УДК 656. 13

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Професор Прокудін Г.С.,
Цуканов О.І.

У статтірозроблена стохастична модель та алгоритм оптимізації системи оперативного управління запасами дають зручний і потужний інструментарій для моделювання і розв'язання задач у багатьох сферах практичних прикладень.

Thepaper developed a stochasticmodel and optimization algorithm efficient inventory management systems provide convenient and powerful tool for modeling and solvingproblems in many areas of practical applications.

Вступ. Моделі систем оперативного управління запасами відносяться до типу (r, q) — моделей [1, 2]. Функціонування таких систем визначається розміром партії і рівнем подачі замовлень на поповнення запасів. У цих моделях кожний раз при зниженні рівня запасів до певного рівня r подається заказ на партію розміру q. Для здійснення стратегії управління розглядуваних систем потрібно, щоб їх стан перевірявся після кожної нової поставки.

Задача аналізу систем оперативного управління запасами полягає у визначенні оптимальних значень r і q. Вибір оптимальних значень r і q буде проводитись за критерієм середнього річного прибутку.

1. Модель з втратою невиконаних замовлень

Розглянемо спочатку випадок втрати невиконаних замовлень і штрафами за дефіцит, а потім –з задовільненням невиконаних замовлень після поставки поповнення і також із штрафами за дефіцит. Розглянемо неперервний варіант моделі. Не викликає труднощів видозмінити модель на випадок, коли r, q і попит дискретні.

Введемо позначення: r – точка подачі заказу на поповнення запасу; q – об'єм поставки поповнення запасів; s – середній рівень запасу; $f(x,t)$ – щільність розподілу попиту X в момент часу t; λ – середня інтенсивність попиту, A – вартість подачі замовлення; D – доход системи від реалізації запасу; c_1 – вартість одиниці запасу; I – коефіцієнт витрат утримання запасів; $c_2 = Ic_1$ – середні витрати утримання одиниці запасів; c_3 – витрати по обліку невиконаних замовлень (штрафи за дефіцит).

Визначимо складові цільової функції — середнього річного прибутку.

- $(D-c_1)\lambda$ – середній річний доход;
- середня кількість запасів за рік $\bar{s} = \frac{1}{2}(s+q) + \frac{1}{2}s = \frac{q}{2} + s$;
- середня рівень запасів у рік при постійному часі поставки $(\tau = \text{const})$

$$s(r) = \int_0^\infty \xi(x, r) f(x, \tau)\,dx = \int_0^\infty (r-x) f(x, \tau)\,dx = r - \mu,$$

де $\xi(X, r) = X - r$ –запас в момент поставки, $\mu = \int_0^\infty x f(x, \tau)\,dx$ – середній об'єм попиту за час поставки τ. Якщо час поставки τ випадковий і має щільність розподілу g(τ), то середній рівень запасу також дорівнюватиме

$$s(r) = \int_0^\infty \int_0^\infty \xi(x, r) f(x, \tau) g(\tau) d\tau\, dx = \int_0^\infty (r - x)\, h(x)\, dx = r - \mu,$$

де $h(x) = \int_0^\infty f(x, \tau) g(\tau)\, d\tau$ – безумовна щільність розподілу попиту;

• середні річні витрати на утримання запасу $c_2\left(\frac{q}{2} + s(r)\right)$;

• кількість врахованих невиконаних замовлень (дефіцит) $\eta(X, r) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } X - r < 0, \\ X - r, & \text{якщо } X - r \geq 0; \end{cases}$

• середні річні втрати у наслідок не виконання замовлень (втрати від дефіциту запасів) — $\frac{c_3 \lambda}{q} \eta(r)$,

де $\eta(r) = \int_0^\infty \eta(x, r) h(x)\, dx = \int_r^\infty (x - r) h(x)\, dx = \int_r^\infty x\, h(x)\, dx - r H(r)$ – середня кількість врахованих замовлень за час поставки поповнення, а $H(r) = \int_r^\infty h(x)\, dx$.

$$P(r, q) = (D - c_1)\lambda - \left[\frac{A\lambda}{q} + c_2\left(\frac{q}{2} + s(r)\right) + \frac{c_3 \lambda}{q} \eta(r)\right] \tag{1}$$

За знайденими складовими середній річний прибуток дорівнюватиме

Зауважимо, що у цей вираз не включені витрати, пов'язані з роботою інформаційної системи обробки даних.

Потрібно визначити значення $r = r_0$ і $q = q_0$ які максимізують середній річний прибуток $P(r, q)$.

Якщо оптимальні значення r_0 і q_0 є розв'язком рівнянь

$$\frac{\partial C(r, q)}{\partial q} = -\frac{A\lambda}{q^2} + \frac{c_2}{2} - \frac{c_3 \lambda\, \eta(r)}{q^2} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial C(r, q)}{\partial r} = c_2 + \frac{c_3 \lambda}{q} H(r) = 0.$$

Якщо припустити, що $h(x)$ є нормальним розподілом з математичним сподіванням μ і середнім квадратичним відхиленням σ, тобто $h(x) = f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, то

$$\int_r^{\infty} x\,h(x)\,dx = \int_r^{\infty} x\,f(x,\mu,\sigma)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)dx =$$

$$= \sigma \int_{(r-\mu)/\sigma}^{\infty} u\,\phi(u)\,du + \mu \int_{(r-\mu)/\sigma}^{\infty} \phi(u)du = \sigma\phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) + \mu\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right),$$

де $\phi(u)$ – щільність нормованого нормального розподілу, а $\Phi(u)$ – його додаткова функція розподілу. Величина $\eta(r)$ у цьому випадку дорівнюватиме

$$\eta(r) = \int_r^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)dx - (r-\mu)\,\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) = \sigma\,\phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - (r-\mu)\,\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right). \quad (3)$$

Формула (1) для функції середніх річних витрат з урахуванням 4 прийме вигляд

$$P(r, q) = (D - c_1)\,\lambda - \left[\frac{A\lambda}{q} + c_2\left(\frac{q}{2} + s(r)\right) + \frac{c_3\lambda}{q}\,\eta(r)\right] \quad (4)$$

Функції $\phi(x)$ і $\Phi(x)$ обчислюються за функціями Mathcad $\mathrm{dnorm}(x, \mu, \sigma)$ і $\mathrm{pnorm}(x, \mu, \sigma)$, які дають значення щільності імовірності і значення функції розподілу у точці x.

Рівняння (2) у цьому випадку будуть мати вигляд:

$$q = \sqrt{\frac{2\lambda(A + c_3\,\eta(r))}{c_2}}, \qquad \Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \frac{c_2 \cdot q}{c_3 \cdot \lambda} = 0 \quad (5)$$

2. Модель з обліком невиконаних замовлень

Ця модель системи управління запасами буде мало відрізнятись від розглянутої. Але очевидно, що середнє число циклів за рік тепер вже не дорівнює λ / q, а дорівнює $\lambda/(q + \lambda\overline{T})$, де $\overline{T}$ – середній час протягом циклу, коли у системі спостерігається дефіцит запасів. На практиці $\overline{T}$ складає досить малу частину циклу і їм можна знехтувати. Отже середнє число циклів за рік дорівнюватиме λ / q.

Припускається, що втрати від невиконаних замовлень c_3 впливають на доход. Єдина відміна у порівнянні із випадком втрати замовлень виникає у виразі для гарантійного запасу. Середній рівень наявного запасу в момент поставки дорівнює гарантійному запасу s, а безпосередньо після поставки буде $q + s$. Таким чином, середній рівень наявного запасу за цикл буде дорівнювати $\dfrac{s + (q + s)}{2} = \dfrac{q}{2} + s$.

Нехай $\zeta(X, r)$ є випадкова величина, яка визначає наявний запас в момент поставки поповнення, якщо попит за час поставки дорівнює X. Тоді $\zeta(x, r) = \begin{cases} r - X, & r - X \ge 0, \\ 0, & r - X < 0. \end{cases}$

Середній наявний запас в момент поставки дорівнюватиме

$$s(r)=\int_0^{\infty}\zeta(x,r)h(x)dx=\int_0^{\infty}(r-x)h(x)dx=r-\mu,$$

а після поставки

$$s(r)=\left(\frac{q}{2}+r-\mu-\eta(r)\right),$$

де $\mu=\int_0^{\infty}xh(x)dx$ – середній попит, $\eta(r)=\left(\int_r^{\infty}xh(x)dx-rH(r)\right)$ – середня кількість врахованих незадовільнених замовлень, $H(r)=\int_r^{\infty}h(x)dx$.

З урахуванням цих величин середні річні витрати зберігання запасів дорівнюють

$$c_2\left(\frac{q}{2}+s(r)-\eta(r)\right).$$

Таким чином, середній річний прибуток у випадку системи із врахуванням незадовільнених замовлень дорівнює

$$P(r,q)=(D-c_1)\lambda-\left[\frac{A\lambda}{q}+c_2\left(\frac{q}{2}+s(r)-\eta(r)\right)+\frac{c_3\lambda}{q}\eta(r)\right], \qquad (6)$$

Якщо $h(x)$ є нормальним розподілом, то величина $\eta(r)$ у формулі (6) буде мати вигляд (3).

Значення $r=r_0$, $q=q_0$, які максимізують функцію $P(r,q)$, одержуємо із співвідношень, аналогічних (3):

$$q=\sqrt{\frac{2\lambda(A+c_3\eta(r))}{c_2}}, \qquad \Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)=\frac{c_2 q}{c_3\lambda-c_2} \qquad (7)$$

Розглянемо деякі властивості розглянутих моделей, а також відповідні алгоритми їх чисельної реалізації. Зауважимо, що на основі (3) і (7) і для системи з урахуванням замовлень і для системи із втратами замовлень $q_0>q_w$, де q_w – розмір партії поповнення запасу, визначений за детермінованим попитом. Цей факт можна пояснити тим, що середнє число врахованих або втрачених замовлень за цикл залежить від r, але не залежить від q. Середні річні витрати, пов'язані з урахуванням або втратою замовлень, пропорційні $1/q$. Тому для фіксованого значення r, коли $c_3>0$, завжди має смисл дещо збільшити розмір партії для того, щоб досягти вигоди від відповідного зменшення втрат.

Розглянемо алгоритм знаходження оптимальних значень r і q для моделі з втратою незадовільнених замовлень шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь (5) за допомогою відповідних функцій Mathcad. Алгоритм розв'язання системи рівнянь (7) має такий же вигляд. Розв'язок цих рівнянь завжди буде єдиним. Доведення цього факту ґрунтується на опуклості функції прибутку $P(r,q)$.

Алгоритми реалізації моделі

- задаємо вхідні дані моделі $\lambda,\ A, D,\ c_1,\ I,\ c_2,\ c_3,\ \mu,\ \sigma$;
- записуємо функцію щільності нормованого нормального розподілу $\phi(x)$ і його додаткову функцію розподілу $\Phi(x)$;
- визначаємо середню кількість врахованих замовлень $\eta(r)$ і функцію середнього прибутку $P(r,\ q)$.

Для визначення оптимальних значень r і q і демонстрації можливостей Mathcad застосуємо наступні два алгоритми:

Алгоритм 1. Визначення оптимальних значень r_0, q_0 за формулами (3), розв'язуючи систему рівнянь за допомогою відповідної функції Mathcad Minerr(r, q).

Алгоритм 2. Знаходження максимуму функції прибутку $P(r,\ q)$ шляхом перетворення масиву її значень у відповідну матрицю Z і із застосуванням функції визначення мксимального елемента матриці $\max(Z)$. Оптимальні значення r_0, q_0 визначаються за допомогою індексів цього елемента.

- обчислюємо функціональні характеристики системи управління запасами;
- будуємо графіки функцій витрат $C(r,\ q_0)$, $C(q,\ r_0)$ і цільової функції $C(r,\ q)$.

Алгоритм у Mathcad

ORIGIN≡1

Початкові дані

$\lambda := 5000\quad A := 4000\quad D := 60\quad c_1 := 50\quad I := 0.2\quad c_2 := I\cdot c_1\quad c_2 = 10\quad c_3 := 2500\quad \mu := 750\quad \sigma := 50$

Щільність і додаткова функція нормального розподілу $\phi(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad \Phi(r) := \displaystyle\int_r^{\infty} \phi(x)\,dx$

Середня кількість врахованих замовлень $\quad \eta(r) := \sigma\cdot\phi\left(\dfrac{r-\mu}{\sigma}\right) - (r-\mu)\cdot\Phi\left(\dfrac{r-\mu}{\sigma}\right)$

Функція середнього річного прибутку

$$P(r,\ q) := (D - c_1)\,\lambda - \left[\frac{A\lambda}{q} + c_2\left(\frac{q}{2} + r - \mu\right) + \frac{c_3\lambda}{q}\,\eta(r)\right]$$

Алгоритм 1. Реалізація моделі за формулами (3).

$r := 900\qquad q := 2000$ — початкові значення

Given — блок розв'язання системи рівнянь для визначення r_0 і q_0

$$q - \sqrt{\frac{2\cdot\lambda\cdot\left(A + c_3\cdot\eta(r)\right)}{c_2}} = 0\qquad \Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \frac{c_2\cdot q}{c_3\cdot\lambda} = 0$$

$$Res := MinErr(r,q) \qquad Res = \begin{pmatrix} 897 \\ 2014 \end{pmatrix}$$

Оптимальний рівень подачі заказу і розмір партії поповнення запасу r і q

$$r_0 := Res_1 \quad r_0 = 897 \qquad q_0 := Res_2 \quad q_0 = 2014.4$$

Кількість замовлень у рік і інтервал часу між замовленнями (місяців)

$$k_0 := \frac{\lambda}{q_0} \quad k_0 = 4.5 \qquad \tau_0 := \frac{12}{k_0} \quad \tau_0 = 2.7$$

Максимум цільової функції (прибутку), тис. гр. од.

$$P_{max} := P(r_0, q_0)\cdot 1000^{-1} \qquad P_{max} = 28.4$$

Гарантійний запас $s(r) := r - \mu$ $\qquad s(r_0) = 147$

Мінімальні витрати у стохастичній моделі дорівнюють, тис. гр. од.

$$C(r, q) := \frac{A\cdot\lambda}{q} + c_2\cdot\left(\frac{q}{2} + s(r)\right) + \frac{c_3\cdot\lambda}{q}\cdot\eta(r) \qquad C_{min} := C(r_0, q_0)\cdot 1000^{-1} \qquad C_{min} = 21.6$$

Витрати у детермінованій моделі (моделі із детермінованим попитом), тис. гр. од.)–

$$C_w(r,q) := A\cdot\frac{\lambda}{q} + \frac{c_2\cdot r^2}{2\cdot q} + \frac{c_3\cdot(q-r)^2}{2\cdot q}$$

Оптимальні значення r_w і q_w:

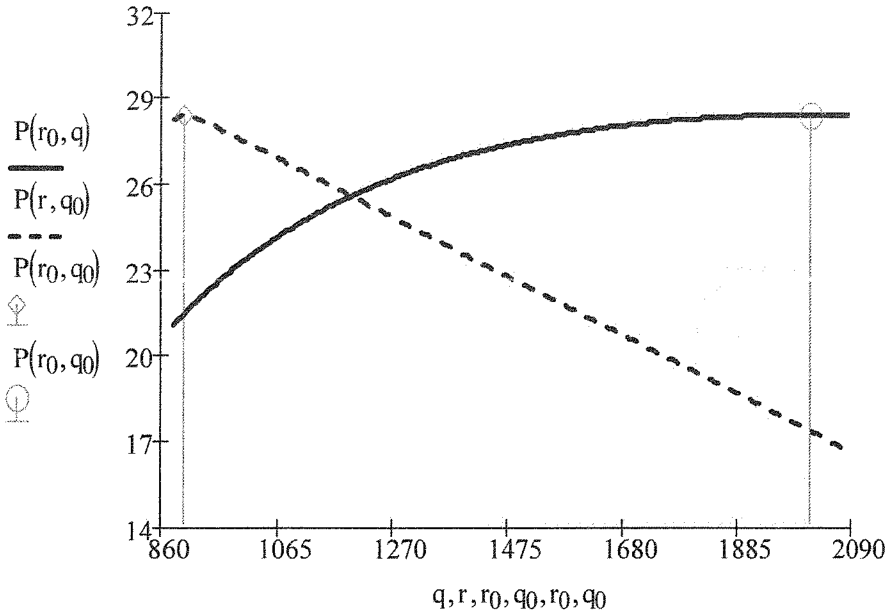
$$\rho := \frac{c_3}{c_2 + c_3} \quad \rho = 0.996 \quad q_w := \sqrt{\frac{2\cdot A\cdot\lambda}{c_2\cdot\rho}} \quad q_w = 2004 \qquad r_w := q_w\cdot\rho \quad r_w = 1996$$

$$C_{Wmin} := C_w(r_w, q_w)\cdot 1000^{-1} \qquad C_{Wmin} = 20$$

Порівняння мінімальних витрат детермінованої і стохастичної моделі

$$\Delta C := C_{min} - C_{W\,min} \qquad \Delta C = 1.6 \qquad Q := if(\Delta C > 0, 1, 0) \quad Q = 1$$

Отже, у наслідок випадковості попиту загальні витрати у стохастичній моделі у порівнянні із детермінованою збільшуються на $\Delta C(q_0) = 1{,}6$ тис. гр. од.



$P(r_0,q) =$ $P(r,q_0) =$

$P(r_0,q)$	$P(r,q_0)$
21.07	28.24
21.18	28.32
21.28	28.36
21.38	28.38
21.48	28.38
21.58	28.37
21.68	28.34
21.78	28.31
21.87	28.27
21.97	28.23
22.06	28.19
22.15	28.14
22.24	28.09
22.33	28.05

Рис. 1. Графіки функцій прибутку $P(r_0, q)$ і $P(r,q_0)$

Алгоритм 2. Знаходження оптимальних значень r і q і максимуму цільової функції $P(r,q)$ за масивом її значень Z.

$r := 880, 885 .. 2090$ $q := 880, 885 .. 2090$ — початковий діапазон значень

Визначення значень елементів матриці Z

$$r_1 := 880 \quad r_2 := 930 \quad \Delta r := 1 \quad m := \mathrm{round}\left(\frac{r_2 - r_1 + 1}{\Delta r}\right) \quad m = 51$$

$$i := 1 .. m \quad x_i := r_1 + \Delta r \cdot (i-1)$$

$$q_1 := 1980 \quad q_2 := 2050 \quad \Delta q := 1 \quad n := \mathrm{round}\left(\frac{q_2 - q_1 + 1}{\Delta q}\right) \quad n = 71$$

$$j := 1 .. n \quad y_j := q_1 + \Delta q \cdot (j-1)$$

$$Z_{i,j} := P(x_i, y_j)$$

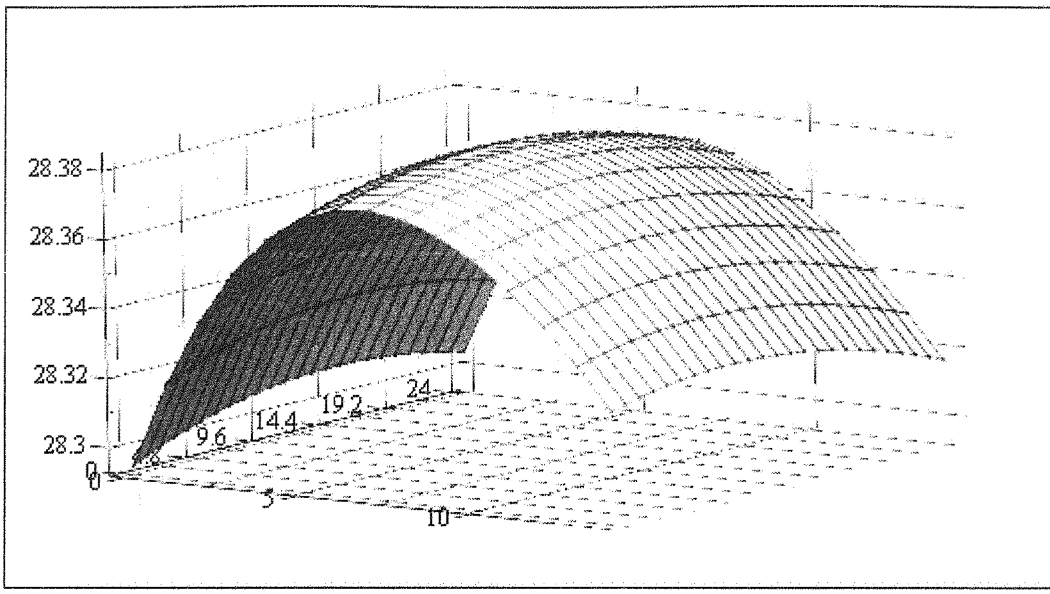
Максимальний елемент масиву Z (максимум цільової функції)

$Z_{max} := \max(Z)$ $Z_{max} = 28.4$

Визначення оптимальних значень r і q

$$u := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{if}(Z_{i,j} = Z_{max}, i, 0) \quad u = 18 \qquad v := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{if}(Z_{i,j} = Z_{max}, j, 0) \quad v = 36$$

$r_0 := x_u \quad r_0 = 897 \qquad q_0 := y_v \quad q_0 = 2015$



Z

Рис. 2. Графік функції прибутку

За двома варіантами алгоритму одержали однакові значення $P(r, q)$, r_0, і q_0.

Коментар. Оптимальна стратегія управління запасами за даною моделлю полягає у тому, щоб замовляти $q_0 \approx 2015$ од. запасів. При цьому оптимальний рівень запасів в момент подачі заказу дорівнюватиме $r_0 \approx 897$ од. Середній річний запас складатиме $s(r_0) \approx 147$ од. Максимальний річний прибуток дорівнюватиме $P_{max} \approx 28{,}4$ гр. од. У наслідок випадковості попиту загальні витрати у стохастичній моделі у порівнянні із детермінованою збільшуються на $\Delta C = 1{,}6$ тис. гр. од.

Представляє інтерес вияснити наскільки r_0 і q_0 чутливі до змін параметрів A, I або c_3. Можна показати, що розмір партії заказу q_0 нечутливий до зміни c_3, тоді як r_0 більш чутливий до цієї зміни. Зміна c_3 від 500 до 2500 гр. од. призводить до зміни r_0 тільки на 27 од., тобто збільшує гарантійний запас на 27 од.. Оскільки середній попит за час поставки складає 750 од., то гарантійний запас змінюється менше ніж на 4% при зміні у 5 разів втрат у наслідок дефіциту. Це означає, що якщо не можна встановити точно значення c_3, знайдені значення r_0 і q_0 не будуть відхилятись у значній мірі від оптимальних, які відповідають точному значенню c_3.

Висновок. Розроблена стохастична модель та алгоритм оптимізації системи оперативного управління запасами дають зручний і потужний інструментарій для моделювання і розв'язання задач у багатьох сферах практичних прикладень. Зокрема, вони можуть використовуватись у інформаційно-логістичних системах як оптимізаційний модуль прийняття управлінських рішень.

Література

1. *Гавриленко В.В., Цуканов І.М., Цуканов О.І.* Комп'ютерні технології в аналізі систем управління запасами. — К.: НТУ, 2009. — 228 с.

2. *Хедли Дж., Уайтин Т.* Анализ систем управления запасами. — М.: Наука. 1969.