1) не виконується, тобто для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$

$$|\wp(4K) - \xi_1| + |\mathrm{sn}(2\omega_1) - \xi_2| < \exp\left(-\Lambda n^3 T^2\right). \tag{4}$$

Приймемо

$$N^2 = [\lambda^3 nT],\quad S = L = [\ln \lambda N^2]. \tag{5}$$

Визначимо функцію

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2}\,\wp^{l_1}(z)\,\mathrm{sn}^{l_2} z,$$

$$C_{l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{l_1,l_2,\tau}\,\zeta_\tau,\quad C_{l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

де ζ_τ − твірні елементи $\mathbf{Q}(\xi_1, \xi_2)$.

Як і в [2], позначимо

$$\varphi_1(z)=\wp(z+\omega_1),\ \ \varphi_{2,1}(z)=\mathrm{sn}\left(z+\frac{K}{2}\right),\ \ \varphi_{2,2}(w)=\mathrm{sn}\left(w+\frac{3K}{2}\right).$$

Тоді з леми 3

$$\wp(z+w)=\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_1'(z)-\varphi_1'(w)}{\varphi_1(z)-\varphi_1(w)}\right)^2-\varphi_1(z)-\varphi_1(w)=\frac{\Lambda_{1,1}(z,w)}{\Lambda_{1,2}(z,w)}, \tag{7}$$

$$\mathrm{sn}\,(z+w)=\frac{\varphi_{2,1}(z)\ \varphi_{2,2}'(w)+\varphi_{2,2}(w)\ \varphi_{2,1}'(z)}{1-\kappa^2\ \varphi_{2,1}^2(z)\ \varphi_{2,2}^2(w)}=\frac{\Lambda_{2,1}(z,w)}{\Lambda_{2,2}(z,w)}. \tag{8}$$

Існують поліноми $G_{i,s,k,l}(z)$ такі, що

$$G_{i,s,k,l}(z)=\frac{d^s}{d\ w^s}(\Lambda_{i,1}^k(z,w)\,\Lambda_{i,2}^l(z,w)\,|_{w=0}\,, \tag{9}$$

$$\deg G_{i,s,k,l}\le 4(k+l)\,,\ \ln L(G_{i,s,k,l})\le s\ln(s(k+l)+c_{10}(s+k+l)).$$

З (6), (7), (8), (9) подібно як в [2], [7], отримаємо

$$F^{(s)}(z)=\frac{d^s}{d\ w^s}\Big(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w)\ \big(F(z+w)\Lambda_{1,2}^{L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{L}(z,w)\big)\Big)|_{w=0}=$$

$$=\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\frac{d^{s-t}}{d\ w^{s-t}}\Big(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\ \Lambda_{2,2}^{-L}(z,w)\Big)|_{w=0}\times$$

$$\times\sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L}C_{l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}G_{1,\,t-i,\,l_1,\,L-l_1}(z)\,G_{2,\,i,\,l_2,\,L-l_2}(z)= \tag{10}$$

$$=\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\frac{d^{s-t}}{d\ w^{s-t}}\Big(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\,\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w)\Big)|_{w=0}\ F_{s,t}(z).$$

Нехай $\xi_3^2=4\xi_1^3-g_2\xi_1-g_3$, $\xi_4^2=(1-\xi_2^2)(1-\kappa^2\xi_2^2)$. Позначимо через $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ і $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ вирази, отримані з $F^{(s)}(4n_1K+2n_2\omega_1)$ та $F_{s,t}(4n_1K+2n_2\omega_1)$ заміною $\wp(4K)$, $\mathrm{sn}(2\omega_1)$, $\wp'(4K)$, $\mathrm{sn}'(2\omega_1)$ на $\xi_1,\dots,\xi_4$. Розглянемо $F_{s,t,\,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ при $1\le n_1,n_2\le N$, $0\le t\le s\le S$ як N^2S лінійних форм від nL^2 змінних $C_{l_1,l_2,\tau}$. Застосувавши лему 4, виберемо не всі рівні нулю $C_{l_1,l_2,\tau}$ такими, що для $1\le n_1,n_2\le N$, $0\le t\le s\le S$

$$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)=0,\quad |\,C_{l_1,l_2,\tau}\,|<\exp(c_{11}\lambda^6\ln\lambda n^2T^3). \tag{11}$$

З (1), (2), (5), (11) отримаємо для $1\le n_1,n_2\le N$, $0\le s\le S$

$$|\,F^{(s)}(4n_1K+2n_2\omega_1)-F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)\,|<\exp(-\frac{1}{2}\lambda^7n^2T^3). \tag{12}$$

З (11), (12) при $1\le n_1,n_2\le N$, $0\le s\le S$ отримаємо

$$|\,F^{(s)}(4n_1K+2n_2\omega_1)\,|<\exp(-\frac{1}{2}\lambda^7n^2T^3). \tag{13}$$

Доведемо, що (13) виконується і для $1\le n_1,n_2\le N$, $0\le s\le\lambda S$.

Нехай

$$G(z) = F(z)\sigma_1^L(z)\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1-e_3}).$$

Виберемо найменше $r \in \mathbf{N}$ таке, що $r > 32N(|K| + |\omega_1|)$, $R = 12r$. Тоді з (2), (5), (6), (11) та леми 6 випливає

$$|G(z)|_{|z|\le R} < \exp(-\lambda^6 \ln\lambda n^2 T^3). \quad (14)$$

З (14) отримаємо для $0 \le s \le \lambda S$

$$|G^{(s)}(z)|_{|z|\le r} < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^6 \ln\lambda T^2 \ln T). \quad (15)$$

Для досить малого ε в ε-околах точок $4n_1K$ функція $\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1-e_3})$ та ε-околах точок $2n_2\omega_1$ функція $\sigma_1(z)$ не мають нулів, тому для $|n_1|,|n_2| \le 32N$ випливає

$$|\sigma_1(z)|_{z\in V(\varepsilon,4n_1K+2n_2\omega_1)} > \exp(-c_{12}\lambda^5 \ln\lambda n^2 T^3), \quad (16)$$

$$|\sigma_2((z+K)/\sqrt{e_1-e_3})|_{z\in V(\varepsilon,4n_1K+2n_2\omega_1)} > \exp(-c_{13}\lambda^5 \ln\lambda n^2 T^3). \quad (17)$$

З (14)-(17) для $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le \lambda S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)| < \exp(-\frac{1}{3}\lambda^6 \ln\lambda n^2 T^3). \quad (18)$$

Враховуючи (12), для $1 \le n_1, n_2 \le N$ та $0 \le s \le \lambda S$ з (18) випливає

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)| < \exp(-\frac{1}{4}\lambda^6 \ln\lambda n^2 T^3). \quad (19)$$

Розглядаючи $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$, $0 \le t \le s \le \lambda S$, $1 \le n_1, n_2 \le N$, як значення відповідного полінома в алгебричних точках, з леми 5 отримаємо для $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2) \ne 0$ оцінку

$$|F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)| > \exp(-\lambda^5 \ln\lambda n^2 T^3). \quad (20)$$

З (10), (20) отримаємо для $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le \lambda S$

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)| > \exp(-2\lambda^5 \ln\lambda n^2 T^3). \quad (21)$$

Оцінки (19) і (21) суперечливі, тому для $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le t \le s \le \lambda S$ $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2) = 0$. Тоді при $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le \lambda S$

$$F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2) = 0. \quad (22)$$

З (22) випливає, що поліном $F(z)$ має не менше $c_{14}\lambda^7 \ln\lambda n^2 T^2$ нулів (з врахуванням кратності), але згідно з лемою 9 нулів може бути не більше $c_{15}\lambda^6 \ln\lambda n^2 T^2$, тому для достатньо великого $\lambda \in \mathbf{N}$ припущення (4) приводить до протиріччя, яке й доводить теорему.

4. ВИСНОВКИ

Оцінку наближення, сформульовану в теоремі, можна використати, наприклад, для дослідження арифметичних властивостей еліптичних функцій Веєрштрасса та Якобі. Порядок оцінки відповідає порядку наближення алгебричними числами констант, пов'язаних з еліптичними функціями. Подібні оцінки для багатьох інших чисел такого виду можна знайти в [4]-[7].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bateman H.* Higher transcendental functions / H. Bateman, A. Erdelyi. − M.: Nauka, 1967. – Vol. 3. – 299 p. (in Russian).
2. *Chudnovsky G. V.* Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann / G. V. Chudnovsky // Weierschtrass theorem Inventiones Math. − 1980. − Vol. 61. − P. 267-290.
3. *Fel'dman N. I.* Hilbert's seventh problem / N. I. Fel'dman. − M.: Moskov. Gos. Univ., 1982. – 311 p. (in Russian).
4. *Fel'dman N. I.* Transcendental Numbers / N. I. Fel'dman, Yu. V. Nesterenko. − Berlin: Springer-Verlag, 1998. – 345 p.
5. *Lawden D. F.* Elliptic functions and applications / D. F. Lawden. − Springer-Verlag, Berlin, 1989. – 350 p.
6. *Masser D.* Elliptic functions and transcendence / D. Masser. − Berlin: Springer-Verlag, 1975. – 157 p.
7. *Nesterenko Yu. V.* On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function / Yu. V. Nesterenko // Izvestiya RAN: Ser. Mat. − 1995. − Vol. 59, No 4. − P. 155-178. (in Russian).
8. *Reyssat E.* Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp / E. Reyssat // Bull Soc. Math. France. − 1980. − Vol. 108. − P. 47-79.

Стаття: надійшла до редколегії 04.10.2013
доопрацьована 20.11.2013
прийнята до друку 04.12.2013

СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕЙЕРШТРАССА И ЯКОБИ

О. Мильо, Я. Холявка

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000,
e-mail: olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Пусть $\wp(z)$, $\operatorname{sn} z$ − алгебраически независимые эллиптичекие функции Вейерштрасса и Якоби с алгебраическими инвариантами и эллиптическим модулем, $(2\omega_1, 2\omega_3)$ и $(4K, 2iK')$ − пары основных периодов $\wp(z)$, $\operatorname{sn} z$. Получено оценку сометстного приближения значений $\wp(4K)$, $\operatorname{sn}(2\omega_1)$.

Ключевые слова: совместные приближения, эллиптичекая функция Вейерштрасса, эллиптичекая функция Якоби.

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF VALUES OF WEIERSTRASS AND JACOBI ELLIPTIC FUNCTIONS

O. Mylyo, Ya. Kholyavka

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000,
e-mail: olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Let $\wp(z)$, $\operatorname{sn} z$ be algebraically independent Weierstrass and Jacobi elliptic functions with algebraic invariants and modulus, $(2\omega_1, 2\omega_3)$ and $(4K, 2iK')$ be main periods $\wp(z)$, $\operatorname{sn} z$. We estimate from below the simultaneous approximation $\wp(4K)$, $\operatorname{sn}(2\omega_1)$.

Key words: simultaneous approximation, Weierstrass elliptic function, Jacobi elliptic function.