ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 22. С. 129–135
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 22. P. 129–135

І Н Ф О Р М А Т И К А

УДК 004.02+004.021+519.17

ЦИКЛІЧНИЙ МАКСИМАЛЬНИЙ ПРОСТИЙ ЛАНЦЮГ НЕПОВНОГО ГРАФА

В. Черняхівський

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: v_chrn@franko.lviv.ua

Розглянуто задачу побудови максимального простого ланцюга графа для випадку циклічного шляху. Опрацьовано задачу побудови ланцюга без обмежень, задачу доповнення графа для відшукання гамільтонового циклу, а також задачу з накладанням серединних умов на наявність або не наявність вершин у ланцюзі.

Ключові слова: граф, простий ланцюг, шлях, максимізація, цикл, серединна умова, властивість.

1. ВСТУП

Клас задач оптимізації та мінімізації на графах приводить до необхідності пошуку розв'язку відшукання мінімального ланцюга, який сполучає дві наперед задані вершини або групу вершин [1, 5, 6]. Подібні пошукові задачі на графах досліджені, зокрема, в працях зарубіжних видань [4-8]. Для практичних потреб часто виникає задача побудови не мінімального, а максимального ланцюга графа, щоб отримати якнайбільше покриття. У цьому разі початкова та кінцева вершина ланцюга мають збігатися з метою повернення в місце початку руху.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

На початку розглядаємо задачу на графі за двома умовами: 1) відшукати максимальний простий ланцюг між двома заданими вершинами V_a, V_b; 2) виконати аналіз лише таких ланцюгів, для яких $V_a=V_b$, щоб отримати замкнений ланцюг.

В [2] запропоновано базовий алгоритм відшукання максимального простого ланцюга неповного графа, який побудовано на підставі методу пошуку з поверненнями і як рекурсивний. Базовий алгоритм у первісному вигляді не накладає жодних умов щодо вершин, які би мали бути в шуканому ланцюзі.

Отже, заданий неорієнтований неповний граф $G=(V,E)$ з ребрами однакової ваги або незважений. Граф зв'язний, якщо незв'язний, то розглядаємо задачу лише для однієї окремої компоненти зв'язності. Побудувати простий ланцюг максимальної довжини, який сполучає дві задані вершини $V_a,V_b:(V_a,V_1,V_2,\ ...,V_k,V_b),\ k\to max$, де $V_i\neq V_j$ при $i\neq j$, крім V_a і V_b. При $V_a=V_b, k<n-1$ маємо циклічний простий ланцюг. При $V_a=V_b, k=n-1$ отримаємо гамільтоновий цикл. Крайові умови початку руху і закінчення руху для випадку кільцевого шляху збігаються $V_a=V_b$. Ребра визначають всі пари вершин $(V_k,V_m),\ (k,m)\in\{1,2,\ldots,n, n=|V|\}, k\neq m$, сполучених між собою безпосередньо. Рух між кожною визначеною парою сусідніх вершин двосторонній в обидвох напрямах:

$$(V_k,V_m)=(V_m,V_k),\quad d(V_k,V_m)=d(V_m,V_k)\,.$$

Граф не має петель (V_p, V_p), якщо такі є, то їх викреслюємо і в розв'язуванні задачі вони участі не беруть.

Використовуючи алгоритм [2], отримати як розв'язок замкнений максимальний простий ланцюг неповного графа для випадку відсутності будь-яких обмежень щодо включення вершин до ланцюга.

3. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ЗАМКНЕНОГО МАКСИМАЛЬНОГО ЛАНЦЮГА

Припустимо, що за алгоритмом [2] ми отримали деякий замкнений максимальний простий ланцюг $L_{max} = (V_a \to V_1 \to V_2 \to \dots \to V_k \to V_a)$, $k = max$, і ланцюг такої довжини є лише один.

Властивість 1. Якщо $L_{\max}$ є замкненим максимальним ланцюгом, то для неорієнтованого графа можна обрати за початкову вершину пошуку V_a будь-яку вершину знайденого ланцюга й отримати той самий ланцюг $L_{\max}$ за умови дотримання лексикографічного порядку перегляду інцидентних ребер у кожній вершині або іншого фіксованого порядку.

Доведення. Найпершою після V_a знайденою вершиною є V_1. За алгоритмом [2] переглянули всі інцидентні до V_a ребра і до кожного ребра виконана спроба побудувати простий ланцюг. Внаслідок повного перебору обрано ребро $V_a \to V_1$ як таке, що приводить до максимального ланцюга, а V_a і всі інцидентні до неї ребра з подальшого пошуку виключають. Після переходу до вершини V_1 алгоритм [2] працює аналогічно і знаходить $V_1 \to V_2$. Порядок перегляду інцидентних ребер у кожній вершині зафіксований алгоритмом як лексикографічний щодо номерів або кодів вершин.

Перенесемо стартову точку пошуку ланцюга до вершини V_1, а ребро $V_1 \to V_a$ перенесемо в кінець лексикографічного списку інцидентних ребер V_1. У підсумку на першому кроці буде знайдено ребро $V_1 \to V_2$, а подальший пошук продовжимо за шляхом, отриманим зі стартової точки V_a, і одержимо $(V_1 \to V_2 \to V_3 \to \dots \to V_k \to V_a \to V_1)$.

Якщо ж ребро $V_1 \to V_a$ залишити в своєму лексикографічному порядку інцидентних ребер V_1, тоді замість ребра $V_1 \to V_2$ на першому кроці можливий вибір ребра $V_1 \to V_a$ і будова ланцюга розвертається в обернений порядок $(V_1 \to V_a \to V_k \to V_{k-1} \to \dots \to V_2 \to V_1)$.

Отже, в обидвох випадках отримуємо у підсумку той самий ланцюг $L_{\max}$ з точністю до порядку побудови розв'язку, оскільки ланцюг замкнений, а граф неорієнтований.

Поступаючи аналогічно, перенесемо стартову точку пошуку ланцюга до вершини V_2, і знову отримаємо той самий результат. Перебираючи по черзі всі вершини $L_{\max}$ як стартові, дійдемо до доведення властивості 1.

Властивість 2. У замкненому ланцюзі не можуть бути вершини степеня 1 і всі вершини підграфа, який має міст до іншої частини графа, в межах якого знайдено замкнений ланцюг.

Доведення. Очевидно, що для циклічного обходу кожна вершина повинна мати степінь не менше 2, щоб була потенційна можливість продовжити ланцюг. Так само очевидно, якщо підграф зв'язаний з іншою частиною графа мостом, тобто одним ребром, то перехід з однієї частини графа через міст в іншу робить неможливим повернення назад і замикання циклу.

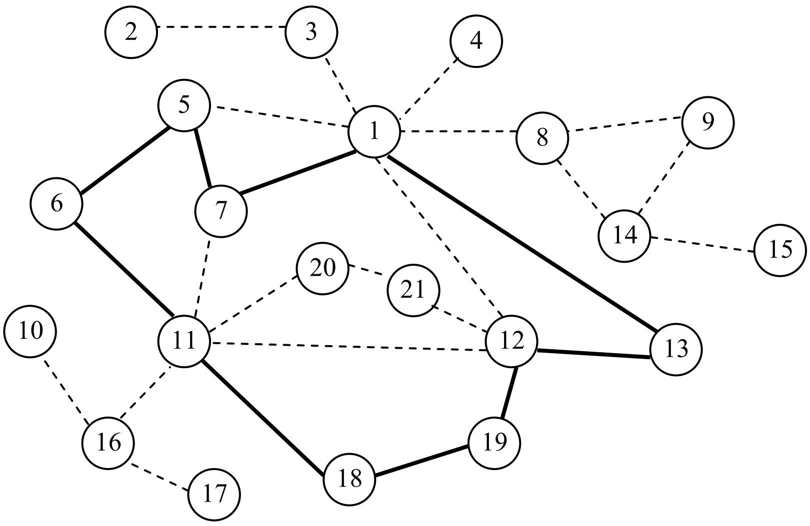

Рис. 1. Приклад замкненого ланцюга

Хоча властивість 2 є очевидною, проте вона має важливий практичний вплив на розширення графа і визначення серединних умов для інших варіантів замкненого ланцюга, викладених далі.

Для прикладу деякого графа на рис. 1 показано суцільною лінією обчислений замкнений максимальний ланцюг 1-7-5-6-11-18-19-12-13-1.

4. ДОПОВНЕННЯ ГРАФА ДЛЯ ВІДШУКАННЯ ГАМІЛЬТОНОВОГО ЦИКЛУ

Гамільтоновий цикл є граничним випадком замкненого максимального ланцюга. Пропонуємо такий спосіб утворення гамільтонового циклу, якщо він не існує від початку: 1) спочатку побудувати за алгоритмом [2] деякий замкнений максимальний простий ланцюг $L_{\max}$, можливо виконавши декілька обчислювальних експериментів з вибором V_a з вершин, які не потрапили до попередніх замкнених ланцюгів; 2) виконати покрокове доповнення графа для додавання до максимального шляху ще не включених вершин за таким алгоритмом H1.

Алгоритм H1.

1. З не включених до замкненого ланцюга вершин виокремити зв'язні частини графа (підграфи), сполучені мостом до побудованого ланцюга. Відсортувати їх в порядку зменшення кількості вершин. Для рис. 1 такими частинами є {8,9,14,15}, {10,16,17}, {2,3}.
2. З вершин, які залишились не включеними, виокремити зв'язні частини графа, сполучені більше, ніж одним ребром з вершинами побудованого ланцюга, і так само відсортувати в порядку зменшення кількості вершин. Для рис. 1 це {20,21}.
3. Зафіксувати не включені вершини степені 1. Для рис. 1 це {4}.
4. Для кожної частини графа п. 1 обчислити незалежно простий шлях максимальної довжини від вершини, сполученої мостом з побудованим замкненим ланцюгом, до іншої вершини цієї ж частини (не замкнений), яка допускає сполучення ребром з

першою вершиною без перетину з іншими ребрами (планарно). Отримаємо 8-9-14-15, 16-10, 2-3. Побудувати додаткові ребра, які сполучають границю або границі шляху з найближчим ребром замкненого ланцюга. Одержимо 15-13, 10-6, (2-6, 3-5). Обчислити заново за алгоритмом [2] новий замкнений максимальний простий ланцюг L_{max}. Отримаємо 1-7-5-3-2-6-10-16-11-18-19-12-13-15-14-9-8-1, довжина шляху 18.

5. Для кожної частини графа п. 2 обчислити незалежно простий шлях максимальної довжини між довільними двома вершинами, кожна з яких сполучена з вершиною того самого ребра побудованого замкненого ланцюга. Отримаємо 20-21. Побудувати додаткові ребра, які сполучають границі шляху з найближчим ребром замкненого ланцюга. Одержимо {20-7, 21-1}. Обчислити заново за алгоритмом [2] новий замкнений максимальний простий ланцюг L_{max}. Отримаємо 1-8-9-14-15-13-12-19-18-11-16-10-6-2-3-5-7-20-21-1, довжина шляху 20.
6. Для кожної вершини степеня 1, зафіксованої в п. 3, побудувати додаткове ребро до найближчої вершини так, щоб обидва ребра цієї вершини були паралельні ребру, вже включеному до замкненого ланцюга. Отримаємо 4-8. Обчислити заново за алгоритмом [2] новий замкнений максимальний простий ланцюг L_{max}. Отримаємо 1-4-8-9-14-15-13-12-19-18-11-16-10-6-2-3-5-7-20-21-1, довжина шляху 21.
7. Якщо залишились ще не включені вершини до замкненого ланцюга графа, повторити алгоритм H1. Будуємо ребро 17-11, одержуємо остаточний гамільтоновий цикл 1-4-8-9-14-15-13-12-19-18-11-17-16-10-6-2-3-5-7-20-21-1, довжина шляху 22.

На рис. 2 показані добудовані ребра подвійною лінією і відповідні кроки алгоритму.

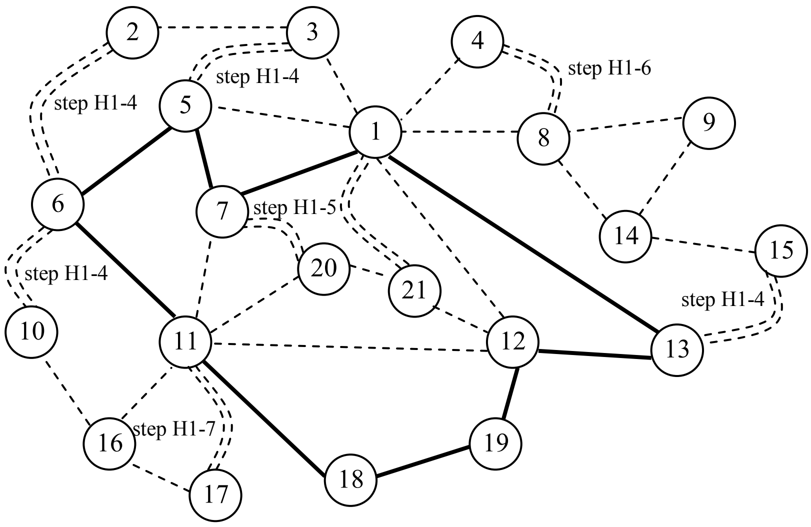

Рис. 2. Побудова додаткових ребер

Властивість 3. 1) Якщо початковий граф мав сумарну кількість Z зв'язних частин графа, визначених в кроках 1, 2 алгоритму H1, а кількість побудованих додаткових ребер була N, тоді число потенційно можливих додаткових ребер D можна в середньому оцінити як $N - Z \le D \le N + Z$. 2) Доповнений граф не погіршує своєї планарності. Якщо початковий граф G був планарним, то доповнений так само буде планарним, якщо ж початковий граф не був планарним і мав товщину T(G) – найменша кількість планарних підграфів з об'єднанням в G, тоді товщина не зростає.

Кожний підграф, визначений в кроках 1, 2, можна приєднати до циклу двома або одним ребром, тобто різниця становить *Z*. Вершини степеня 1 завжди приєднуємо одним ребром. Додаткові ребра є планарними стосовно побудованої частини циклу відповідно до алгоритму.

5. ПОБУДОВА МАЛОГО ЗАМКНЕНОГО ЛАНЦЮГА

Повертаючись до початкового формулювання задачі, ставимо за мету отримати як розв'язок замкнений простий ланцюг, але для випадку накладання обмежень щодо включення вершин до ланцюга. Такі обмеження на практиці часто стосуються розміру ланцюга або віддаленості вершин циклу від деякої "базової" вершини, наприклад, мале кільце транспортного руху має бути віддалене в кожному пункті від центра не більше, ніж на *N* кілометрів. Іншими словами, тепер виникає задача не розширення замкненого циклу, а його звуження чи перебудови.

Рис. 3. Приклад транспортної мережі

У праці [3] визначена узагальнена серединна умова задачі побудови простого ланцюга як вектор $Z = \{r_i(M)\}, i = 1, 2, ..., |M|$, де $M = \{V\} \setminus \{V_a, V_b\}$ – множина вершин, які не є граничними для шуканого ланцюга; $r_i(M)$ – предикат для кожної вершини номер *i* з допустимими значеннями $\{-1; 0; +1\}$. При $r_i = +1$ вершина *i* повинна бути включена до ланцюга *L*, при $r_i = -1$ не має бути в ланцюзі *L*, а при $r_i = 0$ наявність чи не наявність вершини в ланцюгу не визначено. Серединні умови введені як доповнення до алгоритму [2].

Для розв'язання задачі побудови малого замкненого ланцюга достатньо накласти на окремі вершини серединні умови типу $\left[-1;0\right]$ або $[\pm 1;0]$ і ще раз застосувати алгоритм [2] щодо початкового графа (рис.1). Наприклад, визначаємо $\left\{-V_6, -V_{13}, -V_{18}\right\}$, й отримуємо розв'язок 1-5-7-11-20-21-12-1 з довжиною шляху 8.

6. ПРИКЛАД ПЛАНУВАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ МЕРЕЖІ

Задачу планування кільцевих маршрутів транспортного руху демонструємо на прикладі Тернопільської області. На рис. 3 штриховою одинарною лінією показана схема шляхів, які відповідають певним критеріям. Для такої схеми обчислюємо за алгоритмом [2] замкнений максимальний простий ланцюг для $V_a = V_b = 1$. Отримуємо шлях довжиною 17: 1-11-12-10-7-8-6-4-3-2-23-22-21-19-18-17-1.

Для обчислення малого замкненого ланцюга накладаємо серединну умову типу $\left[-1;0\right]$ для окремих географічно віддалених вершин, наприклад, таку: $\{-V_{12}, -V_4, -V_{22}\}$. У підсумку отримаємо розв'язок 1-11-7-3-2-23-19-18-17-1 з довжиною шляху 10.

Для відшукання гамільтонового циклу застосовуємо алгоритм H1. Добудовані ребра показані подвійною пунктирною лінією. Гамільтоновий цикл буде 1-11-13-16-14-15-12-10-7-8-9-6-5-4-27-26-25-3-2-23-24-22-21-19-20-18-17-1.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нікольський Ю. В.* Дискретна математика: підручник / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина; за заг. ред. М. З. Згуровського. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
2. *Черняхівський В. В.* Рекурсивний алгоритм побудови максимального простого ланцюга неповного графа / В.В.Черняхівський // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 13. – С. 45-50.
3. *Черняхівський В.* Серединні умови задач побудови максимальних простих ланцюгів неповного графа / В. Черняхівський // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 204-209.
4. *Fomin F. V.* Graph searching, elimination trees, and a generalization of bandwidth / F. V. Fomin, P. Heggernes, J. A. Telle // Lecture Notes in Computer Science. – 2003. – Vol. 2751. – P. 73-85.
5. *Hvalica D.* Searching for a minimal solution subgraph in explicit and/or graphs / D. Hvalica // Discrete Applied Mathematics Science. – 2001. – Vol. 110, No 2-3. – P. 213-225.
6. *Korf R.* Best-first minimax search / R. Korf, D. Chickering // Artif. Intell. 84. – 1996. – Vol. 1-2 (July). – P. 299-337.
7. *Korf R. E.* Frontier Search / R. E. Korf, W. Zhang, I. Thayer, H. Hohwald // Journal of the ACM. – 2005. – Vol. 52, No 5. – P. 715-748.

8. *Recuero A*. Algorithms for path searching and for graph connectivity analysis / A. Recuero // Advances in Engineering Software Science. – 1995. – Vol. 23, No 1. – P. 27-35.

Стаття: надійшла до редколегії 12.02.2014
доопрацьована 19.03.2014
прийнята до друку 09.04.2014

ЦИКЛИЧЕСКАЯ МАКСИМАЛЬНАЯ ПРОСТАЯ ЦЕПЬ НЕПОЛНОГО ГРАФА

В. Черняховский

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: v_chrn@franko.lviv.ua

Рассматривается задача построения максимальной простой цепи графа для случая пути циклического вида. Рассматривают задачу построения цепи без ограничений, задачу дополнения графа для отыскания гамильтонового цикла, а также задачу наложения серединных условий относительно присутствия или отсутствия вершин в цепи.

Ключевые слова: граф, простая цепь, путь, максимизация, цикл, серединное условие, свойство.

THE CYCLIC MAXIMAL SIMPLE CHAIN OF AN INCOMPLETE GRAPH

V. Chernyakhivskij

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: v_chrn@franko.lviv.ua

The problem of construction of the maximal simple chain of a graph is considered in the case of circular path. Such problems are considered: to construct the chain without any limitation on its structure, to construct an extended graph for the purpose of to find the hamilton cycle, as well as to solve the task with the imposition of the middle conditions for the presence or absence of vertices in the chain.

Key words: graph, simple chain, path, maximization, cycle, mid condition, property.