ЗЕМЛЕВПОРЯДКУВАННЯ ТА КАДАСТР

УДК 528.23:528.932

Мельник В. М., д.т.н., професор, Мендель В. П., інженер, Расюн В. Л., аспірант (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки)

МАТЕМАТИКО-МОРФОМЕТРИЧНІ ВИЗНАЧЕННЯ ЛОКАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЛЬЄФУ ЗА СПОСОБАМИ ДПФ І МНК

Показана можливість використання алгоритму двовимірного дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) та методу найменших квадратів для визначення важливих морфометричних характеристик (крутизна, експозиція та кривина) для плоскої та сфероїдичної сітки відповідно.
***Ключові слова*: сфероїдична сітка, дискретне перетворення Фур'є.**

Вступ. Рельєф є одним із основних факторів [1, 2], що обумовлює і формує різні геодинамічні процеси, як результат взаємодії ендо- та екзогенних процесів різних масштабів [3, 4]. Для достовірної кількісної морфометричної оцінки рельєфу розроблена низка методів, які різняться як за точністю, так і трудомісткістю [5, 6]. Серед науковців немає однозначності стосовно переваг того чи іншого методу. Відповідно розробка оптимальних морфометричних методів аналізу рельєфу є актуальною задачею.

Згідно сучасних геоінформаційних підходів перспективними є картографо-фотограмметричні методи аналізу цифрових моделей рельєфу. Картографо-фотограмметричні методи передбачають використання достовірної вхідної інформації, яку можна отримати в результаті оцифрування карт або фотограмметричних моделей. При цьому дуже важливою є ідентичність ЦМР реальним особливостям рельєфу, а також оптимальність об'ємів оцифрування та складнощі математичних моделей. Ці питання вимагають окремих досліджень.

Аналіз останніх досліджень. Вивченню проблеми кількісного дослідження рельєфу присвячені роботи О.М. Ласточкіна, С.Н. Сербенюка, І.Г. Черваньова, Х.В. Бурштинської, Ю.О. Карпінського, В.М. Мельника, Р.М. Рудого, M. Armstrong, F. Ammannati, F.J. Doyle, M. Vencovsky та ін. Проте, найбільш цікавими в контексті досліджуваного питання визначення морфометричних характеристик є роботи, що особливо виділяються завдяки не тільки різноплановому теоретичному, а й практичному застосуванню розроблених методик. А саме: Й.С. Еванса [7], Л.У. Зевербергена, К.Р. Торна [8], П.А. Шарого [9], І.В. Флоринського [10], В.М. Мельника [11], Х.В. Бурштинської [12].

Постановка завдання. Мета статті – розробка теоретико-методологічних засад визначення локальних морфометричних характеристик рельєфу на квадратній і сфероїдичній сітках за допомогою дискретного перетворення Фур'є та способу найменших квадратів (МНК).

Завданням є отримання конкретного алгоритму ДПФ і МНК та їх практична реалізація. Визначення показників локальних характеристик рельєфу шляхом математичного моделювання із використанням оригінального підходу дозволить оперативно здійснювати роботи в різних напрямках – геоморфології, ерозієзнавстві, ґрунтознавстві та ін.

Дані дослідження тісно пов'язані з науково-дослідною роботою (№ держреєстрації 0111 U 002146), що виконувалась на кафедрі геодезії, землевпорядкування та кадастру Східноєвропейського національного університету ім. Лесі Українки протягом 2011-2012 рр.

Результати досліджень. Локальні морфометричні характеристики є функціями висоти h та її частинних похідних I та II порядків. Ці характеристики можуть бути розраховані як на плоскій, так і на сфероїдичній сітці.

1. Визначення морфометричних характеристик рельєфу на плоскій сітці за методом дискретного перетворення Фур'є (ДПФ)

Представимо рельєф дискретно, тобто висота z точки визначається як функція її положення (координат *x* та *y*). Крім того, представимо рельєф в просторово-частотній області, де z визначається як сума ряду гармонік. Для цього доцільно застосовувати двовимірне дискретне перетворення Фур'є (ДПФ).

Спочатку розглянемо як функцію одного аргументу, тобто z=f(x) [11]. Нехай профіль рельєфу представлений точками, що рівномірно розміщені на всьому проміжку і представлені висотами z_k, де k=0,1,…,N-1. Таким чином, z_k можна представити сумою гармонік:

$$z_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G_n W^{n,k}, \qquad (1.1)$$

де $W^{n,k} = e^{\frac{2\pi n}{N}k}$, G_n – амплітуда n-ої гармоніки.

Довжина хвилі n-ої гармоніки дорівнює довжині хвилі (N-n)-ої гармоніки, тобто $\omega_n = \frac{Nd}{N-n}$, де d – інтервал між точками профілю.

Рівняння (1.1) – це зворотне дискретне перетворення Фур'є, а пряме перетворення Фур'є має вигляд [13]:

$$G_n = \sum_{n=0}^{N-1} z_k W^{-n,k} \quad . \tag{1.2}$$

Двовимірне пряме та зворотне ДПФ функції рельєфу z=z(f x,y) аналогічне як і для одновимірного випадку.

Нехай рельєф подано дискретно цифровою моделлю (ЦМР) на регулярній сітці у вигляді матриці висот розміром M×N. Тоді пряме перетворення Фур'є матиме наступний вигляд:

$$G_{n,m} = \sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} z_{k,l} W_N^{-n,k} W_M^{-m,l} \ , \ n = \overline{0,1\ldots,N-1},$$
$$m = \overline{0,1\ldots,M-1} \tag{1.3}$$

а зворотне перетворення:

$$z_{k,l} = \frac{1}{NM}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} G_{n,m} W_N^{n,k} W_M^{m,l} n = \overline{0,1\ldots,N-1},$$
$$m = \overline{0,1\ldots,M-1}. \tag{1.4}$$

Алгоритм виконання двовимірного ДПФ базується на послідовному обчислені одновимірного перетворення Фур'є: спочатку в одному напрямку, наприклад, x, а потім – в другому, наприклад, y. Тоді рівняння (1.3) можна представити так:

$$G_{n,m} = \sum_{l=0}^{M-1} Q_l W_M^{-m,l} \text{де } Q_l = \sum_{k=0}^{N-1} z_{n,l} W_N^{k,l} W_N^{-n,k} \ . \tag{1.5}$$

Коефіцієнти $G_{n,m}$ (включаючи дійсну і уявну складові) по порядку їх індексів n та m – це і є просторово-частотне представлення рельєфу. При цьому модуль комплексних коефіцієнтів двовимірного ДПФ характеризує спектральну потужність досліджуваної ЦМР, яка визначається як $\left|G_{n,m}\right|$ і представляє собою розподіл амплітуд гармонік за частотами.

Побудова ЦМР служить джерелом даних для визначення топографічних параметрів h_i, що характеризують геометричні властивості локальної поверхні об'єкту в певній точці. Такими параметрами служать висота, крутизна та кривина, що необхідні для розрахунків і наступної побудови ЦМР.

Крутизна (нахил) та кривина в точці пов'язані з першою та другою похідними функціями рельєфу z= z (x, y) [14]. Частинні похідні першого порядку пов'язані з крутизною в точці наступним чином:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\partial z / \partial x}{\partial z / \partial y}\right), \tag{1.6}$$

де A – амплітуда; φ – кут орієнтації нахилу.

Кривину достатньо визначити за наближеною формулою Лапласа:

$$k = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{1.7}$$

Для знаходження похідних від z= z (x, y) представимо поверхню Ω у вигляді сплайн поверхні, тобто розіб'ємо область Ω на комірки $\Delta = dx + dy$. В кожній Δ-комірці побудуємо гладку апроксимуючу поверхню підбором поліномів другої або третьої степені u:

$$z_u = z_u\left(x, y\right) = \sum_{q=0}^{u}\sum_{p=0}^{u-q} a_{p,q} x^p y^q. \tag{1.8}$$

Апроксимація виконується для Δ-комірки, що складаються з 9 або 25 точок. Коефіцієнт $a_{p,q}$ є лінійною функцією підгруп 9 або 25 точок. У випадку побудови ЦМР на основі перетворення Фур'є параметри ($a_{10}a_{01}c$), а отже, і значення крутизни й кривини, більш доцільно визначати із застосуванням спектрального подання рельєфу [15]:

$$\left[a_{10}a_{01}c\right] = F^{-1}\left\{G_n \overline{f}\right\}, \tag{1.9}$$

де F^{-1} – обернене перетворення Фур'є; $\overline{f}$ – вектор факторизації.

Схема обчислень включає такі етапи:

1. Перехід від цифрової моделі $z_{k,l}$ до спектральної моделі $G_{nm} = F\left\{z_{kl}\right\}$, F – пряме перетворення Фур'є.

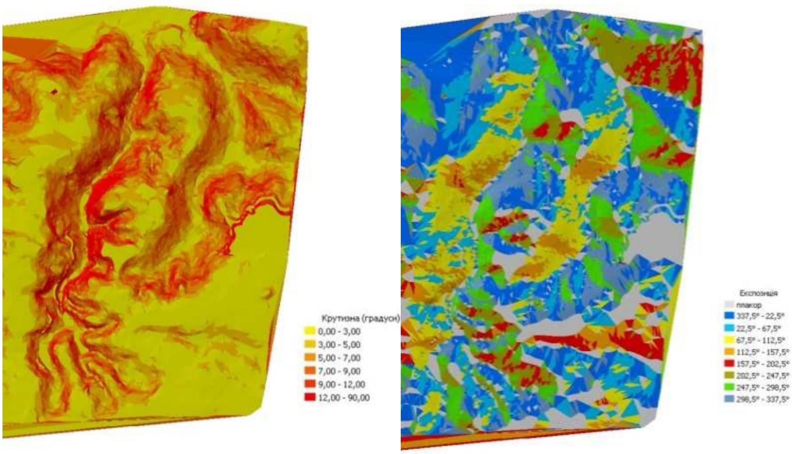
2. Факторизація $\overline{G_{nm}} = \left\{G_{nm}\overline{f}\right\}$.

3. Обчислення вектора параметрів $\overline{a} = \left[a_{10} a_{01} c\right]^2$, $\left[\overline{a}\right] = F^{-1}\left\{\overline{G_{nm}}\right\}$.

4. Визначення параметрів крутизни і кривини.

Таким чином, помноживши отримані коефіцієнти двовимірного ДПФ на відповідні коефіцієнти f_i та здійснюючи зворотне двовимірне ДПФ, отримаємо шукані характеристики в кожній точці. Відмітимо, що внаслідок особливих властивостей ДПФ всі вище наведені перетворення можна проводити паралельно. Сплайн-апроксимацію доцільно здійснювати за допомогою програмного продукту Maple V Release 5.0 (© Waterloo Maple Inc., 1981-1997).

За результатами проведених досліджень побудовані карти крутизни та експозиції досліджуваної ділянки, які подані на рисунку 1 а, б відповідно.



а) б)

Рис. 1. Карти крутизни та експозиції досліджуваної ділянки (с. Забороль Луцького р-ну Волинської області)

Виконані дослідження підтвердили високу швидкодію запропонованого методу, можливість виконувати паралельно всі операції по знаходженню відповідних характеристик, що є суттєвим для програмування.

2. Визначення локальних характеристик на сфероїдичній сітці

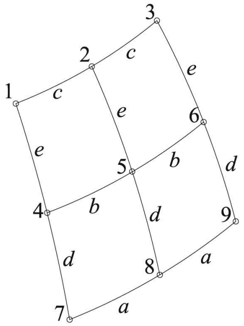


Рис. 2. Ковзне вікно чотирьох спарених трапецій

Плоска квадратна сітка і сітка сфероїдична мають принципово різну геометрію, тому відповідно для сфероїдичної сітки визначення локальних морфометричних параметрів суттєво різниться від відповідних визначень для плоскої сітки [10].

На сьогодні існує декілька методів побудови ЦМР на сітці сфероїдичних трапецій з рівним кутовим кроком по широті і по довготі. Частина з них має досить високу роздільну здатність (від 1” до 7”). Нехай для сітки сфероїдичних трапецій потрібно визначити локальні морфометричні характеристики. Оскільки сітка сфероїдичних трапецій з однаковим інтервалом може бути побудована тільки в при екваторіальній смузі, то очевидно, що методи, які використовуються для розрахунку на плоскій сітці не можуть бути використані для сфероїдичної сітки.

Нехай висота задана як $z = f(x, y)$, де x та y – сферичні ортогональні координати. Задамо ковзне вікно розміром 3 на 3 з вузлами у вершинах чотирьох суміжних сфероїдичних трапецій (рис. 2). Дві трапеції мають основи a і b і сторони d, а дві інших трапеції мають основи b і c та сторони e. При цьому, a, b і c є лінійними довжина дуг паралелей, d і e – лінійними довжинами дуг меридіанів. Для точок ковзного вікна (-c, e, z_1), (0, e, z_2), (c, e, z_3), (-b, 0, z_4), (0, 0, z_5), (b, 0, z_6), (-a, -d, z_7), (0, -d, z_8), (a, -d, z_9) відомі сферичні ортогональні координати і висоти. Припустимо, що в межах ковзного вікна можна знехтувати кривизною Землі (розміри ковзного вікна менші 0,1 середнього радіуса Землі) [16].

Щоб обчислити перші та другі похідні висоти r, t, s, p і q в центральній точці вікна (0, 0, z_5), застосуємо аналогічно як в роботі [10] поліноміальну апроксимацію:

$$z(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m-k} A_{kl} x^k y^l \,. \tag{1}$$

В розгорнутому вигляді, наприклад, для 1-ої точки запишемо:

$$z_1 = \frac{rc^2}{2} + \frac{te^2}{2} - sce - pc + qe + u \,. \tag{2}$$

Аналогічно можна записати систему лінійних нормальних рівнянь для всіх решти точок (т. 2 – т. 9).

З врахуванням похибок (V) систему лінійних рівнянь поправок в матричному вигляді запишемо так:

$$FX + L = V, \tag{3}$$

де F – матриця відомих коефіцієнтів системи рівнянь розміром 9 на 6; X – матриця невідомих коефіцієнтів поліному розміром 6 на 1.

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{r} \\ \mathrm{t} \\ \mathrm{s} \\ \mathrm{p} \\ \mathrm{q} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

де L – матриця значень висот в точках ковзного вікна розміром 9 на 1:

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} \mathrm{z}_1 \\ \mathrm{z}_2 \\ \mathrm{z}_3 \\ \vdots \\ \mathrm{z}_9 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

V – матриця поправок розміром 6 на 1.

Виконаємо послідовне доведення для того щоб знайти коефіцієнти полінома (1):

$$F^T FX + F^T L = F^T V,$$

але $F^T V = 0$, тому маємо:

$$F^T FX + F^T L = 0.$$

З допомогою матричних операцій отримуємо:

$$\left(F^T F\right)^{-1} F^T FX + \left(F^T F\right)^{-1} F^T L = 0.$$

Звідси

$$\left(F^T F\right)^{-1} F^T FX = 1.$$

В результаті отримаємо рівняння, яке необхідно розв’язати:

$$X = \left(F^T F\right)^{-1} F^T L\ , \tag{6}$$

де F^T – транспонована матриця F, а $\left(F^T F\right)^{-1}$ – обернена матриця $F^T F$.

З використанням позначень [10] запишемо матрицю $\left(F^T F\right)^{-1} F^T$ розміру 6 на 9:

$$\left(F^T F\right)^{-1} F^T = \left[J_1 \;\; J_2 \;\; J_3 \;\; J_4 \;\; J_5 \;\; J_6 \;\; J_7 \;\; J_8 \;\; J_9 \right], \tag{7}$$

де

$$J_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{c^2}{a^4+b^4+c^4} \\ \dfrac{2\left[d\left(a^4+b^4+b^2c^2\right)-c^2e\left(a^2-b^2\right)\right]}{3de(d+e)\left(a^4+b^4+c^4\right)} \\ -\dfrac{c\left[a^2(d+e)+b^2e\right]}{2\left[a^2c^2(d+e)^2+b^2\left(a^2d^2+c^2e^2\right)\right]} \\ \dfrac{a^2cd(d+e)}{2\left[a^2c^2(d+e)^2+b^2\left(a^2d^2+c^2e^2\right)\right]} \\ \dfrac{d^2\left(a^4+b^4+b^2c^2\right)+c^2e\left(a^2-b^2\right)}{3de(d+e)\left(a^4+b^4+c^4\right)} \\ -\dfrac{b^2c^2}{3\left(a^4+b^4+c^4\right)} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Аналогічним чином конструюються решту матриць-стовбчиків $J_2 - J_9$.

Переміщуючи сфероїдичне трапеціальне вікно 3 на 3 по поверхні ЦМР, можна розрахувати значення локальних характеристик рельєфу для всіх точок ЦМР, крім одного крайнього рядка та одного крайнього стовбця на кожній стороні ЦМР. На сфероїдичній сітці доцільно використовувати високоефективний програмний продукт LandLord 2.0.

Висновки

1. В статті розроблено метод визначення локальних характеристик рельєфу на плоскій квадратній сітці. Метод базується на використанні дискретного двовомірного перетворення Фур’є. Алгоритм передбачає тотожні з ДПФ обчислювальні операції по визначенні параметрів крутизни, експозиції та гауссової кривини.

2. Теоретично обгрунтовано метод визначення локальних характеристик рельєфу на сфероїдичній сітці. Пропонується поліноміальна апроксимація рельєфу другого та третього порядків. Апроксимація здійснюється за методом найменших квадратів.

3. Запропоновані методи можуть використовуватись в геоморфологічних дослідженнях як стандартні методологічні підходи.

1. Романова Е. Н. Принцип расчета и картирования влажности почвы на морфометрической основе / Романова Е. Н. // Климат почвы. – Л. : Гидрометеиздат, 1971. – С. 39–51. **2.** Hugget R., Cheesman J. Topography in the Enviroment. – Harlow : Pearson Education, 2002. – P. 274. **3.** Думит Жан Альберт. Исследование морфологической структуры рельефа бассейна р. Кубани на основе цифрового моделирования : автореферат дис. канд. географ. наук. Специальность 25.00.25 – геоморфология и эволюционная география / Думит Жан Альберт. – Краснодар, 2009. **4.** Мещеряков Ю. А. Стукрурная геоморфология равнинных стран. – М. : Наука, 1965. – 390 с. **5.** Рудий Р. М. Методи дослідження рельєфу земної поверхні : автореф. дис. д-ра техн. наук / Р. М. Рудий, Держ. ун-т Львів. політехніка. – Л., 1999. – 32 с. **6.** Байрак Г. Р. Аналіз рельєфу і природокористування рівнин заходу України за аерокосмічними даними : монографія / Г. Р. Байрак. – Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2007. – 296 с. **7.** Evans I. S. General geomorphometry, derivations of altitude, and discriptive statistics // Spatial Analysis in Geomorphology. – L. : Methuen, 1972. – P. 17–90. **8.** Zeverbergen L. W., Thorn C. R. Qvantitative analysis of land surface topography // Earth Syrf. Proc. Land. – 1987. – V. 12. – № 1. – P. 47–56. **9.** Shary P. A. Land surface in gravity points classifscation by complete system of curvatures // Math. Geol. – 1995. – V.27. – № 3. – P. 373–390. **10.** Florinsky I. V. Derivation of topographic variables from a digital elevation model given by a spheroidal trapezoidal grid // International Journal of Geographical Information Science. – 1998. – Vol. 12. – № 8. – P. 829–852. **11.** Мельник В. М. Кількісна стереомікрофрактографія: монографія [Текст] / В. М. Мельник, А. В. Шостак. – Луцьк : Твердиня, 2010. – 460 с. **12.** Бурштинська Х. В. Порівняльний аналіз побудови цифрових моделей рельєфу з використанням апроксимаційних функцій / Бурштинська Х. В. // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2001. – Вип. 61. – С. 137–148. **13.** Соколов В. Н. Использование Фурье-анализа РЭМ-изображений для получения морфологических характеристик микроструктуры / В. Н. Соколов, Д. И. Юрковец, О. В. Разгулина // Изв. РАН. Серия физическая. – 1998. – Т. 62, № 3. – С. 450–454. **14.** Шарый П. А. Топографический метод вторых производных / П. А. Шарый // Геометрия структур земной поверхности. Пущино: ПНЦ АН СССР. – 1991. – С. 30–60. **15.** Волошин В. У. Алгоритм побудови карт пластики рельєфу методом дискретного перетворення Фур'є / В. У. Волошин, Ю. С. Бліндер // Україна та глобальні процеси: географічний вимір : зб. наук. пр. Волин. держ. ун-т ім. Лесі Українки : в 3 т. / відп. ред. П. Г. Шищенко. – Т. 2. – К. , Луцьк, 2000. – С. 398–402. **16.** Флоринский И. В. О точности вычислений в цифровом моделировании рельефа / Флоринский И. В. // Геодезия и картография. – № 6. – 2008. – С. 28–32.

Рецензент: д.с.-г.н., професор Мошинський В. С. (НУВГП)

Melnyk V. M., Doctor of Engineering, Professor, Mendel V. P., Engineer, Rasiun V. L., Post-graduate Student (Lesya Ukrainka Eastern European National University)

MATHEMATICAL MORPHOMETRICS DETERMINATION OF THE LOCAL CHARACTERISTICS BY MEANS OF DFT AND MLS

The possibility of using the algorithm of two-dimensional discrete Fourier transform (DFT) and method of least squares to identify the morphological characteristics (slope, exposition, and curvature) for a plane and spheroidal grid respectively.
***Keywords*: spheroidal grid, discrete Fourier transform.**

Мельник В. М., д.т.н., профессор, Мендель В. П., инженер, Расюн В. Л., аспирант (Восточноевропейский национальный университет имени Леси Украинки)

МАТЕМАТИКО-МОРФОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЛЬЕФА ПО СПОСОБАМ ДПФ И МНК

Показанная возможность использования алгоритма двумерного дискретного превращения Фурье (ДПФ) и метода наименьших квадратов для определения важных морфометрических характеристик (крутизна, экспозиция и кривизна) для плоской и сфероидической сетки соответственно.
***Ключевые слова*: сфероидическая сетка, дискретное превращение Фурьє.**
