

ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНИХ ПІДХОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ РУСЛОВОГО СТОКУ У КІНЕМАТИЧНОМУ НАБЛИЖЕННІ

П. Венгерський, Я. Коковська, В. Трушевський

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: petro.venhersky@lnu.edu.ua

Продемонстровано, як з загальних рівнянь руслового стоку води у гідродинамічному формулюванні, отримано рівняння руслового стоку води в кінематичному наближенні. Побудовано варіаційне формулювання задачі руслового стоку для знаходження невідомих значень площі поперечного перерізу руслових потоків у довільний момент часу. Розроблено чисельну схему розв'язування варіаційної задачі з використанням методу скінченних елементів (МСЕ) та однокрокових рекурентних схем інтегрування в часі. Доведено стійкість і аналіз збіжності побудованих чисельних схем за допомогою аналізу відповідних енергетичних норм.

Під час розв'язання класичної задачі про кінематичну хвилю отриманий розв'язок починає осцилювати на поверхнях з нерівномірним рельєфом дна русла. Для позбавлення цього ефекту в рівняння кінематичної хвилі введено доданок з другою похідною і числом Рейнольдса. Обґрунтовано його вигляд для такого типу хвильових процесів.

Розглянуто альтернативний підхід до розв'язування задачі руслового стоку води, що ґрунтується на реалізації проекційно-сіткової схеми методу скінченних елементів на рекурентній штучній нейронній мережі (ШНМ). Досліджено ефективність застосування для цієї задачі нейронної мережі на основі радіальних базисних функцій (РБФ). Побудовано РБФ мережу на підставі мультікватратичних базисних функцій. Навчання мережі полягає у мінімізації отриманого функціоналу похибки. Розглянуто різні методики навчання нейронної мережі та наведено рекомендації щодо вибору найкращої з них. Проведено порівняльний аналіз чисельних результатів з методом скінченних елементів та аналітичним розв'язком. РБФ-мережа дає змогу отримати краще наближення точного розв'язку, ніж МСЕ, де кількість елементів значно перевищує кількість нейронів мережі. Цей підхід можна ефективно застосовувати і до розв'язування нелінійних задач руслового стоку води.

Ключові слова: початково-крайова задача, русловий стік, кінематична хвиля, метод скінченних елементів, нейронна мережа, радіально-базисні функції, мультікватрик, функціонал похибки.

1. ВСТУП

Найважливіша проблема для практичного застосування результатів гідродинаміки – задача швидкої видачі точних прогнозів гідрологічної ситуації на досліджуваній ділянці руслового потоку. Саме для цього треба мати певну математичну модель річкового стоку, яка б досить точно моделювала процеси, які відбуваються в річці протягом заданого проміжку часу. Адже швидка видача результатів моделювання річкового потоку є актуальною задачею для аварійних служб у екстремальних ситуаціях. Велика кількість чинників, які впливають на процеси, що відбуваються в річці, ускладнювала побудову моделі річки з необхідними параметрами й отримання детальної інформації про просторовий розподіл хоча б основних характеристик водозбору, що впливають на надходження води на водозбір, її інфільтрацію та стікання. Деякі з характеристик водозбору (наприклад, шорсткуватість і коефіцієнт фільтрації) взагалі є статичними за змістом. Детермінуючі складові є домінуючими. Це дає змогу розглядати формування

руслового стоку як задачу математичної фізики і застосовувати для опису елементарних процесів методи, які засновані на детермінованому фізичному аналізі.

Отримання аналітичних розв'язків задач руслового стоку в багатьох практично важливих випадках неможливі. Тому для розв'язання таких задач широко використовують чисельні методи [1-3], які зазвичай потребують великої кількості обчислювальних ресурсів. У більшості випадків після редукції диференціальної задачі до дискретної отримують системи лінійних алгебричних рівнянь великої розмірності. Для пошуку їхнього розв'язку найчастіше застосовують ітераційні методи, які припускають послідовну, а не паралельну обробку даних. У цьому разі для прискорення обчислювального процесу потрібно збільшувати продуктивність процесора. Проте екстенсивний шлях розвитку обчислювальної техніки, пов'язаний із збільшенням тактової частоти процесора, останнього часу вичерпує себе. З огляду на цю обставину набувають поширення багатоядерні процесори, які дають змогу в повному обсязі використовувати паралельні обчислення. Отже, оптимальне використання наявних ресурсів можливе лише за максимального розпаралелювання процесів обчислень, що в багатьох випадках ефективно досягається завдяки використанню нейронних мереж.

На цей час можна виокремити три головні напрями застосування нейронних мереж до розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних: мережа на основі радіальних базисних функцій (РБФ-мережа) [5, 6], багатосаровий пересептрон [7, 8], клітинкові мережі [5].

Мета нашої праці – дослідити ефективність застосування РБФ-мережі до задач стоку мілкої води у кінематичному наближенні [1, 2].

2. ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА РУСЛОВОГО СТОКУ В КІНЕМАТИЧНОМУ НАБЛИЖЕННІ

Систему рівнянь [1-3, 9], що описує русловий стік можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(UF)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} &= 0; \\ \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{g} U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{U^2}{C^2 R} &= i. \end{aligned} \quad (1)$$

Перейдемо до таких безрозмірних величин: $\tilde{u} = \frac{U}{u_0}$, $\tilde{f} = \frac{F}{f_0}$, $\chi = \frac{x}{L_0}$, $\tau = \frac{t u_0}{L_0}$, де u_0 , f_0 , L_0 – характерні значення, відповідно, швидкості потоку, площі та довжини русла. Врахуємо також формулу Шезі $U_{cp} = C \sqrt{i R}$, внаслідок чого доданок $\frac{U^2}{C^2 R} = i$.

Система рівнянь (1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\tilde{u} \tilde{f})}{\partial \chi} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} &= 0; \\ \frac{1}{g} \frac{(u_0)^2}{L_0} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{g} \frac{(u_0)^2}{L_0} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \chi} \right) + \frac{1}{B_0} \frac{f_0}{L_0} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \chi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

У другому рівнянні системи (2) з'явився безрозмірний критерій $Fr = \frac{(u_0)^2}{g L_0}$ – число Фруда [9]. Внаслідок введення характерних величин порядок системи визначається коефіцієнтами у кожному доданку. Тоді будемо вважати, що переміщення водних мас відбувається в умовах рівноваги сил опору та сили тяжіння. Внаслідок цього друге рівняння системи (2) перетворилося на тотожність, а з першого рівняння системи (2) отримали рівняння стоку води у вигляді

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{3}{2} C \sqrt{iF} \frac{\partial F}{\partial x} = Bw. \quad (3)$$

Для регуляризації розв'язку в рівняння (3) введемо доданок з другою похідною по площі поперечного перерізу потоку [2], у підсумку отримаємо

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{3}{2} C \sqrt{iF} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = Bw, \quad (4)$$

де $F = F(x, t)$ – площа поперечного перерізу; $B = b(x, y) - a(x, y) = const$ – ширина русла; w – бічний притік; Re – число Рейнольдса; i – нахил лінії середнього дна.

Доповнимо рівняння (4) такими початковими та крайовими умовами:

$$\begin{aligned} F_{t=0} &= F_0, \\ \left(-\beta \frac{\partial F}{\partial x} + (1 - \beta)F \right) \Big|_{x=0} &= 0, \\ \left(\gamma \frac{\partial F}{\partial x} + (1 - \gamma)F \right) \Big|_{x=L} &= 0, \quad \gamma, \beta > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Регуляризована задача руслового стоку води в кінематичному наближенні набула вигляду (4) з початковою умовою та крайовими умовами (5).

3. ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА РУСЛОВОГО СТОКУ У КІНЕМАТИЧНОМУ НАБЛИЖЕННІ

Для побудови варіаційного формулювання для задачі (4)-(5) введемо простір допустимих функцій $V = \{ \varphi \in H^1((0, L)) \}$ і домножимо рівняння (4) на довільну функцію φ , результат проінтегруємо по області Ω , матимемо

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \varphi dx + \int_{\Omega} \frac{3}{2} C \sqrt{if} \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dx - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \varphi dx = \int_{\Omega} Bw \varphi dx. \quad (6)$$

Проведемо інтегрування частинами для третього доданка лівої частини, а також, врахувавши крайові умови, отримаємо

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \varphi dx + \int_{\Omega} \frac{3}{2} C \sqrt{if} \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dx + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \varphi \right) \Big|_0^L = \int_{\Omega} Bw \varphi dx. \quad (7)$$

Ввівши такі позначення для білінійних форм:

$$\begin{aligned} a(f, \varphi) &= \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad b(\tilde{f}; f, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{3}{2} C \sqrt{if} \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dx, \\ c(f, \varphi) &= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx, \quad \forall f, \varphi \in V \end{aligned} \quad (8)$$

та лінійного функціонала

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{\Omega} B w \varphi dx - \frac{1-\gamma}{\gamma} f \varphi \Big|_{x=L} + \frac{1-\beta}{\beta} f \varphi \Big|_{x=0} \quad \forall \varphi \in V \quad (9)$$

отримали варіаційне формулювання задачі (4)-(5)

$$\begin{cases} \text{задано } l \in L^2(0, T; V'), f_0 \in V; \\ \text{знайти } f \in L^2(0, T; V) \text{ таку, що} \\ a(f'(t), \varphi) + b(f(t); f(t), \varphi) + \frac{1}{\text{Re}} c(f(t), \varphi) = \langle l(t), \varphi \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ a(f(0) - f_0, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V. \end{cases} \quad (10)$$

Побудовано варіаційне формулювання задачі руслового стоку рідини в кінематичному наближенні (10), яке дає змогу знаходити значення площі поперечного перерізу потоку в довільний момент.

4. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ РУСЛОВОГО СТОКУ В ЧАСІ

Розіб'ємо відрізок часу $[0, T]$ на $N_T + 1$ однакові частини $[t_k, t_{k+1}]$ довжиною $\Delta t = t_{k+1} - t_k, k=0, \dots, N_T$. Площу поперечного перерізу потоку апроксимуємо таким поліномом:

$$f_{\Delta t}(x, t) = f^k(x)(1 - \omega(t)) + f^{k+1}(x)\omega(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (11)$$

де $\omega(t) = \frac{t - t_k}{\Delta t}, t \in [t_k, t_{k+1}], f^k \in V$ – відома площа у момент часу $t_k; f^{k+1} \in V$ – невідома

площа у момент часу t_{k+1} .

Для функціонала $l(t)$ з (10) будемо використовувати апроксимацію вигляду

$$l_{\Delta t}(t) = l_{k+\frac{1}{2}} = l(t_k + \Delta t/2) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (12)$$

Введемо швидкість зміни площі в часі

$$F^{k+\frac{1}{2}} = \frac{f^{k+1} - f^k}{\Delta t}, F^{k+\frac{1}{2}} \in V.$$

Тоді вираз (11) запишемо так:

$$f_{\Delta t}(x, t) = f^k(x) + F^{k+\frac{1}{2}}(x) \Delta t \omega(t) = f^k(x) + (t - t_k) F^{k+\frac{1}{2}}(x), \quad \forall x \in [0, L], \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (13)$$

Підставивши (13) у варіаційну задачу (10) та використавши для другого доданка лівої частини розклад у ряд Тейлора

$$\left(f^k + F^{k+\frac{1}{2}} \Delta t \omega \right)^{\frac{3}{2}} = (f^k)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} (f^k)^{\frac{3}{2}-1} F^{k+\frac{1}{2}} \Delta t \omega + O(\Delta t^2),$$

отримали
$$a(f', \varphi) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{\partial (f^k(x) + F^{k+\frac{1}{2}}(x) \omega(t) \Delta t)}{\partial t} \varphi dx = \int_{\Omega} F^{k+\frac{1}{2}}(x) \varphi dx;$$

$$\begin{aligned}
 c(f, \varphi) &= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial(f^k(x) + F^{k+\frac{1}{2}}(x)\omega(t)\Delta t)}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial f^k(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \\
 &+ \omega(t)\Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial F^{k+\frac{1}{2}}(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx; \\
 b(f, f, \varphi) &= \int_{\Omega} \frac{3}{2} C \sqrt{i} \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dx = \int_{\Omega} C \sqrt{i} \frac{\partial f^{\frac{3}{2}}}{\partial x} \varphi dx = \int_{\Omega} C \sqrt{i} \frac{\partial(f^k(x) + F^{k+\frac{1}{2}}(x)\omega(t)\Delta t)^{\frac{3}{2}}}{\partial x} \varphi dx = \\
 &= \int_{\Omega} C \sqrt{i} \frac{\partial(f^k(x))^{\frac{3}{2}}}{\partial x} \varphi dx + \omega(t)\Delta t \int_{\Omega} \frac{3}{2} C \sqrt{i} \frac{\partial(f^k)^{\frac{1}{2}} F^{k+\frac{1}{2}}(x)}{\partial x} \varphi dx = \int_{\Omega} C \sqrt{i} \frac{\partial(f^k(x))^{\frac{3}{2}}}{\partial x} \varphi dx + \\
 &+ \omega(t)\Delta t \int_{\Omega} \frac{3}{2} C \sqrt{i} (f^k)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial F^{k+\frac{1}{2}}(x)}{\partial x} \varphi dx + \omega(t)\Delta t \int_{\Omega} \frac{3}{2} C \sqrt{i} F^{k+\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial(f^k)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} \varphi dx + O(\Delta t^2) = \\
 &= \int_{\Omega} \frac{3}{2} C \sqrt{i f^k(x)} \frac{\partial f^k(x)}{\partial x} \varphi dx + \omega(t)\Delta t \int_{\Omega} \frac{3}{2} C \sqrt{i f^k(x)} \frac{\partial F^{k+\frac{1}{2}}(x)}{\partial x} \varphi dx + \\
 &+ \omega(t)\Delta t \int_{\Omega} \frac{3}{4} C \sqrt{\frac{i}{f^k(x)}} F^{k+\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial f^k(x)}{\partial x} \varphi dx + O(\Delta t^2);
 \end{aligned}$$

Введемо таку формулу

$$d(v; f, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{3}{4} C \sqrt{i} v \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dx.$$

Тоді, нехтуючи членами порядку $O(\Delta t^2)$, отримали лінеаризовану задачу

$$\begin{aligned}
 &a\left(F^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) + \Delta t \omega(t) \left[b\left(f^k; F^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) + d\left(\frac{F^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{f^k}}; f^k, \varphi\right) + \frac{1}{\text{Re}} c\left(F^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) \right] = \\
 &= \left\langle l_{k+\frac{1}{2}}, \varphi \right\rangle - \frac{1}{\text{Re}} c(f^k, \varphi) - b(f^k; f^k, \varphi).
 \end{aligned} \tag{14}$$

для знаходження невідомої площі поперечного перерізу потоку $F^{k+\frac{1}{2}}$.

5. ПРОЕКЦІЙНІ РІВНЯННЯ

У просторі $L^2(t_k, t_{k+1})$ виберемо функцію $\xi(t)$ таку, що

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \xi(\tau) d\tau \neq 0,$$

та будемо вимагати, щоб нев'язка підстановка апроксимацій (11), (12) у варіаційне рівняння (14) була ортогональна до функції $\xi(t)$ стосовно скалярного добутку на проміжку (t_k, t_{k+1}) , тоді задача (14) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
 & a\left(F^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) + \Delta t \theta \left[b\left(f^k; F^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) + d\left(\frac{F^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{f^k}}; f^k, \varphi\right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} c\left(F^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) \right] = \\
 & = \left\langle l_{k+\frac{1}{2}}, \varphi \right\rangle - \frac{1}{\operatorname{Re}} c\left(f^k, \varphi\right) - b\left(f^k; f^k, \varphi\right) \quad \forall \varphi \in V, k = 0, \dots, N_T,
 \end{aligned} \tag{15}$$

де коефіцієнт рекурентної схеми θ визначений за формулою

$$\theta = \frac{\left(\int_k^{t_{k+1}} \omega(t) \xi(t) dt \right)}{\left(\int_k^{t_{k+1}} \xi(t) dt \right)}. \tag{16}$$

Отримане рівняння дає змогу визначити невідому зміну швидкості площі в часі $F^{k+\frac{1}{2}}$ на проміжку $[t_k, t_{k+1}]$.

6. РЕКУРЕНТНА СХЕМА

Побудуємо рекурентну схему для відшукування невідомої площі у момент часу t_{k+1} .

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{задано: } f^0 = f_0; \\
 \text{знайти: } F^{k+\frac{1}{2}} \in V; \\
 a\left(F^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) + \Delta t \theta \left[b\left(f^k; F^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) + d\left(\frac{F^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{f^k}}; f^k, \varphi\right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} c\left(F^{k+\frac{1}{2}}, \varphi\right) \right] = \\
 = \left\langle l_{k+\frac{1}{2}}, \varphi \right\rangle - b\left(f^k; f^k, \varphi\right) - \frac{1}{\operatorname{Re}} c\left(f^k, \varphi\right) \\
 f^{k+1} = f^k + \Delta t F^{k+\frac{1}{2}}, \quad k = 0, \dots, N_T.
 \end{array} \right. \tag{17}$$

Отримана схема дає змогу обчислити значення площі у довільний момент часу, якщо задана глибина у початковий момент часу.

7. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ ЗА ПРОСТОРОВОЮ ЗМІННОЮ

Використаємо схему Гальоркіна для дискретизації задачі за просторовою змінною. Виберемо послідовність скінченновимірних просторів апроксимацій V_h з простору V . Тоді f_h напівдискретна апроксимація f . Виберемо базисні функції простору V у вигляді кусково-лінійних поліномів.

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & x_0 \leq x < x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x < x_i \\ -\frac{x + x_{i+1}}{h}, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} \leq x \leq x_N \end{cases}, \text{ де } i = \overline{1, N}.$$

Будемо невідому функцію f_h апроксимувати розкладом за базисними функціями та невідомими коефіцієнтами

$$f_h^k = \sum_{i=0}^N f_i^k \varphi_i(x).$$

Тепер задача (17) набула вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \left\{ a(\varphi_i, \varphi_j) + \Delta t \theta \left(b(f^k; \varphi_i, \varphi_j) + d(f^k; \varphi_i, \varphi_j) + \frac{1}{\text{Re}} c(\varphi_i, \varphi_j) \right) \right\} F_i^{k+\frac{1}{2}} = \\ = \left\langle l_{k+\frac{1}{2}}, \varphi_j \right\rangle - \sum_{i=0}^N \left\{ b(f^k; \varphi_i, \varphi_j) + \frac{1}{\text{Re}} c(\varphi_i, \varphi_j) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Розкладемо праву частину за базисними функціями

$$\left\langle l_{k+\frac{1}{2}}, \varphi_n \right\rangle = \sum_{i=0}^N l_i^{k+\frac{1}{2}} a(\varphi_i, \varphi_j).$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} A = \{a_{ij}\} = \{a(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N, \quad B(f_h^k) = \{b_{ij}\} = \{b(f_h^k; \varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N, \\ D(f_h^k) = \{d_{ij}\} = \{d(f_h^k; \varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N, \quad C = \{c_{ij}\} = \{c(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N, \\ L_{k+\frac{1}{2}} = \{l_i\} = \left\{ l_i^{k+\frac{1}{2}} \right\}, \text{ де } i, j = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

Тоді запишемо задачу (18) у матричному вигляді

$$\left[A + \Delta t \theta B(f^k) + \Delta t \theta D(f^k) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta t \theta C \right] F^{k+\frac{1}{2}} = A L_{k+\frac{1}{2}} - B(f^k) - \frac{1}{\text{Re}} C. \quad (19)$$

Отже, ми отримали систему лінійних рівнянь (19) руслового стоку рідини у кінематичному наближенні для знаходження невідомої площі поперечного перерізу потоку $F^{k+\frac{1}{2}}$ у кожен момент часу t .

8. НЕЙРОМЕРЕЖЕВИЙ ПІДХІД НА ОСНОВІ РБФ

Нейронна мережа на основі РБФ є універсальним апроксиматором функцій [5–8], її можна застосовувати до розв'язування початково-крайових задач математичної фізики. В загальному випадку початково-крайову задачу можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} L(u) = f, \quad u = u(x, t), \quad (t, x) \in \Omega \subset R^n; \\ B_i(u)|_{\Gamma_i} = b_i, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \partial\Omega = \Gamma = \bigcup_i \Gamma_i, \end{aligned} \quad (20)$$

де n – розмірність простору задачі; L та B_i – диференційні оператори.

Розв'язок задачі (20) шукається у вигляді

$$u(x) = \sum_{i=1}^m w_i \phi_i(x) . \tag{21}$$

Тут ϕ_i – радіальні базисні функції; w_i – вагові коефіцієнти мережі.

Схематично структуру нейронної мережі на основі РБФ зображено на рис. 1.

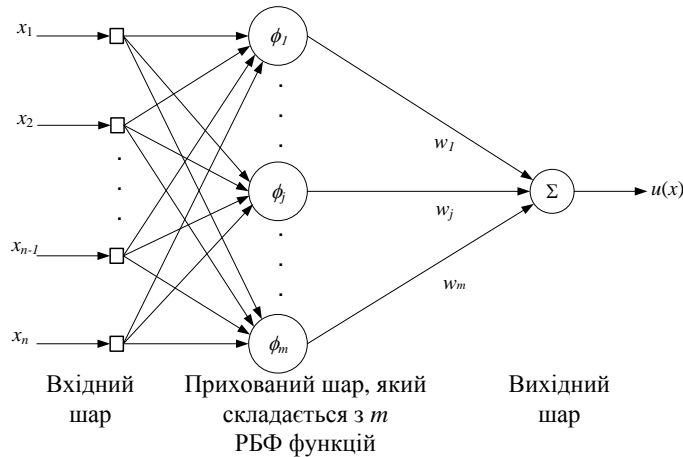


Рис. 1. Структура нейронної мережі на основі РБФ

Кожен i -й нейрон радіально-базисної мережі виконує нелінійне перетворення, яке характеризується параметрами c_i – центром та a_i – шириною. Для створення мережі можна використовувати РБФ різних виглядів. Найчастіше використовують мультиквадрик (multiquadric)

$$\phi_i(x) = \sqrt{(x - c_i)^2 + a_i^2} , \tag{22}$$

і Гаусіан (Gaussian)

$$\phi_i(x) = \exp\left(-\frac{(x - c_i)^2}{a_i^2}\right) . \tag{23}$$

На вхід мережі подаються координати точок області $\{x_i\}_{i=1}^n$ (точки колокації), де n – розмірність простору. На виході отримуємо значення шуканої функції в точці x (23). Навчання мережі зводиться до знаходження невідомих параметрів w_i , c_i , та a_i за рахунок мінімізації функціонала похибки

$$E(u) = \int_{\Omega} |L(u) - g|^2 d\Omega + \sum_i \int_{\Gamma_i} \delta_i |B_i(u) - f_i|^2 d\Gamma , \tag{24}$$

де $\delta_i > 0$ – штрафні множники, які відповідають за виконання крайових умов на відповідних частинах границі. У процесі навчання нейронної мережі використовується дискретний аналог функціонала похибки (24)

$$E(w, c, a) = \sum_{j=1}^M |L(u) - g|^2(x^j) + \sum_{i=1}^l \delta_i \cdot \sum_{j=1}^{M_i} |u - f_i|^2(x^j) . \tag{25}$$

Тут $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$; $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $\{x^j\}_{j=1}^M \in \Omega$, $\{x^{j_i}\}_{j_i=1}^{M_i} \in \tilde{A}_i$. – деякі фіксовані дискретні точки, які подаються на вхід нейронній мережі.

Для навчання мережі використовують градієнтний алгоритм [6] мінімізації функціонала E (25) шляхом налаштування ваг w_i , центрів c_i та ширин a_i

$$\begin{aligned} w_i^k &= w_i^{k-1} - \eta \frac{\partial E(c_i^{k-1}, a_i^{k-1}, w_i^{k-1})}{\partial w_i^{k-1}} \\ c_i^k &= c_i^{k-1} - \beta \frac{\partial E(c_i^{k-1}, a_i^{k-1}, w_i^k)}{\partial c_i^{k-1}} \\ a_i^k &= a_i^{k-1} - \alpha \frac{\partial E(c_i^k, a_i^{k-1}, w_i^k)}{\partial a_i^{k-1}}, \end{aligned} \quad (26)$$

де η, β, α – коефіцієнти швидкості навчання.

Процес налаштування параметрів відбувається до досягнення певної точності ε ($E \leq \varepsilon$). Застосуємо розглянуту методику до розв'язування початково-крайової задачі (20) – (21).

9. ЗАСТОСУВАННЯ

До розв'язування початково-крайової задачі застосуємо РБФ-мережу з мультикватричними базисними функціями (24). На вхід мережі подають координати точок області (точки колокації), $X = (t, x)$. Радіально базисна функція кожного нейрона характеризується своїми параметрами: центром $c_i = (c_i^t, c_i^x)$ і шириною $a_i > 0$, які уточнюються у процесі навчання. Кожен нейрон виконує нелінійне перетворення $\phi_i = (r_i^2 + a_i^2)^{1/2}$, аргументом якого є відстань від точки (t, x) до відповідного центру c^i : $r_i^2(t, x) = (t - c_i^t)^2 + (x - c_i^x)^2$. На виході нейронної мережі отримуємо значення шуканої функції в точці x

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^m w_i \phi_i(t, x).$$

Задача мережі зводиться до мінімізації функціонала похибки (25), використовуючи градієнтний алгоритм (26) для відшукування невідомих параметрів w_i, a_i, c_i .

Під час пошуку розв'язку актуальним залишається питання розміщення центрів РБФ. Для регулярної області зручно розміщувати центри у вузлах сітки або розставляти випадково. Один із варіантів – зосередження основної кількості нейронів на границі області, деякої кількості всередині та зовні області. Варіант корегування розміщення центрів нейронів у процесі навчання мережі дає кращі результати. Питання кількості нейронів можна вирішувати експериментально або виконувати поступове збільшення їхньої кількості, додаючи новий нейрон у ту точку області, компонента функціонала похибки якої найбільша. Нові нейрони можуть додаватись й у тому випадку, коли загальне значення функціонала похибки не зменшується за рахунок корегування значень параметрів. Потрібно зазначити про брак математичної теорії, яка забезпечує вибір типу РБФ у разі додавання нового нейрона. Ініціалізація початкових значень параметрів мережі c_i, a_i та w_i виконується невеликими величинами. Не існує єдиного правила для присвоєння початкових значень цим

змінним, здебільшого це потребує експериментальних досліджень для конкретної моделі. Проте практика свідчить, що найкраще ці значення встановлювати від 10^{-4} до 10^{-2} . Під час процесу навчання можна змінювати навчальну вибірку через певну визначену кількість ітерацій. Такий підхід дає змогу отримати розв’язок незалежний від вхідних даних та уникнути “злипання” центрів радіально-базисних функцій. Навчання мережі продовжується доти, доки значення функціонала не буде меншим за певну точність.

Для спрощення запису функціонала похибки введемо такі позначення:

$$E_{\Omega} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - R + I \right\}^2 (t_i, x_i) = \sum_{i=1}^n E_{\Omega}^{(i)^2},$$

де $(t_i, x_i) \in \Omega = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$;

$$E_{\Gamma_t} = \sum_{i=1}^{n_t} \{h - h_0\}^2(0, x_i) = \sum_{i=1}^{n_t} E_{\Gamma_t}^{(i)^2},$$

де $(t_i, x_i) \in \tilde{A}_t = \{(t, x) | t = 0, 0 < x < L\}$;

$$E_0 = \sum_{i=1}^{n_0} \left\{ -\beta \frac{\partial h}{\partial x} + (1 - \beta)h \right\}^2 (t_i, 0) = \sum_{i=1}^{n_0} E_0^{(i)^2},$$

де $(t_i, x_i) \in \Gamma_0 = \{(t, x) | 0 < t \leq T, x = 0\}$;

$$E_L = \sum_{i=1}^{n_L} \left\{ \gamma \frac{\partial h}{\partial x} + (1 - \gamma)h \right\}^2 (t_i, L) = \sum_{i=1}^{n_L} E_L^{(i)^2},$$

де $(t_i, x_i) \in \Gamma_L = \{(t, x) | 0 < t \leq T, x = L\}$. Тоді функціонал похибки набуде вигляду

$$E = E_{\Omega} + E_{\Gamma_t} + E_0 + E_L. \quad (27)$$

Для завершення обчислення виразу (27) скористаємось розкладом наближеного розв’язку за радіальними базисними функціями (23) й обчислимо такі похідні:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{i=1}^m w_i (t - c_i^t) [r_i^2 + a_i^2]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^m w_i (t - c_i^t) \left[(t - c_i^t)^2 + (x - c_i^x)^2 + a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sum_{i=1}^m w_i (x - c_i^x) [r_i^2 + a_i^2]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^m w_i (x - c_i^x) \left[(t - c_i^t)^2 + (x - c_i^x)^2 + a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^m w_i (r_i^2 + a_i^2 - (x - c_i^x)^2) [r_i^2 + a_i^2]^{\frac{3}{2}} = \sum_{i=1}^m w_i (t - c_i^t) \left[(t - c_i^t)^2 + (x - c_i^x)^2 + a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Навчання нейронної мережі зводиться до мінімізації функціонала похибки (27), використовуючи градієнтний алгоритм навчання (26).

10. ТЕСТОВІ ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розглянемо тестовий приклад з відомим аналітичним розв’язком. Для задачі (1)-(2) з [1], виберемо такі параметри:

$$\alpha = 0.1, m = 1, L = 1, Re = 50,$$

$$R - I = (x - x^2) - 0.1 \cdot (1 - 2x)t - 2t/50$$

$$h|_{x=0} = h|_{x=L} = 0, \forall t \in [0, 0.15],$$

$$h|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq 1.$$

Задача має такий аналітичний розв'язок:

$$h = (x - x^2) \cdot t.$$

Графічне зображення точного й аналітичного розв'язків у момент часу $t = 0.2$ зображено на рис. 2. У табл. 1 наведено чисельні результати точного та наближеного розв'язків і абсолютна похибка.

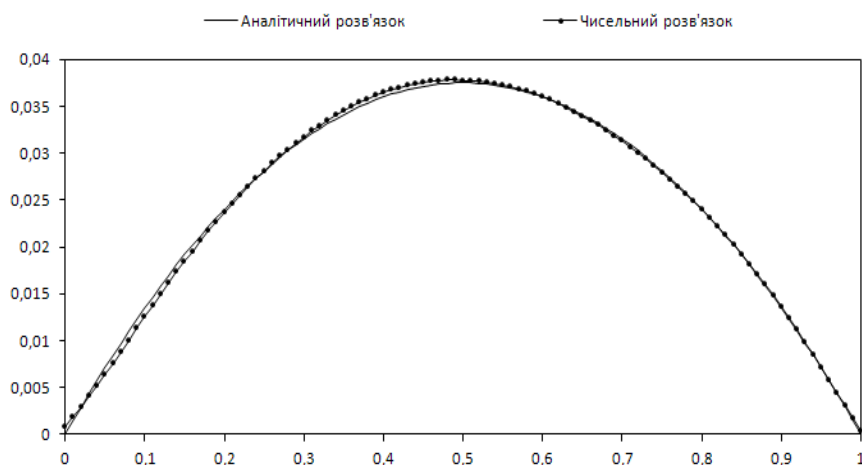


Рис. 2. Порівняння точного й наближеного розв'язків

Навчання мережі проводили на підставі рівномірно-розподіленої навчальної вибірки з більшою концентрацією вузлів на межі області. Початкові положення нейронів вибирали рівномірно з області, частина з них розташовувалась поза областю для кращого наближення граничних умов. Через задану кількість кроків відбувалася зміна навчальної вибірки для забезпечення незалежності нейронної мережі від вхідних даних. У випадку, якщо похибка функціонала не зменшується, навчальна вибірка змінюється. Протягом процесу навчання відбувалося додавання нових нейронів у вузли, де функціонал похибки (10) досягає максимального значення. Початкові значення ширини та ваг радіально-базисних функцій задавали порядку 10^{-2} та 10^{-4} , відповідно. У процесі навчання значення функціонала похибки зменшується до 10^{-4} .

Задачу розв'язали методом скінченних елементів з кількістю елементів $N=100$. Для нейронної мережі початкова кількість нейронів становила 56, і досягнула 63 до завершення навчання. Результати порівняння цих методів наведено у табл. 2. Зауважимо, що РБФ-мережа дає змогу отримати краще наближення розв'язку з меншою кількістю нейронів (у нашому випадку 63), ніж МСЕ з кількістю скінченних елементів $N=100$.

Таблиця 1

Точний і наближений розв'язки

x	h_T	h_H	$ h_O - h_H $	x	h_T	h_H	$ h_O - h_H $
0.40	0.036000	0.036460	0.000460	0.53	0.037365	0.037545	0.000180
0.41	0.036285	0.036745	0.000460	0.54	0.037260	0.037417	0.000157
0.42	0.036540	0.036995	0.000455	0.55	0.037125	0.037259	0.000134
0.43	0.036765	0.037210	0.000445	0.56	0.036960	0.037070	0.000110
0.44	0.036960	0.037389	0.000429	0.57	0.036765	0.036850	0.000085
0.45	0.037125	0.037533	0.000408	0.58	0.036540	0.036598	0.000048
0.46	0.037260	0.037642	0.000382	0.59	0.036285	0.036316	0.000031
0.47	0.037365	0.037718	0.000353	0.60	0.036000	0.036002	0.000002
0.48	0.037440	0.037761	0.000321	0.61	0.035685	0.035659	0.000026
0.49	0.037485	0.037773	0.000288	0.62	0.035340	0.035285	0.000055
0.5	0.037500	0.037757	0.000257	0.63	0.034965	0.034882	0.000083
0.51	0.037485	0.037714	0.000229	0.64	0.034560	0.03445	0.000115
0.52	0.037440	0.037643	0.000203	0.65	0.034125	0.033991	0.000134

Таблиця 2

Порівняння РБФ та МСЕ

x	РБФ	МСЕ	Точний розв'язок	Абсолютна похибка РБФ	Абсолютна похибка МСЕ
0.4	0.036460	0.037200	0.03600	0.000460	0.001200
0.44	0.037389	0.038192	0.03696	0.000429	0.001232
0.48	0.037761	0.038688	0.03744	0.000321	0.001248
0.52	0.037643	0.038688	0.03744	0.000203	0.001248
0.56	0.037070	0.038192	0.03696	0.000110	0.001232
0.6	0.036002	0.037200	0.03600	0.000001	0.001200
0.64	0.034450	0.035712	0.03456	0.000110	0.001152
0.68	0.032451	0.033728	0.03264	0.000189	0.001088
0.72	0.030041	0.031248	0.03024	0.000199	0.001008
0.76	0.027229	0.028272	0.02736	0.000131	0.000912
0.8	0.023981	0.024800	0.02400	0.000019	0.000800
0.84	0.020251	0.020832	0.02016	0.000910	0.000672
0.88	0.016021	0.016368	0.01584	0.000181	0.000528
0.92	0.011178	0.011408	0.01104	0.000138	0.000368
0.96	0.005810	0.005952	0.00576	0.000010	0.000192
1	0.000374	0.000000	0.00000	0.000374	0.000000

Приклад 2. Розглянемо тестовий приклад зі сталим дощовим притоком, поверхня водозбору зображена на рис. 3. Для дослідження розв'язку початково-крайової задачі (1)-(2) з [1] виберемо такі вхідні дані:

$$Re = 20, m = 3/2, R - I = 0.01,$$

$$h|_{x=0} = h|_{x=L} = 0, \forall t \in [0, T], T = 0.2,$$

$$h|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq 1.$$

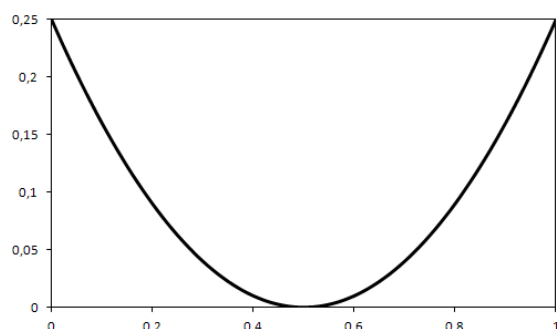


Рис. 3. Рельєф поверхні водозбору

Зауважимо, що значення параметра α з рівняння (1) в цьому випадку відображає зміну рельєфу дна в кожній точці x . Саме ця величина, що прямо пропорційна тангенсу кута нахилу поверхні до горизонту, змінюється за законом $\alpha(x)=2x-1$.

Навчання мережі проводили на підставі сталої рівномірно-розподіленої вибірки навчальних даних із більшою концентрацією вузлів на границі області. Кількість навчальних вузлів загалом становила 121: 54 в середині області і 67 на межі. Початкові значення ширини та ваг радіально-базисних функцій задавали порядку 10^{-2} та 10^{-4} , відповідно.

На рис. 4 схематично зображено початкове розміщення нейронів. Розміщення нейронів після навчання зображено на рис. 5. З рисунків видно, що симетричність розміщення нейронів в області зберігається після навчання.

Проведено дослідження зміни глибини з часом. На рис. 6 та у табл. 3 подано значення глибини стоку в різні моменти часу $t=0.15$, $t=0.175$, $t=0.2$.

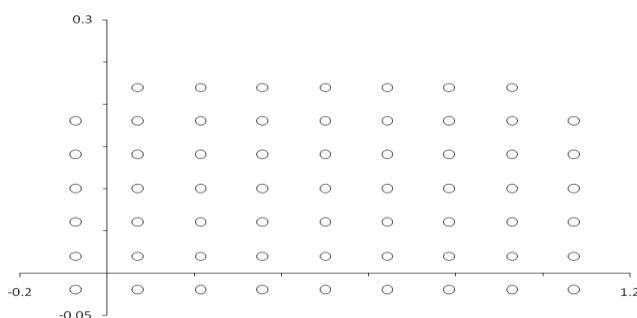


Рис. 4. Початкове розміщення нейронів

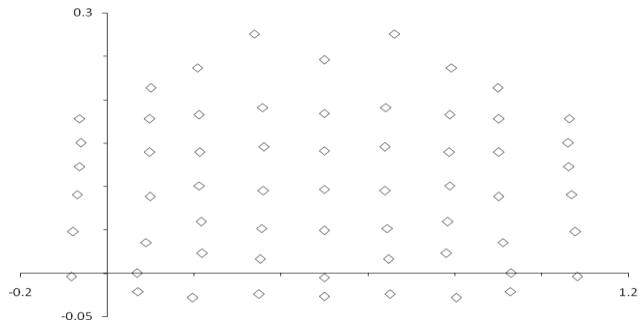


Рис. 5. Розміщення нейронів після навчання мережі

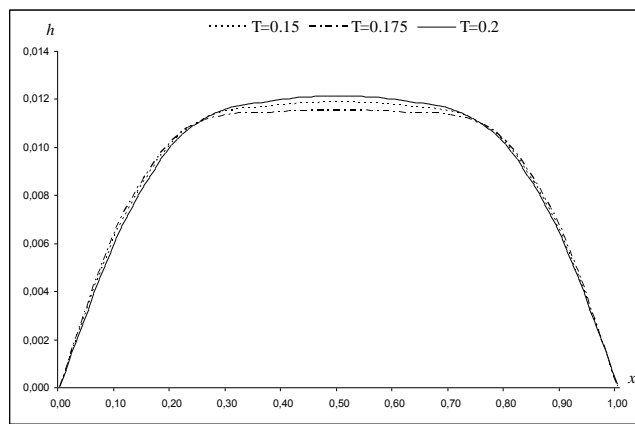


Рис. 6. Значення глибини в різні моменти часу

Таблиця 3

Значення глибини у різні моменти часу

x	$h(t=0.15)$	$h(t=0.175)$	$h(t=0.2)$
0,00	0,0000506675	0,0000118719	0,0001394323
0,10	0,0063381638	0,0065290724	0,0062058727
0,20	0,0101610820	0,0102321871	0,0100970206
0,30	0,0114974085	0,0113480396	0,0116241835
0,40	0,0117458440	0,0114625141	0,0120085651
0,50	0,0118528822	0,0115366969	0,0121523171
0,60	0,0117458440	0,0114625141	0,0120085651
0,70	0,0114974085	0,0113480396	0,0116241835
0,80	0,0101610820	0,0102321871	0,0100970206
0,90	0,0063381638	0,0065290724	0,0062058727
1,00	0,0000506675	0,0000118719	0,0001394323

З чисельних результатів легко бачити, що глибина стоку з часом постійно збільшується та відбувається заповнення водою заглибини поверхні. Це пояснюється тим, що дощовий притік є сталим з нульовою інфільтрацією рідини в ґрунт. Такий приклад відображає процес поступового збільшення глибини у випадку турбулентного режиму водосток.

9. ВИСНОВКИ

Проведено дослідження стійкості однокрокових рекурентних схем інтегрування в часі для задачі руслового стоку води у кінематичному наближенні. Отримано порядок швидкості збіжності рекурентної схеми для регуляризованої моделі стоку рідини в наближенні кінематичної хвилі.

Розглянуто альтернативний підхід до розв'язування задачі стоку мілкої води у кінематичному наближенні, що ґрунтується на реалізації проекційно-сіткової схеми методу скінченних елементів на рекурентній штучній нейронній мережі (ШНМ). Наведено чисельну схему побудови нейронної мережі. Проведено порівняння отриманих результатів з аналітичним розв'язком і результатами методу скінченних елементів.

Побудовано функціонал похибки у вигляді (27) для задачі стоку води у кінематичному наближенні. Задача нейронної мережі полягає у мінімізації отриманого функціонала, використовуючи алгоритм навчання (26). Застосовано різні методики навчання мережі: 1) навчальна вибірка не змінюється протягом навчання; 2) протягом процесу навчання відбувається додавання нових нейронів у вузли, де функціонал похибки досягає максимального значення; 3) через задану кількість кроків проводиться зміна навчальної вибірки, щоб забезпечити незалежність нейронної мережі від вхідних даних.

Проведено порівняння отриманих чисельних результатів з аналітичним розв'язком і результатами методу скінченних елементів. Нейронна мережа дає змогу досягнути високої точності розв'язку порядку 10^{-4} , де кількість нейронів, яка потрібна для цього, значно менша, ніж кількість скінченних елементів у МСЕ для досягнення такої ж точності.

Отримані числові результати свідчать про ефективність застосування РБФ мереж до розв'язування нелінійних задач руслового стоку мілкої води. Важливо зазначити, що для великих значень чисел Рейнольдса потоки та їхні градієнти різко змінюються, внаслідок чого отриманий розв'язок задачі за методом скінченних елементів втрачає свою стійкість і з'являються "паразитичні" осциляції. Для їхнього усунення автори пропонують різні протипотокові схеми МСЕ. На противагу цьому нейронна мережа здатна врахувати тонкі прошарки області, де розв'язки різко змінюються та результати не потребують згладжування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Венгерський П.С. Чисельне моделювання мілкового схилового стоку в кінематичному наближенні / П.С. Венгерський, В.М. Трушевський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 1999. – № 1. – С. 44-49.
2. Венгерський П.С. Рівняння поверхневого потоку в наближенні кінематичної хвилі для русел з нерівномірним дном / П.С. Венгерський, В.М. Кирилич, Я.В. Коковська // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2016. – Вип. 14. – С. 31-36.

3. Коковська Я.В. Побудова та дослідження задачі руслового стоку в наближенні кінематичної хвилі / Я.В. Коковська // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: матеріали доповідей XIX Всеукраїнської наукової конференції (АРАМС-2013). – Львів: ЛНУ, 2013. – С. 80.
4. Кучмент Л. С. Модели процессов формирования речного стока / Л.С. Кучмент. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1980. – 142 с.
5. Нестеренко Б. Б. Решение краевых задач на дискретных клеточных нейронных сетях / Б.Б. Нестеренко, М.А. Новотарский // “Искусственный интеллект” 3, 2008. – С. 568-578.
6. Яничкина Е.В. Решение эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных с использованием радиально-базисных нейронных сетей / Е.В. Яничкина, В.И. Горбаченко // Нейроинформатика. – 2006. – Ч. 3. – С. 15-21.
7. Mohsen H. Feedforward Neural Network for Solving Partial Differential Equation / H. Mohsen, K. Behnam // Journal of Applied Sciences. – 2007. – 7 (19). – 2812. – 2817.
8. Lagaris I.E. Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations / I.E. Lagaris, A. Likas, D.I. Fotiadis // IEEE Trans. on Neural Networks. – 1998. – V. 4. – P. 987-1000.
9. Lighthill M.J. On kinematic waves / M.J. Lighthill, C.M. Whitham // Flood movement in long rivers. – 1955. – Ser. A, No. 229. – P. 281-316.

Стаття: надійшла до редколегії 10.10.2018

доопрацьовано 31.10.2018

прийнята до друку 14.11.2018

APPLICATION OF DIFFERENT APPROACHES TO THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF CHANNEL WATER FLOW IN KINEMATIC APPROXIMATION

P. Venherskyi, Y. Kokovska, V. Trushevskyi

Ivan Franko National University of Lviv,

Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: petro.venherskyi@lnu.edu.ua

It is shown how from the general equations of channel flow of water in hydrodynamic formulation, the equations of channel flow of water are obtained in the kinematic approximation. A variational statement of the channel flow problem was constructed to find unknown values of the cross-sectional area of channel flows at an arbitrary time point. A numerical scheme for solving variational problems using the finite element method (FEM) and one-time recurrent integration schemes in time has been developed. The stability and analysis of the convergence of the constructed numerical schemes by the analysis of the corresponding energy norms is proved.

An alternative approach to solving the problem of channel flow of water, based on the implementation of the projection grid scheme of the finite element method on a recurrent artificial neural network, is considered. Efficiency of application for this task of a neural network on the basis of radial basis functions (RBF) is investigated. The RBF network is constructed on the basis of multidirectional basis functions. Learning the network is to minimize the resulting functional error. This approach can be effectively applied to solving nonlinear problems of channel flow of water.

Key words: initial-boundary value problem, channel flow water, kinematics wave, finite element method, neural network, radial basis functions, multiquadric, error functional.