

**Серілко Л. С., к.т.н., доцент, Сасюк З. К., к.с.-г.н., доцент,  
Серілко Д. Л., к.т.н., доцент, Сиротинський О. А., к.т.н., доцент,  
Приндюк К. Р., аспірант (Національний університет водного  
господарства та природокористування, м. Рівне)**

### **ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ПЕРЕТВОРЕНИМ СУХИМ ТЕРТЯМ**

**В роботі розглянуто рух твердого тіла по похилій шорсткій поверхні при наявності поперечної сили. Визначено мінімальне значення величини цієї сили для забезпечення руху тіла по площині. Отримані диференціальні рівняння руху цього тіла. Експериментальним шляхом підтверджено результати теоретичних досліджень руху тіла по похилій площині.**

**Ключові слова:** тертя; похила поверхня; диференціальні рівняння.

**Постановка проблеми.** Динамічною моделлю багатьох процесів, в яких використовується вібрація є важке тіло, яке знаходиться на шорсткій поверхні з малим кутом нахилу до горизонту. Якщо величина цього кута менша від величини кута тертя спокою, то рух тіла по площині можливий тільки за рахунок перетвореного сухого тертя. Змінюючи напрямок дії сили тертя внаслідок коливання площини, або самого тіла, чи прикладанням додаткової поперечної сили, можна досягнути переміщення тіла в необхідному напрямку.

Ефект перетворення сухого тертя у в'язке широко використовується в техніці, де поряд з такими негативними його проявами, як занос автомобіля при блокуванні коліс, самовідкручування гайок під дією вібрації існують багато прикладів корисного використання цього явища: переміщення частинок матеріалу всередині мало нахиленої труби для транспортуванні деталей і деяких видах конвеєрів, занурення паль і оболонок в ґрунт і т.д.

**Аналіз досліджень.** Вперше ефект перетворення сухого тертя пояснюється в роботі М.Є. Жуковського [1]. Рух плоского тіла по шорсткій поверхні розглянуто в роботах Сальникова Т.В., Андропова В.В., Ішлинського А.Ю. [2; 3; 4]. Проблема вібраційних переміщень твер-

дих, сипких матеріалів присвячені роботи Блехмана І.І., Джанелідзе Г.Ю. [5], Заїки П.М. [6].

В роботі Пилипаки С.Ф. та ін. [7] наведено результати дослідження руху матеріальної точки по внутрішній поверхні похилого циліндру, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо своєї осі. В результаті чисельного інтегрування диференційних рівнянь руху встановлено, що матеріальна точка здійснює складний рух, коливальний рух по поверхні циліндра та прямолінійний в осьовому напрямку. Амплітуда, частота коливань та осьова швидкість залежать від кутової швидкості обертання циліндра його кута нахилу до горизонту та коефіцієнта тертя між частинкою та поверхнею циліндра.

В результаті теоретичних досліджень впливу коливань [8], перпендикулярних до площини ковзання на коефіцієнт тертя встановлено, що макроскопічний коефіцієнт тертя є функцією лише двох безрозмірних параметрів – швидкості ковзання та амплітуди коливань. Теоретичні дослідження тертя ковзання під впливом плоских коливань, перпендикулярні до напрямку ковзання, наведені в роботі [9]. В цьому випадку встановлено, що жорсткість контакту відіграє центральну роль при малих амплітудах коливання. В роботі [10] наведено результати досліджень впливу нормальних та бокових коливань на енергетичну ефективність руху тіла по поверхні. Встановлено, що рух при наявності поперечних коливань вимагає більше затрат енергії, ніж рух без коливань. У випадку нормальних коливань ці затрати можуть бути меншими при деяких комбінаціях параметрів системи. В роботі [11] наведено огляд існуючих моделей активного контролю статичного тертя на тертя ковзання у випадку нормальних тангенціальних та поперечних коливань.

**Метою нашого дослідження** є визначення кінематичних характеристик руху матеріальної точки по похилій площині при наявності поперечної сили.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо нерухоме важке тіло, яке знаходиться на шорсткій поверхні.

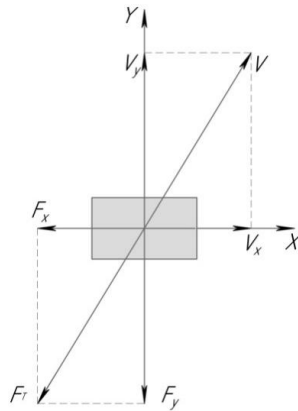


Рис. 1. Схема сил, що діють на тіло, яке знаходиться на горизонтальній шорсткій поверхні

Якщо його необхідно перемістити в певному напрямку, то до тіла прикладають силу  $P$  [8], яка повинна бути більшою за максимальну силу тертя спокою  $F_T = f_0 mg$  (рис. 1). Але в деяких випадках, на практиці, сила  $P$  може бути незначною ( $P \ll f_0 mg$ ). Тоді до тіла можна прикласти силу  $Q$ , яка направлена перпендикулярно до заданого переміщення. Збільшуючи величину сили  $Q$  можна вивести тіло з стану спокою, про цьому воно буде рухатися також вздовж лінії дії сили  $P$ , сила тертя при цьому розкладається на дві складові  $F_x$  і  $F_y$ .

$$F_x = fN \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}, \quad (1)$$

$$F_y = fN \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}, \quad (2)$$

де  $V_x = \dot{x}$  – проєкція вектора швидкості тіла на вісь  $x$ ,  $V_y = \dot{y}$  – проєкція вектора швидкості тіла на вісь  $y$ .

При цьому кожна із складових суттєво відрізняється за своїми властивостях від тертя при прямолінійному русі. Сили цього типу називаються перетвореним сухим тертям. При відносно невеликих швидкостях перетворене сухе тертя проявляється у вигляді лінійного в'язкого тертя

$$(V_y = const, V_x \ll V_y, F_x = -bV_x, b = \frac{fmg}{V_y}).$$

Якщо до тіла прикріплена нитка, яка перекинута через нерухомий блок і до якої прикріплений вантаж вагою  $Q$  (рис. 2), то в початковий момент часу натяг нитки  $T$  буде дорівнювати вазі вантажу  $Q$ . Сила тертя буде рівна  $F_T = f_0 mg \cos \alpha$ .

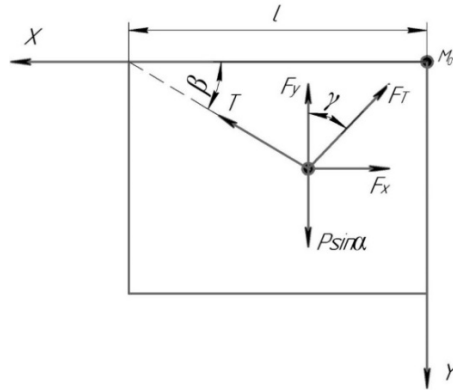


Рис. 2. Розрахункова схема руху матеріальної точки по похилій площині

Прийmemo тіло за матеріальну точку  $M$ , яка займає початкове положення  $M_0$ .

Визначимо мінімальне значення сили  $Q$ , при якій розпочнеться рух тіла з умови його рівноваги в початковому положенні.

$$(P \sin \alpha)^2 + Q^2 = F_T^2 \quad (3)$$

звідси

$$Q > mg \sqrt{(f \cos \alpha)^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (4)$$

Введемо позначення  $Q = qmg$  тоді рівнянн (4) матиме вигляд

$$q = \sqrt{(f \cos \alpha)^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (5)$$

На рисунку 3 наведено графіки залежності величини  $q$  від кута нахилу площини до горизонту  $\alpha$  при різних значеннях коефіцієнта тертя  $f$ .

Визначимо положення точки  $M$  в кінці руху. В цьому випадку рівняння рівноваги у векторній формі матиме вигляд:

$$\vec{T} + \vec{P} \sin \alpha + \vec{F}_T = 0. \quad (6)$$

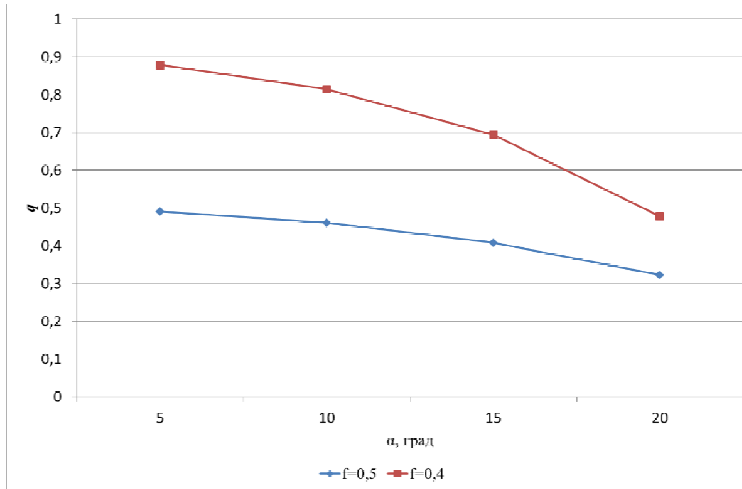


Рис. 3. Графік залежності величини  $q$  ввід кута нахилу площини до горизонту  $\alpha$  при різних значеннях коефіцієнта тертя  $f$

Використовуючи теорему косинусів отримаємо:

$$F_T^2 = T^2 + (P \sin \alpha)^2 - 2TP \cdot \sin \alpha \cdot \cos(90 + \beta). \quad (7)$$

Оскільки  $\cos(90 + \beta) = -\sin \beta$ , то з рівняння (8) отримаємо:

$$\sin \beta = \frac{T^2 + (P \sin \alpha)^2 - F_T^2}{2TP \cdot \sin \alpha}. \quad (8)$$

Якщо  $T = Q = qmg$ ,  $P = mg$ ,  $F_T = fmg \cos \alpha$ , то

$$\beta = \arcsin \left[ \frac{(q^2 + \sin^2 \alpha + (f \cos \alpha)^2)}{2q \sin \alpha} \right]. \quad (9)$$

На рисунку 4 наведено графіки залежності кута  $\beta$  від величини відносної сили тяжіння  $q$  вантажу  $Q$  і коефіцієнта тертя  $f$  при куті нахилу площини до горизонту  $\alpha=20^\circ$ .

Під час руху точки  $M$ , натяг нитки  $T$  буде залежати не тільки від ваги вантажу  $Q$ , але і його прискорення  $\ddot{S}$ .

$$T = \frac{Q}{g} \ddot{S} + Q. \quad (10)$$

З рисунка 2 видно, що довжина нитки  $S$  буде визначатися з рівняння:

$$S^2 = (l - x)^2 + y^2. \quad (11)$$

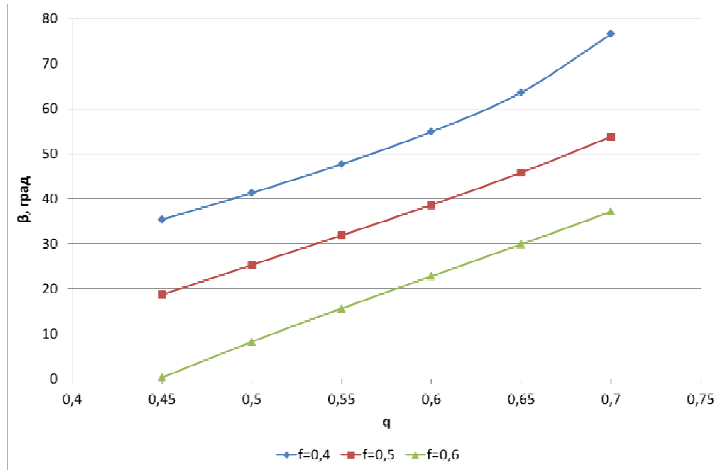


Рис. 4. Графік залежності кута  $\beta$  від величини відносної сили тяжіння  $q$  вантажу  $Q$  і коефіцієнта тертя  $f$  при куті нахилу площини до горизонту  $\alpha=20^\circ$

Продиференціювавши рівняння (12) двічі по часу можна отримати величину прискорення, з яким рухається вантаж  $Q$ .

$$\begin{cases} \dot{S} = \frac{y \cdot \dot{y} - (l-x) \cdot \dot{x}}{S} \\ \ddot{S} = \frac{\dot{x}^2 + (l-x) \cdot \ddot{x} + \dot{y}^2 + y \cdot \ddot{y} - \dot{S}^2}{S} \end{cases} \quad (12)$$

Тоді величина прискорення, з яким рухається вантаж  $Q$  буде рівна  $a_Q = -\ddot{S}$ .

Диференціальні рівняння руху точки  $M$  матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x} = q \left( \frac{\ddot{S}}{g} + 1 \right) \cos \beta - fg \cos \alpha \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}; \\ \ddot{y} = q \left( \frac{\ddot{S}}{g} + 1 \right) \sin \beta + g \sin \alpha - fg \cos \alpha \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \end{cases} \quad (13)$$

де  $\cos \beta = \frac{l-x}{S}$ ;  $\sin \beta = \frac{y}{S}$ .

Оскільки отримана система (13) є суттєво нелінійною, то її можна проінтегрувати лише чисельними методами. На рис. 5 та рис. 6, наведено результати інтегрування, отримані методом Ейлера (крок ін-

тегрування  $\Delta t=0,01$  с).

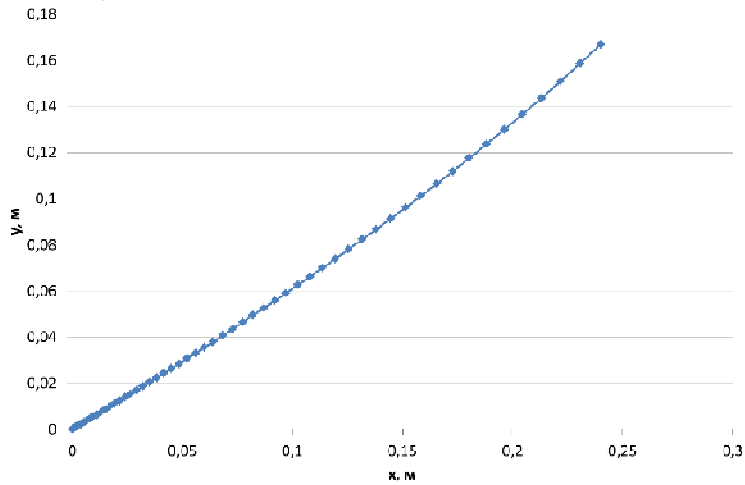


Рис. 5. Залежність між координатами руху точки  
( $q=0,31$ ,  $\alpha=11,5^{\circ}$ ,  $f=0,27$ ,  $l=0,4$  м)

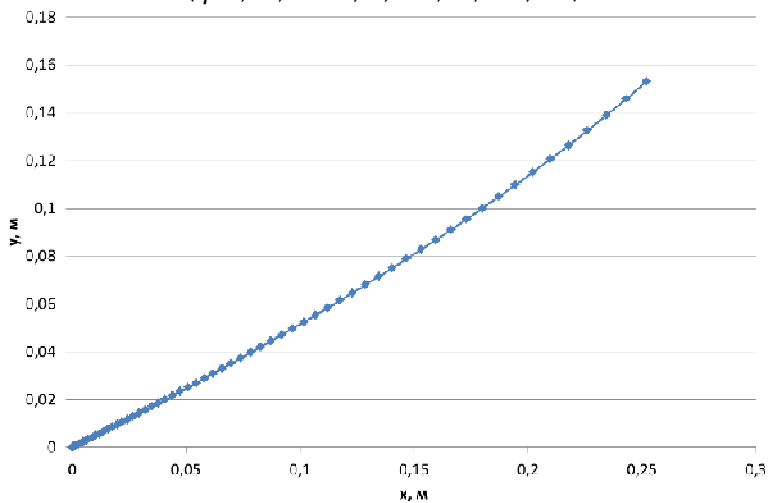


Рис. 6. Залежність між координатами руху точки  
( $q=0,31$ ,  $\alpha=9,5^{\circ}$ ,  $f=0,27$ ,  $l=0,4$  м)

Для проведення експериментальних досліджень була виготовлена лабораторна установка, загальний вигляд якої зображений на рисунку 7.

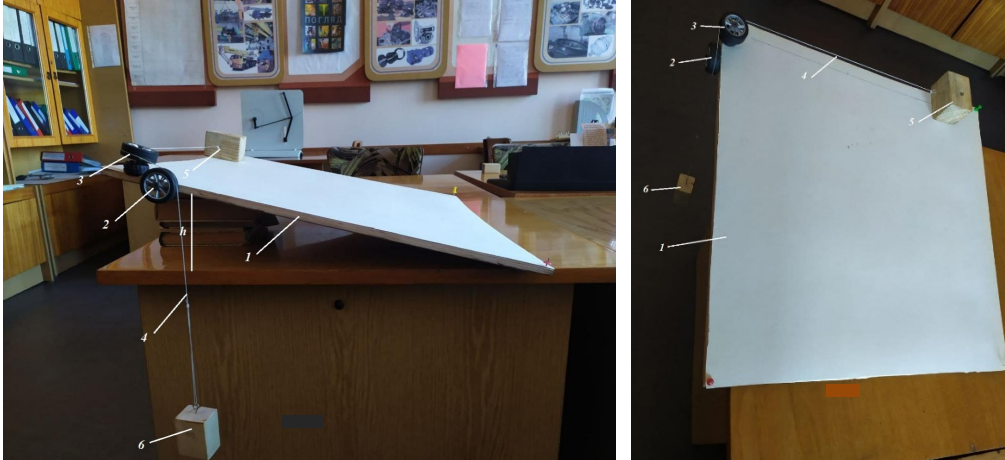


Рис. 7. Лабораторна установка

Вона складається з поверхні 1, встановленої під кутом  $\alpha$  до горизонту, які можна змінювати за рахунок висоти  $h$ . До поверхні 1 прикріплені ролики 2 і 3, через які перекинута нерозтяжна нитка 4. До одного кінця нитки прикріплений вантаж 5, який може ковзати по поверхні 1, а до другого кінця вантаж 6 величину якого можна змінювати.

На першому етапі дослідження визначали величину коефіцієнту тертя між тілом 5 і поверхнею 1. Для цього встановлювали вантаж 5 на поверхню і збільшували величину кута  $\alpha$  до тих пір доки вантаж починав рухатися. Величину коефіцієнта тертя визначали за формулою:

$$f = \operatorname{arctg} \alpha . \quad (14)$$

Результати досліджень наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

№ з/п	$\alpha$ , град	$f$	$f_c$
1	15,6	0,279	0,27
2	14,9	0,266	
3	14,8	0,264	

Після визначення коефіцієнта тертя площину 1 встановлювали під кутом, який менший від величини кута тертя спокою і приклали до нього додаткову силу, при якій він почав рухатися по поверхні. Через деякий час вантаж зупинявся. Координати вантажа в кінцевому положенні отримані теоретичним та експериментальним шля-



хом наведено в таблиці 2.

Дослідження проводили при таких параметрах: маса вантажу 5  $m_1=0,13$  кг, маса вантажу 6  $m_2=0,04$  кг. Кут нахилу площини до горизонту  $\alpha_1=11,5^\circ$ ,  $\alpha_2=9,50^\circ$ .

Таблиця 2

№ з/п	$\alpha,^\circ$	$X_{\text{теор.}}, \text{ м}$	$X_{\text{експ.}}, \text{ м}$	$\delta, \%$	$Y_{\text{теор.}}, \text{ м}$	$Y_{\text{експ.}}, \text{ м}$	$\delta, \%$
1	11,5	0,24	0,205	19,3	0,167	0,13	15,7
2	9,5	0,252	0,197	18,4	0,153	0,126	21,4

**Висновки.** В результаті проведених теоретичних досліджень руху тіла по похилій площині встановлено:

1. Мінімальне значення відносної бокової сили  $q$  знаходиться в межах 0,32...0,87 в залежності від кута нахилу площини до горизонту та коефіцієнту тертя;

2. Кут між горизонтом і лінією, яка проходить через вісь блока і точку, в якій знаходиться тіло кінці руху  $\beta$  знаходиться в межах від  $18^\circ$  до  $78^\circ$  в залежності від кута нахилу площини до горизонту, коефіцієнту тертя та відносної бокової сили  $q$ .

3. Експериментальним шляхом підтверджено результати теоретичних досліджень руху тіла по похилій площині. Похибка складає від 15,7% до 21,4%.

4. Запропоновану методику можна використовувати при проектуванні механізмів, в яких є перетворене сухе тертя, наприклад, при проектуванні конвеєрних систем нового покоління, в тому числі високопродуктивних інерційних конвеєрів.

1. Жуковский Н. Е. Заметка о плоском расसेве : полное собрание сочинений / ред. Котельников А. П. Москва-Ленинград : ОНТИ, 1937. Т.VIII. С. 39–46. 2. Сальникова Т. В., Трещев Д. В., Галлямов С. Р. Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости. *Нелинейная динамика*. Т. 8. № 1. С. 83–101. 3. Андронов В. В. Развитие задачи Н. Е. Жуковского о плоском рассеве. *Наука и инновации : инженерный журнал*. 2013. Вып. 12. 180 с. 4. Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1981. № 4. С. 17–28. 5. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М. : Наука, 1964. 412 с. 6. Заика П. М. Вибрационное перемещение твердых и сыпучих тел в сельскохозяйственных машинах : практ. пособие. Киев : изд-во УСХА. 199 с. 7. Пилипака С. Ф., Грищенко І. Ю., Пилипака Т. С. Дослідження руху частинки по внутрішній поверхні похилого циліндра, що обертається навколо власної осі. *Motrol «Motoryzacja i energetika*

*rolnictwa*». Lublin, 2010. T. 12. B. C. 113–126. **8.** Popov M., Popov V. and Popov N. Reduction of friction by normal oscillations. I. influence of contact stiffness. *Friction* 5. 2017. 45–55. doi: 10.1007/s40544-016-0136-4. **9.** Benad J., Nakano K., Popov V., Popov M. / Active control of friction by transverse oscillations. *Friction* 7. 2018a. 1–12. doi: 10.1007/s40544-018-0202-1. **10.** Benad J., Popov M., Nakano K., Popov V. Stiff and soft active control of friction by vibrations and their energy efficiency. *Forsch. Ingenieurw.* 2018b. 82, 331–339. doi: 10.1007/s10010-018-0281-1. **11.** Popov M. The Influence of Vibration on Friction: A Contact-Mechanical Perspective. *Front. Mech. Eng.* 2020. 6:69. doi: 10.3389/fmech.2020.00069.

## REFERENCES:

1. Jukovskiy N. E. Zametka o ploskom rasseve : polnoe sobranie sochineniy / red. Kotelnikov A. P. Moskva-Leningrad : ONTI, 1937. T.VIII. S. 39–46.
  2. Salnikova T. V., Treschev D. V., Gallyamov S. R. Dvijenie svobodnoy shayby po sherohovatoy gorizontальной ploskosti. *Nelineynaya dinamika*. T. 8. № 1. S. 83–101.
  3. Andronov V. V. Razvitie zadachi N. E. Jukovskogo o ploskom rasseve. *Nauka i innovatsii : inzhenernyy jurnal*. 2013. Vyip. 12. 180 s.
  4. Ishlinskiy A. Yu., Sokolov B. N., Chernousko F. L. O dvijenii ploskih tel pri nalichii suhogo treniya. *Izvestiya AN SSSR. Mehanika tverdogo tela*. 1981. № 4. S. 17–28.
  5. Blehman I. I., Djanelidze G. Yu. Vibratsionnoe peremeschenie. M. : Nauka, 1964. 412 s.
  6. Zaika P. M. Vibratsionnoe peremeschenie tverdykh i syipuchih tel v selskohozyaystvennykh mashinah : prakt. posobie. Kiev : izd-vo USHA. 199 s.
  7. Pylypaka S. F., Hryshchenko I. Yu., Pylypaka T. S. Doslidzhennia rukhu chastynky po vnutrishnii poverkhni pokhyloho tsylindra, shcho obertaietsia navkolo vlasnoi osi. *Motrol «Motoryzacjai energetika rolnictwa*». Lublin, 2010. T. 12. B. S. 113–126.
  8. Popov M., Popov V. and Popov N. Reduction of friction by normal oscillations. I. influence of contact stiffness. *Friction* 5. 2017. 45–55. doi: 10.1007/s40544-016-0136-4.
  9. Benad J., Nakano K., Popov V., Popov M. / Active control of friction by transverse oscillations. *Friction* 7. 2018a. 1–12. doi: 10.1007/s40544-018-0202-1.
  10. Benad J., Popov M., Nakano K., Popov V. Stiff and soft active control of friction by vibrations and their energy efficiency. *Forsch. Ingenieurw.* 2018b. 82, 331–339. doi: 10.1007/s10010-018-0281-1.
  11. Popov M. The Influence of Vibration on Friction: A Contact-Mechanical Perspective. *Front. Mech. Eng.* 2020. 6:69. doi: 10.3389/fmech.2020.00069.
-

**Serilko L. S., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor, Sasiuk Z. K., Candidate of Agricultural Sciences (Ph.D.), Associate Professor, Serilko D. L., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor, Syrotynskyi O. A., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor, Pryndiuk K. R., Post-graduate Student (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)**

## **RESEARCH OF DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH CONVERTED DRY FRICTION**

**The dynamic model of many technological processes can be represented by the movement of the body on a rough surface, which is subject to additional forces that are not directed along the line of the greatest slope. These additional forces can be both kinematic and dynamic.**

**The paper considers the motion of a rigid body on an inclined rough surface in the presence of a transverse force, which is the tension of the thread attached to the load of constant weight. It is established that the presence of such a force has the effect of converting dry friction into viscous friction. The minimum value of this force to ensure the motion of the body in the plane, depending on the angle of its inclination to the horizon and the coefficient of sliding friction.**

**A mathematical model of the motion of a body on an inclined plane has been developed, on which, in addition to the forces of gravity and sliding friction, an additional force acts. The magnitude and direction of the extra force depends on the position of the body on the surface. Since the differential equations of motion of this body are essentially nonlinear, we have solved them by numerical methods. As a result of integration, we obtained dependences between the coordinates of the point at different geometrical parameters of the system, the coefficient of sliding friction and the magnitude of the transverse force.**

**To verify the results of theoretical studies of body motion on an inclined plane in the presence of transverse force, we designed and manufactured a laboratory installation. The results of theoretical studies of body motion on an inclined plane have been confirmed experimentally. The error of research is from 15.7% to 21.4%.**

**The proposed technique can be used in the design of mechanisms in which there is a transformed dry friction. For example, in the**

**design of new generation conveyor systems, including high-performance inertial conveyors.**

**Keywords:** friction; inclined surface; differential equations.

---

**Серилко Л. С., к.т.н., доцент, Сасюк З. К., к.с.-х.н., доцент,  
Серилко Д. Л., к.т.н., доцент, Сиротинский О. А., к.т.н., доцент,  
Приндюк К. Р., аспирант (Национальный университет водного  
хозяйства и природопользования, г. Ровно)**

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ СУХИМ ТРЕНИЕМ**

**В роботі розглянуто рух твердого тіла по похилій шорсткій поверхні при наявності поперечної сили. Визначено мінімальне значення величини цієї сили для забезпечення руху тіла по площині. Отримані диференціальні рівняння руху цього тіла. Експериментальним шляхом підтверджено результати теоретичних досліджень руху тіла по похилій площині.**

**Ключові слова:** тертя; похила поверхня; диференціальні рівняння.

**В работе рассмотрено движение твердого тела по наклонной шероховатой поверхности при наличии поперечной силы. Определено минимальное значение величины этой силы для обеспечения движения тела по плоскости. Получены дифференциальные уравнения движения этого тела. Экспериментальным путем подтверждены результаты теоретических исследований движения тела по наклонной плоскости.**

**Ключевые слова:** трение; наклонная поверхность; дифференциальные уравнения.

---