

РЕФЕРАТ

Рассказов А.А., Бондарский А.Г. Сравнительный анализ эффективности применения некоторых вариантов уточненной теории пластин и оболочек на основе сопоставления с точным решением. Рассказов А.А., Бондарский А.Г. // Вестник Национального транспортного университета - К.: НТУ, 2012. - Вып. 25.

Сравниваются результаты решения задачи собственных колебаний квадратной трехслойной пластины, полученные на основе некоторых вариантов уточненной теории.

В инженерной практике при решении задач статического изгиба, статической устойчивости и собственных колебаний многослойных пластин и оболочек применяются методы, основанные на некоторых вариантах уточненной теории, учитывающей поперечный сдвиг в слоях конструкций.

Эффективность применения этих вариантов можно оценить путем сравнения задачи собственных колебаний трехслойных симметричных изотропных пластин, которые нагружены статическим синусоидальным нагружкой.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ЗАДАЧИ О СТАТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ, ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ТЕОРИЯ.

УДК 539.3

РІВНОВАГА ШАРУВАТИХ ПОРОЖНИСТИХ, ГОФРОВАНИХ В ПОПЕРЕЧНОМУ ПЕРЕРІЗІ, ЦИЛІНДРІВ З ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ СЕРЕДНІМ ШАРОМ

Рожок Л.С., кандидат фізико-математичних наук

Вступ. В аерокосмічних та інших механічних застосуваннях, використовуються оболонкові конструкції з коловим та не коловим поперечним перерізом. Оболонкам з хвилеподібним поперечним перерізом притаманні деякі специфічні особливості в розподілі параметрів жорсткості, що має позитивний вплив на характеристики елементів конструкцій різного призначення. Відхилення форми поперечного перерізу від колової вимагає застосування просторової моделі. Поєднання аналітичних методів та стійких чисельних методів дає змогу отримувати розв'язки задач подібного класу з достатнім ступенем достовірності.

До розв'язування задачі про напружений стан шаруватих порожнистих циліндрів з гофрованим поперечним перерізом, застосовується підхід, що базується на застосування дискретних рядів Фур'є, методу відокремлення змінних та чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Постановка і метод розв'язування задачі. Розглядаються порожнисті циліндри під дією зовнішнього навантаження $q = q_0 \sin \frac{\pi s}{l}$, складені з шарів без проковзування та відриву, для яких виконуються умови спряження [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma}^i &= \sigma_{\gamma}^{i+1}, \tau_{s\gamma}^i = \tau_{s\gamma}^{i+1}, \tau_{t\gamma}^i = \tau_{t\gamma}^{i+1}, \\ u_{\gamma}^i &= u_{\gamma}^{i+1}, u_s^i = u_s^{i+1}, u_t^i = u_t^{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, P). \end{aligned} \quad (1)$$

Першу квадратичну форму в ортогональній криволінійній системі координат запишемо у вигляді

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(\psi, \gamma) d\psi^2 + d\gamma^2, \quad (2)$$

де s, ψ, γ ортогональні криволінійні координати: s - довжина дуги по твірній, ψ - полярний кут в поперечному перерізі, γ - нормальна координата по товщині циліндра.

Поперечний переріз задається в полярній системі координат

$$\rho = r_0 + \alpha \cos m\psi \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi), \quad (3)$$

де ρ - полярний радіус, r_0 - радіус середнього кола, α - амплітуда, m - частота гофрування.

Тоді маємо

$$H_2(\psi, \gamma) = \left(1 + \frac{\gamma}{R(\psi)}\right) \omega(\psi), \quad \omega(\psi) = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2} = \sqrt{(r_0 + \alpha \cos m\psi)^2 + (\alpha m \sin m\psi)^2}; \quad (4)$$

$$R(\psi) = \frac{\sqrt{[(r_0 + \alpha \cos m\psi)^2 + (\alpha m \sin m\psi)^2]^3}}{(r_0 + \alpha \cos m\psi)^2 + 2(\alpha m \sin m\psi)^2 + (r_0 + b \cos m\psi) \alpha m^2 \cos m\psi}.$$

Даний клас задач розглядаємо в просторовій постановці, взявши за вихідні основні рівняння просторової теорії пружності.

Вирази деформацій через переміщення

$$e_s^i = \frac{\partial u_s^i}{\partial s}, \quad e_t^i = \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t} + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i, \quad e_\gamma^i = \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \gamma}, \quad e_{st}^i = \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_s^i}{\partial t} + \frac{\partial u_t^i}{\partial s}, \quad e_{s\gamma}^i = \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s} + \frac{\partial u_s^i}{\partial \gamma}, \quad (5)$$

$$e_{t\gamma}^i = H_2^i \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_t^i}{H_2^i} \right) + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial t};$$

рівняння рівноваги

$$H_2^i \frac{\partial \sigma_s^i}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{st}^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \tau_{s\gamma}^i) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_t^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \tau_{t\gamma}^i) + H_2^i \frac{\partial \tau_{st}^i}{\partial s} + \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma}^i = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \sigma_\gamma^i) + H_2^i \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{t\gamma}^i}{\partial t} - \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \sigma_t^i = 0; \quad (6)$$

співвідношення закону Гука для ортотропного тіла

$$e_s^i = a_{11}^i \sigma_s^i + a_{12}^i \sigma_t^i + a_{13}^i \sigma_\gamma^i, \quad e_t^i = a_{12}^i \sigma_s^i + a_{22}^i \sigma_t^i + a_{23}^i \sigma_\gamma^i, \quad e_\gamma^i = a_{13}^i \sigma_s^i + a_{23}^i \sigma_t^i + a_{33}^i \sigma_\gamma^i, \quad (7)$$

$$e_{t\gamma}^i = a_{44}^i \tau_{t\gamma}^i, \quad e_{s\gamma}^i = a_{55}^i \tau_{s\gamma}^i, \quad e_{st}^i = a_{66}^i \tau_{st}^i,$$

де для трансверсально-ізотропного матеріалу механічні параметри будуть

$$a_{11}^i = \frac{1}{E^i}; \quad a_{22}^i = -\frac{\nu^i}{E^i}; \quad a_{13}^i = -\frac{\nu^i}{E^i}; \quad a_{33}^i = \frac{1}{E^i}; \quad a_{44}^i = \frac{1}{G^i}; \quad a_{22}^i = a_{11}^i; \quad a_{23}^i = a_{13}^i; \quad a_{55}^i = a_{44}^i, \\ a_{66}^i = \frac{1}{G^i} = \frac{2(1+\nu^i)}{E^i} \quad (8)$$

для ізотропного матеріалу маємо

$$a_{11}^i = a_{22}^i = a_{33}^i = \frac{1}{E^i}; \quad a_{12}^i = a_{13}^i = a_{23}^i = -\frac{\nu^i}{E^i}; \quad a_{44}^i = a_{55}^i = a_{66}^i = \frac{2(1+\nu^i)}{E^i}. \quad (9)$$

На торцях циліндра припускаємо наявність граничних умов типу простого обпирання. Циліндри знаходяться під дією рівномірного навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні. Обравши за розв'язувальні функції компоненти напружень і переміщень, після деяких перетворень

можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами для кожного шару [2].

Відокремивши змінні в напрямку твірної циліндра, подаючи розв'язувальні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж твірної циліндра, отримаємо двовимірну крайову задачу відносно амплітуд відповідних рядів Фур'є, що описується розв'язувальною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних більш високого порядку. Коефіцієнти отриманої розв'язувальної системи рівнянь містять параметри, що перешкоджають відокремленню змінних в напрямку напрямної циліндра. Застосувавши метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, вводимо до розв'язувальної системи рівнянь доповняльні функції і отримуємо систему рівнянь, коефіцієнти якої, формально, не перешкоджатимуть відокремленню змінних в напрямку напрямної. Подаючи розв'язувальні, доповняльні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж напрямної циліндра приходимо до одомірної крайової задачі відносно амплітуд відповідних рядів Фур'є, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь у вигляді (індекс i опускаємо для зручності) [3]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,n,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,n,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,n,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,n,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,n,k} - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\ \frac{d\tau_{\psi\gamma,n,k}}{d\gamma} &= -c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} + (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k} + b_{66}\lambda_n^2 u_{\psi,n,k}; \\ \frac{du_{\gamma,n,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,n,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\ \frac{du_{s,n,k}}{d\gamma} &= a_{55}\tau_{s\gamma,n,k} - \lambda_n u_{\gamma,n,k}; \quad \frac{du_{\psi,n,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{\psi\gamma,n,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2, \quad (k = \overline{0, K}; n = \overline{0, N}) \end{aligned} \quad (1)$$

з граничними умовами

$$\gamma = \gamma_p : \sigma_{\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0; \quad (2)$$

$$\gamma = \gamma_q : \sigma_{\gamma,n,k} = q_{\gamma,n,k}; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0.$$

Для розв'язування отриманої одомірної крайової задачі застосовуємо стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. Для визначення значень доповняльних функцій в процесі інтегрування використовуємо ряди Фур'є для функцій, заданих на дискретній множині точок [3,4].

Основні результати дослідження. На основі викладеного підходу розглянуто задачу про напружений стан порожнистих тришарових циліндрів, з гофрами в поперечному перерізі з трансверсально-ізотропним середнім шаром.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: $r_0=40$; $l=60$; $H=4$; $h=2$; $m=4$; $\alpha=4$
 $E = E_0$; $E' = 0,2E_0$; $\nu = 0,2$; $\nu' = 0,6$; $G' = 0,1E_0$

В таблиці приведені результати розв'язання задачі в середньому перерізі по довжині циліндра для значень переміщень u_γ та напружень σ_ψ для деяких значень по товщині та напрямній циліндра.

З таблиці видно, що для гофрованих в поперечному перерізі циліндрів, що мають трансверсально-ізотропний середній шар, значення переміщень на внутрішній поверхні зменшуються порівняно з переміщеннями на зовнішній поверхні приблизно в 3 рази в зоні вершини гофрів $\psi = 0$. В зоні западини гофрів $\psi = \pi/4$ розподіл переміщень більш плавний, при цьому максимальних значень переміщення досягають на межі внутрішнього та середнього шарів.

Напруження при переході від внутрішнього шару до зовнішнього зменшуються, змінюючи свій знак на протилежний, в 3 рази в перерізі $\psi = 0$ та збільшуються приблизно в 2 рази в перерізі $\psi = \pi/4$.

Розподіл переміщень u_γ та напружень σ_ψ по товщині вздовж напрямної циліндра.

	γ/H	$\psi = 0$	$\psi = \pi/8$	$\psi = \pi/4$
$u_\gamma E/q_0$	-1/2	90,04	382,11	627,29
	-1/4	83,51	381,91	634,65
	0	43,61	356,75	630,16
	1/2	24,46	327,03	598,51
	1/4	29,15	324,94	592,20
σ_ψ / q_0	-1/2	15,78	2,54	-6,80
	-1/4	10,52	4,59	0,66
	0	6,72	5,44	4,51
	1/2	-0,78	3,70	6,06
	1/4	-4,74	4,20	14,20

Висновок. Таким чином, застосування методу, заснованого на використанні рядів Фур'є для дискретно заданих функцій, дозволяє розв'язувати задачі про напружений стан порожнистих циліндрів в широкому діапазоні зміни геометричних та механічних параметрів, з достатнім ступенем точності, зокрема для шаруватих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов Н.Г. и др. Статика элементов конструкций./ Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов Н.Г. и др. – К.: «А.С.К.», 1999. – 379 с. – (Механика композитов: В 12-ти т; Т.8)
2. Григоренко Я.М., Рожок Л.С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статки пружних тіл неканонічної форми. / Григоренко Я.М., Рожок Л.С. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, №2. – С.78 – 100.
3. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section. / Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. // J. Eng. Math. – 2006. – 54. – P. 145–157.
4. Григоренко Я.М., Рожок Л.С. Анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с гофрированным поперечным сечением. / Григоренко Я.М., Рожок Л.С. // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 12. – С. 87–96.

РЕФЕРАТ

Рожок Л.С. Рівновага шаруватих порожнистих, гофрованих в поперечному перерізі, циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром./ Лілія Степанівна Рожок // Вісник НТУ. – 2012. – Вип. 26.

Розв'язання задачі про рівновагу шаруватих порожнистих, гофрованих в поперечному перерізі циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром дано в просторовій постановці при певних граничних умовах на торцях.

При цьому застосовуються: метод відокремлення змінних вздовж твірної та напрямної циліндра, метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації.

Наводяться результати розрахунків у вигляді розподілу полів переміщень та напружень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ПОРОЖНИСТІ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНІ ЦИЛІНДРИ, ГОФРОВАНІЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ПЕРЕРІЗ, ДИСКРЕТНІ РЯДИ ФУР'Є, МЕТОД ДИСКРЕТНОЇ ОРТОГОНАЛІЗАЦІЇ, НАПРУЖЕНИЙ СТАН.

ABSTRACT

Rozhok L.S. Equilibrium of layered hollow cylinders with corrugated cross section and transversally isotropic middle layer. / Liliya Rozhok // Visnyk NTU. – K.: NTU. – 2012. – Vol. 26.

Solving the problem on equilibrium of layered cylinders with corrugated cross section and transversally isotropic middle layer is performed in spatial formulation at certain boundary conditions at the ends.

With this aim the following methods have been used: the method of variable separation along the cylinder generatrix and directrix, the function approximation method with the discrete Fourier series, and the stable numerical method of discrete orthogonalization.

Presented are the numerical results in the form of stress and strain fields.

KEYWORDS: HOLLOW TRANSVERSALLY-ISOTROPIC CYLINDERS, CORRUGATED CROSS SECTION, DISCRETE FOURIER SERIES, DISCRETE ORTHOGONALIZATION METHOD, STRESS STATE.

РЕФЕРАТ

Рожок Л.С. Равновесие слоистых полых, гофрированных в поперечном сечении, цилиндров с трансверсально-изотропным средним слоем. / Лилия Степановна Рожок // Вестник НТУ. – К.: НТУ. – 2012. – Вып. 26.

Решение задачи о равновесии слоистых полых, гофрированных в поперечном сечении, цилиндров с трансверсально-изотропным средним слоем дано в пространственной постановке при определенных условиях на торцах.

При этом используются: метод разделения переменных вдоль образующей и направляющей цилиндра, метод аппроксимации функций дискретными рядами Фурье и устойчивый численный метод дискретной ортогонализации.

Приводятся результаты расчетов в виде распределения полей перемещений и напряжений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ПОЛЫЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫЕ ЦИЛИНДРЫ, ГОФРИРОВАННОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ, ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ, МЕТОД ДИСКРЕТНОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ, НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ.

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОПРУЖНОГО СТАНУ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ ПІВПЛОЩИНИ З ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ АБО ПРЯМОЛІНІЙНИМИ ТРІЩИНАМИ³

Хорошев К.Г., кандидат фізико-математичних наук

Глуценко Ю.А., кандидат фізико-математичних наук

Розв'язанню плоскої задачі електропружності для багатозв'язної п'єзоелектричної півплощини присвячено роботи [1–3]. В даній статті, що є логічним завершенням [3], проведені дослідження електропружного стану п'єзоелектричної півплощини з двома однаковими круговими отворами або прямолінійними тріщинами, коли на границі півплощини задано значення електричного потенціалу, на нескінченності діє однорідний потік електричного поля, перпендикулярний цій границі.

Постановка задачі та методика дослідження. Розглядається нижня півплощина з п'єзоелектричного матеріалу, яка має два кругові отвори або дві прямолінійні тріщини, що паралельні границі півплощини, та знаходиться в узагальненому плоскому електропружному стані. В серединній площині пластинки маємо область S , обмежену прямолінійною границею і контурами отворів або тріщин та віднесена до системи декартових координат Oxy (рис. 1). Контури отворів та тріщин не підкріплені та позбавлені електромеханічного навантаження. На прямолінійній границі нанесено тонкі електроди та задано значення $\varphi^+ = 0$ В електричного потенціалу, вона не підкріплена та не завантажена. На нескінченності діє лише стале електричне поле $E_y^\infty = a$ В/м.

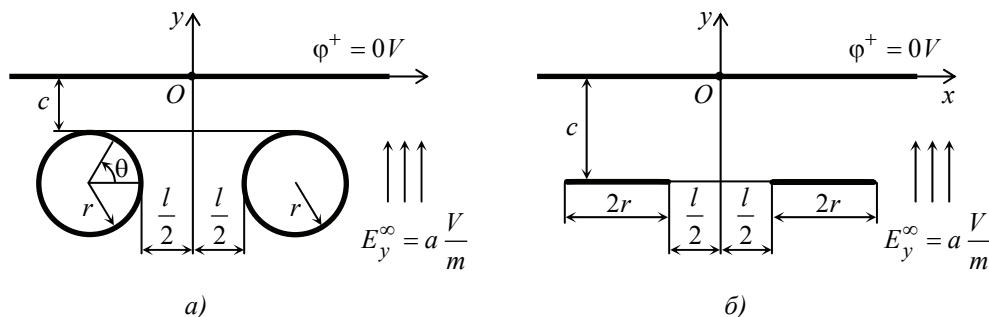


Рис. 1. Півплощина з двома отворами або тріщинами