

ДО РОЗВ'ЯЗКУ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТОВСТОСТІННИХ ПЛАСТИН В РАМКАХ ПРИКЛАДНИХ ТЕОРІЙ

Доктор технічних наук Луговий П.З.,
доктор фізико-математичних наук Мейш В.Ф.,
кандидат фізико-математичних наук Мейш Ю.А.

Розглянуто задачі про вимушені коливання товстостінної пластини при розподіленому навантаженні в рамках прикладних теорій – теорія пластин з врахуванням поперечних зсувних та нормальних деформацій, теорія пластин типу Тимошенка та теорія пластин Кірхгофа. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів.

We consider the problem of forced vibrations of thick-walled plate with distributed load applied within the framework of theories — the theory of plates with transverse shear into account, and normal strains, the theory of Timoshenko-type plate theory and Kirchhoff plates. A comparative analysis of the results of calculations are given

Постановка проблеми. Розглянуто задачі про вимушені коливання товстостінної пластини при розподіленому навантаженні в рамках прикладних теорій – теорія пластин з врахуванням поперечних зсувних та нормальних деформацій, теорія пластин типу Тимошенка та теорія пластин Кірхгофа. Для розв'язку поставлених задач використовується метод скінченних різниць [1]. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів.

Виклад основного матеріалу. Розглянуто варіант теорії ортотропних пластин з врахуванням поперечних нормальних та зсувних деформацій [1, 2].

Для того, щоб описати закон зміни переміщень по товщині пластини використовується апроксимація виду

$$u_i^z(x, y, z) = u_i(x, y) + z\varphi_i(x, y); \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

де x, y, z — координати декартової системи; u_i, φ_i ($i = \overline{1, 3}$) — компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні.

Статичні гіпотези, які визначають зміни по товщині пластини поперечних зсувних напружень σ_{13}^z ($i = 1, 2$) приймаються у вигляді

$$\sigma_{13}^z = f_i(z)\sigma_{13}^0(x, y), \quad (2)$$

де функції $f_i(z)$ вибираються таким чином, щоб $\sigma_{13}^z(z = \pm h/2) = 0$ при відсутності поверхневих зсувних навантажень.

Поперечне нормальне навантаження σ_{33}^z задається у вигляді

$$\sigma_{33}^z = \frac{h/2 - z}{h} P_3^+(x, y) + \frac{h/2 + z}{h} P_3^-(x, y) + f_3(z)\sigma_{33}^0(x, y), \quad (3)$$

де $P_3^\pm(x, y)$ — нормальне навантаження; функція $f_3(z)$ задається із умов $\sigma_{33}^z(z = \pm h/2) = P_3^+(x, y)$.

Компоненти тензора деформацій мають вигляд

$$e_{11}^z = e_{11} + z\kappa_{11}; \quad e_{33}^z = \varphi_3 \quad (1 \leftrightarrow 2); \quad (x \leftrightarrow y); \quad (4)$$

$$e_{12}^z = e_{12} + z\kappa_{12}; \quad e_{13}^z = e_{13} + z\kappa_{13};$$

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}; \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}; \quad \kappa_{13} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}.$$

Залежності між компонентами тензорів напружень та деформацій запишемо у вигляді

$$\mathbf{y} = [C]\mathbf{e}; \quad \mathbf{y} = (\sigma_{11}^z, \sigma_{22}^z, \sigma_{33}^z, \sigma_{12}^z, \sigma_{13}^z, \sigma_{23}^z)^T; \quad (5)$$

$$\mathbf{e} = (e_{11}^z, e_{22}^z, e_{33}^z, \omega^z, e_{13}^z, e_{23}^z)^T;$$

$$\omega^z = \omega + z\tau; \quad \omega = e_{12} + e_{21}; \quad \tau = \kappa_{12} + \kappa_{21}.$$

При виведенні рівнянь коливань використовується варіаційний принцип стаціонарності Рейсснера для динамічних процесів [1, 2], згідно якого

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(R - T) - \delta A] dt = 0, \quad (6)$$

де R — функціонал Рейсснера [1, 2], T — кінетична енергія, A — робота зовнішніх сил. Варіаційний принцип Рейсснера дозволяє уникати протиріч рівнянь узагальненого закону Гука для нормального та зсувних поперечних напружень при прийнятті незалежних гіпотез апроксимацій переміщень та напружень (1) – (5).

В диференціальній формі рівняння коливань пластини мають вигляд

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + P_2 = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} + P_3^\pm = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{13}}{\partial x} + \frac{\partial M_{23}}{\partial y} - T_{33} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2};$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ S \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^z \\ \sigma_{22}^z \\ \sigma_{12}^z \\ \sigma_{13}^z \\ \sigma_{23}^z \\ \sigma_{33}^z \end{bmatrix} dz; \quad \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ H \\ M_{13} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^z \\ \sigma_{22}^z \\ \sigma_{12}^z \\ \sigma_{13}^z \\ \sigma_{23}^z \end{bmatrix} z dz. \quad (8)$$

Рівняння коливань (7) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

Досліджувався випадок шарнірно опертої товстостінної пластини при дії нормального навантаження виду

$$P_3^+(x, y, t) = A\eta(t) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

де A — амплітуда навантаження; $\eta(t)$ — функція Хевісайда.

Також розглядалася вищевказана задача в рамках моделі теорії пластин типу Тимошенка та Кірхгофа.

У випадку моделі пластини типу Тимошенка рівняння коливань мають вигляд [1, 4].

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + P_2 = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} + P_3^\pm = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.$$

У випадку пластини Кірхгофа рівняння коливань мають вигляд

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + P_2 = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} + P_3^\pm = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = 0;$$

$$M_{11} = D_{11}(\kappa_{11} + \nu_2 \kappa_{22}); \quad M_{22} = D_{22}(\kappa_{22} + \nu_1 \kappa_{11}); \quad H = D_{12} \kappa_{12};$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x},$$

$$\varphi_1 = -\frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \varphi_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial y}.$$

Чисельний алгоритм розв'язування рівнянь (7), (9), (10) базується на використанні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих схем для вихідних рівнянь по просторовим координатам x , y та явній скінченно – різницевій схемі по часовій координаті t [1, 3, 4].

Розглядався випадок квадратної пластини при відношенні ширини до товщини $a/h = 4$. Фізико – механічні параметри пластини наступні: $E_1 = E_3$; $\nu_{13} = 0,3$; $G_{13}(1 - \nu_{12}\nu_{21})/E_1 = 0,1$. На рис. 1 представлено залежності безрозмірної величини прогину в центрі пластини від величини безрозмірного

часу \bar{t} ($\bar{t} = tc/a$, $c^2 = E_1 / [\rho(1 - \nu_{12}\nu_{21})]$). Крива 1 відповідає розрахункам по рівнянням даної роботи. Аналогічні розрахунки, проведені згідно моделі типу Тимошенка, показали, що криві прогину співпадають. Крива 2 відповідає розрахункам в рамках моделі Кірхгофа – Лява. Спостерігається значна відмінність амплітудно – часової характеристики величини прогину.

На рис. 2 представлено залежності безрозмірної величини напруження σ_{11}/A в центрі пластини на поверхні $z = -h/2$.

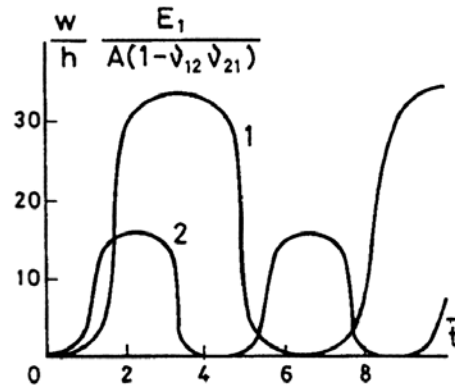


Рис. 1. Залежність величини w_3 від часової координати t

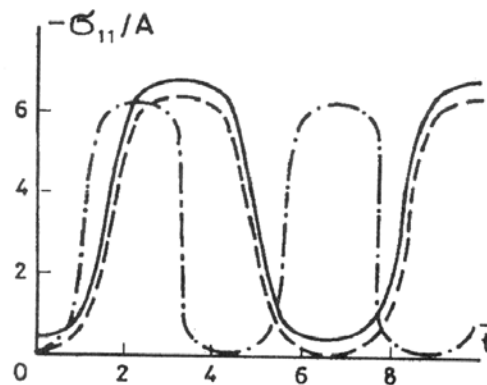


Рис. 2. Залежність величини σ_{11}/A від часової координати t

Суцільна крива відповідає розрахункам, згідно представленої моделі, штрихова, згідно моделі типу Тимошенка, штрих пунктирна, згідно моделі Кірхгофа. Різниця максимальних значень напружень, які розраховані за цими моделями, досягає 6,35% (максимальні амплітуди напружень, визначені за теоріями Тимошенка та Кірхгофа співпадають).

Було проведено непряме співставлення результатів розрахунку поведінки товстостінної ізотропної плити при динамічному навантаженні з точним розв'язком аналогічної задачі в рамках теорії пружності при статичному навантаженні. Відомо, що максимальні переміщення (а, отже і інші параметри напружено – деформованого стану в лінійних системах), що виникають при раптово прикладеному навантаженні, вдвічі більші обумовлених статичним прикладанням навантаження [5]. Цей підхід покладено в основу співставлення результатів задачі, що вище розглядалася з точним розв'язком в рамках теорії пружності при статичному навантаженні [6].

Проведено побічне порівняння результатів розрахунків для пластин в рамках уточненої теорії пластин з врахуванням поперечних зсувних та нормальних деформацій – рівняння (7), теорії пластин типа Тимошенка – рівняння (9) та класичної теорії пластин Кірхгофа – рівняння (10). Розглядалася шарнірно оперта пластина при параметрах $a/h = 3$; $\nu = 0,3$. В таблиці 1 приведено результати розрахунків, згідно вказаних вище теорій для максимальних значень величин σ_{11}/A в центрі пластини.

Величина	Точна теорія [6]	Уточнена теорія р-ня (7)	Теорія типу Тимошенка р-ня (9)	Теорія Кірхгофа р-ня (10)
$\frac{\sigma_{11}}{A} \Big _{z=h/2}$	1,859	1,94 (4,36)	1,94 (4,36)	1,780 (4,25)
$\frac{\sigma_{11}}{A} \Big _{z=-h/2}$	-2,125	-2,144 (0,9)	-1,94 (8,71)	-1,780 (16,24)

Примітка. В дужках вказана відносна похибка в порівнянні з точним розв'язком в рамках теорії пружності.

Висновки. В роботі розглянуто задачі про вимушені коливання товстостінної пластини при розподіленому навантаженні в рамках прикладних теорій – теорія пластин з врахуванням поперечних зсувних та нормальних деформацій, теорія пластин типу Тимошенка та теорія пластин Кірхгофа. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів, який дозволяє визначати області використання прикладних теорій пластин при розв'язку динамічних задач.

Література

1. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – Киев: Изд. – полиграф. центр «Киевский университет», 2005. – 536 с.
2. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища школа, 1986. – 191 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
4. Мейш В.Ф. О численном решении двумерных динамических задач геометрически нелинейной теории дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек типа Тимошенко // Прикладная механика. – 1997. – Т.33, №2. – С. 61–67.
5. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
6. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты // Вестник Московского ун-та. – 1957. — № 2. – С. 25 – 34.

УДК 539.3

В'ЯЗКО-ПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ГЕОЛОГІЧНИХ СТРУКТУР З МІКРОПОШКОДЖЕННЯМИ

Кандидат фізико-математичних наук Ляшенко Я.Г.

Запропоновано методу обчислення в'язко-пружних деформацій неоднорідних гірських порід. Використано модель нелінійного багатоконпонентного в'язко-пружного геологічного середовища, в якому внаслідок довготривалих природних процесів відбувається зміна властивостей, в тому числі накопичення пошкодження.

The method of calculation of visco elastic deformations of heterogeneous geological environment is developed. The model of nonlinear multicomponent visco-elastic geological environment which properties is changing (for example accumulation of damage) by means of long-term nature processes is used.

Постановка проблеми. Важливими розрахунковими параметрами, що визначають тип конструкцій, розміри і технологію зведення виробок та підземних споруд, що будуються у гірських масивах, є характеристики деформівності та міцності геологічних середовищ. Гірські породи здатні деформуватись у часі без збільшення напружень, що спричинені об'ємними або поверхневими силами. Розглянуто нелінійну модель неоднорідного геологічного середовища, поведінка якого є залежною від наявності включень та мікропошкоджень.