

УДК 539.3

## НЕГОЛОНОМНА ДИНАМІКА ДОЛОТА БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ В ГЛИБОКІЙ СВЕРДЛОВИНІ

Доктор технічних наук Гуляєв В.І.,  
Борщ О.І.,  
Шевчук Л.В.

Поставлена задача про коливання кружляння долота бурильної колони, яка попередньо напружена по-здовжньою силою і обертається під дією прикладеного до долота моменту сил різання. Виконано аналіз механізму самозбудження коливань. Показано, що в'язі, які реалізуються між дном свердловини і долотом, являються неголономними. Обговорюються динамічні ефекти, викликані змодельованою взаємодією.

The problem of the whirling vibrations of a bit of a drillstring, which is prestressed by longitudinal force and rotates under the applied forces, is stated. The analysis of the mechanism of the vibration self-excitation is performed. The contact interaction between the bit and the rock medium is shown to be nonholonomic. The dynamic effects of this interactions are discussed.

**Постановка проблеми.** Серед основних питань, пов'язаних з добуванням розвіданих ресурсів нафти та газу є проблема виникнення нештатних ситуацій, викликаних критичними станами квазістатичної рівноваги і коливань конструкції низу бурильної колони. Одна з них полягає у збуренні коливань кружляння. В даній роботі вони моделюються на основі методів неголономної механіки.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій** Добування розвіданих нафтових та газових ресурсів пов'язане зі значними технологічними труднощами проходки глибоких свердловин. Критичні згини випинання бурильної колони (БК) [1-3] та її вібрації, які включають одночасно декілька різних коливальних явищ [4-5], суттєво ускладнюють виділення кожного з них і не дозволяють оцінити і пояснити їх механізми. У випадку, коли на долото діють нормальні і дотичні сили контактної і фрикційної взаємодії долота зі стінкою свердловини, геометричний центр долота починає рухатися навколо осьової лінії свердловини, випереджаючи чи відстаючи від обертального руху самої колони. В механіці такі коливання отримали назву прецесійних коливань. Як зазначено в англомовній науковій літературі [6-9], описаний рух центра долота має іншу природу. Він вивчався на вельми спрощених фізичних та математичних моделях і отримав назву «whirling» – кружляння.

**Мета роботи** полягає в уточненні математичної моделі механізму згинних коливання низу БК, викликаних дією на долото нормальних і дотичних сил контактної і фрикційної взаємодії долота зі стінкою свердловини.

**Виклад основного матеріалу.** Кочення долота по поверхні свердловини без ковзання реалізується тоді, коли в зоні контакту фрикційної взаємодії між тілами, що дотикаються, тертя реалізується за законом Кулона і рівнодійна  $F_{\tan}^r$  сил пружності  $F_{\tan}^{el}$  і сил інерції  $F_{\tan}^{in}$ , що діють на долото в точці контакту, менше граничного значення статичного тертя

$$F_{\tan}^r < F_{st}^{fr} = \mu R, \quad (1)$$

де  $R$  – сила нормального тиску,  $\mu$  – коефіцієнт тертя.

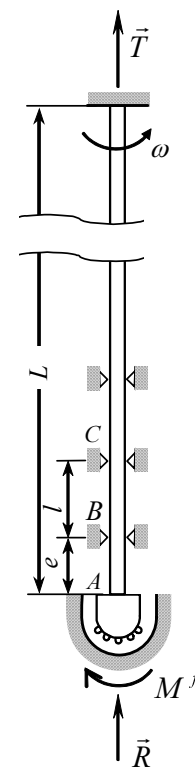


Рис.1 Схема низу бурильної колони

В цьому випадку визначальну роль в русі долота грають кінематичні ефекти, що описуються неголономними співвідношеннями, а рівняння динаміки використовуються для обчислення швидкості руху і встановлення стану, при якому

$$F_{\tan}^r = F_{st}^{fr} \quad (2)$$

і долото починає котитися з ковзанням.

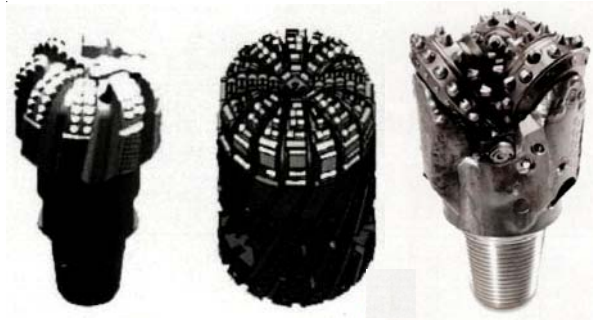


Рис.2 Форми бурильних доліт з діамантовими різцями

При постановці задачі про моделювання явища самозбудження коливань кружляння долота представимо конструктивну схему БК у вигляді багатопрогонної нерозрізаної трубчастої балки довжиною  $L$ , яка обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Роль додаткових опор в нижній частині БК відіграють центруючі пристрої. Балка піддається дії крутного моменту сил різання  $M^f$  і подовжньої сили стискання  $\vec{R}$  від реакції взаємодії долота і дна свердловини (рис.1). На нижньому кінці БК має консольну ділянку довжиною  $e$ , до якої приєднано долото. Знехтуємо впливом верхньої частини БК на динамічний процес, умовно відокремимо нижній прогон  $BC$  з консоллю  $AB$  і вважатимемо, що в точці  $C$  реалізуються граничні умови шарнірного обпирання, в точці  $A$  – умови приєднання долота до БК. Для постановки задачі і виведення розв’язувальних рівнянь введемо нерухому систему координат  $OXYZ$  і пов’язану з БК, яка обертається, систему  $Oxyz$  з ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Початки обох систем співпадають і знаходяться в точці  $C$ . Осі  $OZ$  і  $Oz$  направлені вздовж осі труби БК. Введемо також жорстко пов’язану з тілом долота систему координат  $Ax_1y_1z_1$ , осі якої  $Ax_1, Ay_1, Az_1$  в недеформованому стані паралельні осям  $Ox, Oy, Oz$ , відповідно, а при пружному згинанні консолі повертаються разом з долотом.

В загальному випадку поверхня долота може набувати різної форми і на ній закріплюються діамантові різці. При позаштатній роботі долота діаманти випадають із кріплень і долото стає непридатним.

Нехай тіло долота обмежене сферичною поверхнею (рис.2), а поверхня дна свердловини – конічна. Для простоти викладу методики розв’язання виберемо ситуацію, коли осі  $Ax_1$  і  $Ox$  лежать в одній площині, а осі  $Ay_1$  і  $Oy$  паралельні. Тоді при повороті долота можливі три випадки (рис. 3). Перший виникає при малих кутах  $\alpha$  повороту осі долота в порівнянні із кутом  $\beta$  нахилу, що утворює поверхні свердловини і пов’язаний з початковою стадією збудження коливань (рис. 3, а). На цій стадії точка  $G$  контакту знаходиться правіше нижньої точки  $D$  долота, що лежить на продовженні пружної осі БК.

Вважатимемо, що в точці  $G$  реалізуються умови контакту сухого тертя без ковзання, результуюча дотична сила  $F_{\tan}^r$  задовольняє умові (1) і долото перекочується по поверхні дна свердловини.

Тоді в точці контакту  $G$  швидкість долота рівна нулю і вона є миттєвим центром швидкостей. В цьому випадку долото буде перекочуватися по поверхні свердловини без різання породи. Спроекуємо на площину і розглянемо кінематичний рух плоских фігур у цій площині в напрямі, що визначається дотичною компонентою  $F_{\tan}^r$  рівнодійної прикладеної до долота системи сил пружності БК і сил інерції долота. На

площині  $Ox_1y_1$  (або  $OXY$ ) траєкторія руху точки  $G$  може проектуватися у вигляді кривої з петлями повернення або гармоніками, накладеними на коло. Вважається, що такі коливання кружляння є найбільш небезпечними [8,9].

Якщо кочення є стійким, то точка контакту  $G$  переміщається по колу, а центральна точка  $A$  поверхні долота обертається з постійною кутовою швидкістю  $c$  проти напрямку обертання БК (зворотне регулярне кружляння).

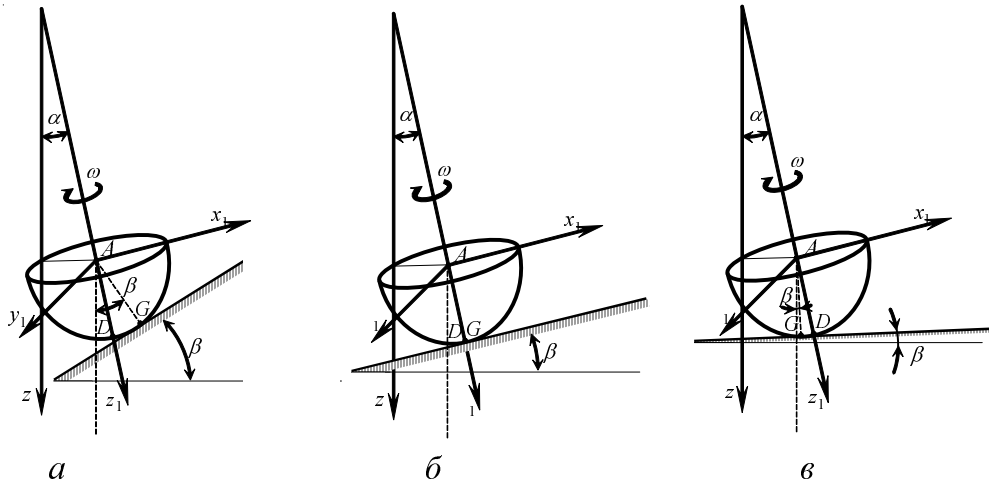


Рис.3 Схема кочення і вертіння долота

У системі  $Ox_1y_1z_1$  долото здійснює складний рух, тому швидкість  $\vec{V}_G$  його точки  $G$  можна представити у вигляді

$$\vec{V}_G = \vec{V}_A + \vec{V}_{GA} = \vec{V}_D + \vec{V}_{GD}, \quad (3)$$

де  $\vec{V}_A$  – швидкість початку  $A$  рухомої системи,  $\vec{V}_{GA}$  – швидкість точки  $G$  при обертанні навколо  $A$ . Так як  $\vec{V}_G = 0$  і  $\vec{V}_D \parallel \vec{V}_{GD}$ , маємо:

$$\vec{V}_D + \vec{V}_{GD} = 0, \text{ або } V_D + V_{GD} = 0. \quad (4)$$

Швидкість  $V_{GD}$  підраховується так:

$$V_{GD} = \omega \cdot GD. \quad (5)$$

Для обчислення  $V_D$  врахуємо, що обертальний рух точки  $D$  навколо осі свердловини обумовлений пружними коливаннями кінця  $A$  бурильної колони з частотою  $c$ :

$$u_A(t) = a \cos ct, \quad v_A(t) = a \sin ct. \quad (6)$$

Тоді

$$V_D = V_A = \sqrt{(\dot{u}_A)^2 + (\dot{v}_A)^2} = c \cdot a. \quad (7)$$

Звідси слідує, що кутова швидкість обертання точки  $A$  дорівнює  $c$  і тому, як випливає із співвідношень (4), (5), (7), в розглянутому випадку  $a = OD$  і величина  $c$  складає

$$c = -\omega \frac{GD}{OD}, \quad (8)$$

що підтверджує наявність ефекту кружляння долота в напрямі, зворотному його обертанню.

Відзначимо, що при малому  $OD$  ( $\alpha \ll 1$ )  $c$  приймає великих значень. Це не означає, що  $c \rightarrow \infty$  на початковому етапі самозбудження коливаний зворотного кружляння. Просто в цьому стані через велике  $c$  великі значення приймає також і прискорення точки  $D$ . Внаслідок цього режим чистого кочення виявляється неможливим і долото, продовжуючи котитися, починає і ковзати. Тоді генеруються також і дисипативні сили тертя, що приводять до розсіювання енергії і уповільнення кутової швидкості  $c$ .

Інша картина складається при  $\alpha \rightarrow \beta$ . Тоді  $GD \rightarrow 0$  і тому  $c \rightarrow 0$ .

Якщо  $\alpha = \beta$  (рис. 3, б), то точки  $D$  і  $G$  співпадають і відбувається просте обертання долота навколо цих точок. При цьому точки  $D$  і  $G$  не переміщуються, явище коливаний кружляння не відбувається, і в режимі буріння траєкторія свердловини, проходячи через них, змінює свій напрям.

Випадок  $\alpha > \beta$  (рис. 3, в) пов'язаний з розташуванням точки контакту  $G$  між точками  $O$  і  $D$ . Тому для вибраного напрямку обертання  $\omega$  долото ніби перекочується зовнішнім образом по колу радіуса  $OG$  (рис. 4, б), і напрям обертання ( $\omega$ ) і кружляння ( $c$ ) збігаються (пряме регулярне кружляння).

При такому розташуванні точок  $D$  і  $G$  формули (1) і (4) зберігають силу, проте замість (7) доводиться представити  $V_D = -c \cdot a$ . Тому  $c = \omega \frac{GD}{OD}$  і долото перекочується у напрямі обертання БК (рис. 4, б).

Співставлення наведених рівностей і рис. 4, б дозволяє заключити, що пряме кружляння реалізується з меншими кутовими швидкостями  $c$ .

Встановлений режим прямого кружляння також може бути нерегулярним і супроводжуватися рухом точки  $D$  долота по осциляційним або петлевидним кривим [2].

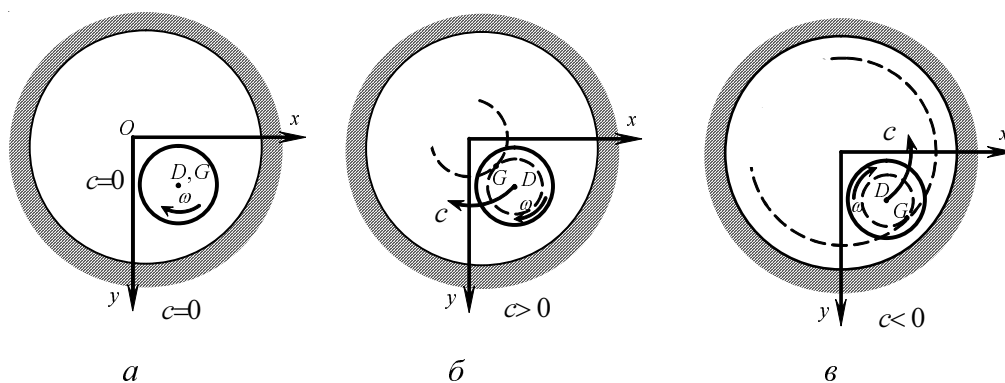


Рис. 4 Схема руху долота

Для кількісного аналізу кінематично збуджуваних коливаний кружляння необхідно скласти рівняння динаміки всієї виділеної для розгляду двопронгної балки  $ABC$ , що обертається, попередньо напруженої крутним моментом  $M_z = -M^{fr}$  і подовжньою стискаючою силою  $T = -R$ .

Рівняння динамічного пружного згинання БК при наявності відмічених факторів побудовані в роботах [3,4]. Вони мають форму

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - M_z \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - (\rho F + \rho_1 F_1) \omega^2 u - 2(\rho F + \rho_1 F_1) \omega \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho F + \rho_1 F_1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + M_z \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - (\rho F + \rho_1 F_1) \omega^2 v + 2(\rho F + \rho_1 F_1) \omega \frac{\partial u}{\partial t} + (\rho F + \rho_1 F_1) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $u(z,t), v(z,t)$  – пружні переміщення елемента труби БК в напрямках осей  $Ox, Oy$ , відповідно;  $EI$  – жорсткість труби БК при згині;  $\rho, \rho_l$  – густина матеріалу труби і промивної рідини, відповідно;  $F, F_l$  – площі поперечних перерізів стінки труби і її внутрішнього каналу, відповідно;  $t$  – час. Використання системи (9) разом з рівняннями (1)-(8) дозволяє моделювати явища коливань кружляння.

Робота виконана в рамках державного замовлення Міністерства освіти і науки України № ДЗ/ 295-2008 «Розроблення технологій безаварійного буріння надглибоких вертикальних і криволінійних нафтових та газових свердловин».

### Література

1. Борщ Е.И., Вацелина Е.В., Гуляев В.И. Спиральные бегущие волны в упругих стержнях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела – 2009. – №2. С. 143 – 149.
2. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.
3. Gulyayev V.I., Borshch O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011. V. 78. P. 759 – 764.
4. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V. The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – 67. – P.140–148.
5. Gulyayev V.I., Hudoly S.N., Glovach L.V. The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P.110–118.
6. Gulyayev V.I., Hudoliy S.N., Glushakova O.V. Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment models // Journal of Multi-body Dynamics. – 2011. V. 225. P. 139 – 152.
7. Gulyayev V.I., Khudoliy S.N., Andrusenko E.N. Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes // Interaction and Multiscale Mechanics. – 2011. – V.4. – No.1. – P.1–16.
8. Christoforou A.P., Yigit A.S. Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – 206(2). – P.243 – 260.
9. Jansen J.D. Wirl and chaotic motion of stabilized drill collars // SPE Drilling Engineering. – 1992. – 7(2). – P.107 – 114.

УДК 681.3

## ПЕРЕХІДНІ ЯВИЩА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Кандидат фізико-математичних наук Дегтярь С.В.,  
кандидат фізико-математичних наук Дегтярь В.Г.

Досліджено асимптотичну поведінку розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, що залежать від напівмарковського процесу зі зчисленною множиною станів.

*The asymptotic behavior of solutions of linear differential equation systems is investigated for the cases, when their coefficients depend on semi-markov processes with calculable sets of states.*

**Постановка проблеми.** Прикладні задачі математики, зокрема проблеми стабілізації систем управління, побудови оптимального управління спонукають до вивчення систем диференціальних рівнянь, що залежать від випадкових процесів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проста стохастична модель односекторної економіки розглядалась в роботі [2].

**Мета роботи.** Дослідити асимптотичну поведінку розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, що залежать від напівмарковського процесу зі зчисленною множиною станів [1].

**Постановка проблеми.** Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dY(t)}{dt} = F(Y(t), X(t)), \quad \dim Y(t) = m, \quad (1)$$