УДК 539.3

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Оробей В.Ф., Лазарева Д.В., Козолуп Г.Н. *(Одесский национальный политехнический университет, г.Одесса)*

Рассмотрен расчет пространственной рамы, состоящей из тонкостенных стержней, методом граничных элементов. Проведён сравнительный анализ результатов МГЭ и МКЭ.

Результатом количественного описания модели реальной системы обычно является дифференциальное уравнение или их система. Получение решения дифференциального уравнения предполагает учет конкретных свойств той области, которую занимает рассматриваемый объект, и ее границы. При этом как сама область, так и ее граница могут иметь сложную форму, а различные условия, задаваемые на границе (граничные условия), могут быть постоянными, меняться во времени и т.д. Все это приводит к отсутствию стереотипных подходов при решении практических задач, а во многих случаях и к невозможности получить аналитическое решение.

Единственным средством решения дифференциальных уравнений зачастую являются численные методы.

В данной работе используется численно-аналитический вариант МГЭ для расчета напряженно-деформированного состояния стержневой рамы. Метод основан на преобразовании интегральных соотношений метода начальных параметров в систему линейных алгебраических уравнений [1].

Сформируем расчетную схему рамы, нагруженную поперечной нагрузкой из плоскости, разбивая продольные и поперечные стержни на одномерные модули, т.е. построим ориентированный граф рассматриваемой конструкции (рис. 1).

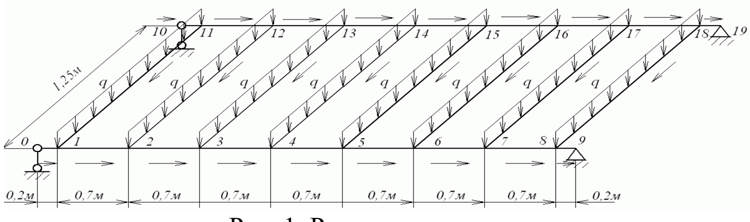

Рис. 1. Расчетная схема рамы

Вырезаем узлы 1, 2, 3, … и составляем уравнения совместности линейных и угловых перемещений, а также уравнения равновесия узлов для поперечных сил, изгибающих моментов, крутящих моментов и бимоментов (сечение элементов рамы – тонкостенные профили двутавра и короба).

Уравнения совместности линейных и угловых перемещений (рис. 2) узла 1:

$$\begin{aligned}
&V^{0-1}(l) = V^{1-2}(0) = V^{11-1}(l);\\
&\varphi^{0-1}(l) = \varphi^{1-2}(0) = \theta^{11-1}(l);\\
&\theta^{0-1}(l) = \theta^{1-2}(0) = -\varphi^{11-1}(l).
\end{aligned} \tag{1}$$

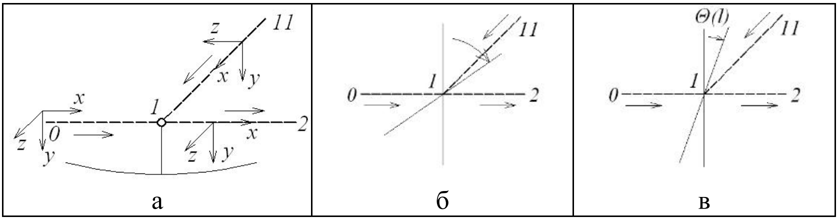

Рис. 2. Перемещения узла 1

Уравнения равновесия узла 1 для поперечных сил (рис. 3,а), изгибающих моментов (рис. 3,б), крутящих моментов (рис. 3,в) и бимоментов (рис. 3,г):

$$\begin{aligned}
&Q^{0-1}(l) = Q^{1-2}(0) - Q^{11-1}(l);\\
&M^{0-1}(l) = M^{1-2}(0) + L^{11-1}(l) =\\
&= M^{1-2}(0) + M_{\omega}^{11-1}(l) + GI_k\theta'^{11-1}(l);\\
&M_{\omega}^{0-1}(l) = M_{\omega}^{1-2}(0) - M^{11-1}(l);\\
&B_{\omega}^{0-1}(l) = B_{\omega}^{1-2}(0).
\end{aligned} \tag{2}$$

Для узлов второго лонжерона записанные выше соотношения примут несколько иной вид.

Уравнения совместности линейных и угловых перемещений (рис. 4) узла 11:

$$\begin{aligned}
&V^{10-11}(l) = V^{11-12}(0) = V^{11-1}(0);\\
&\varphi^{10-11}(l) = \varphi^{11-12}(0) = \theta^{11-1}(0);\\
&\theta^{10-11}(l) = \theta^{11-12}(0) = -\varphi^{11-1}(0).
\end{aligned} \tag{3}$$

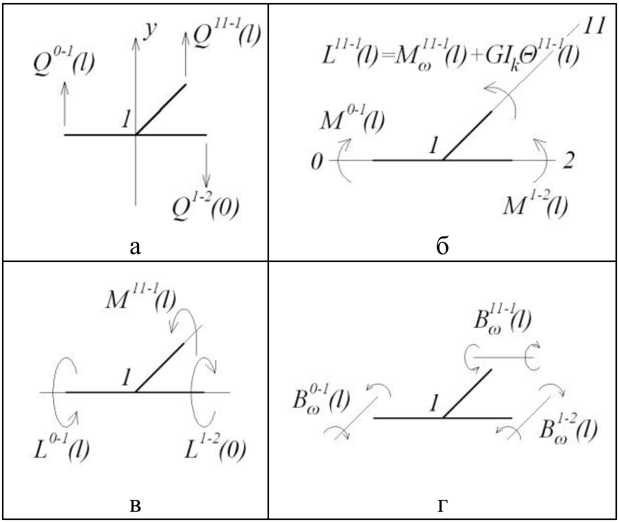

Рис. 3. Равновесие узла 1

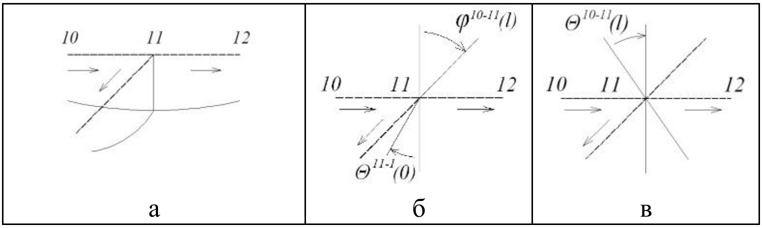

Рис. 4. Перемещения узла 11

Уравнения равновесия узла 11 для поперечных сил (рис. 5,а), изгибающих (рис. 5,б) и крутящих моментов (рис. 5,в):

$$
\begin{aligned}
&Q^{10-11}(l) = Q^{11-12}(0) + Q^{11-1}(0);\\
&M^{10-11}(l) = M^{11-12}(0) - L^{11-1}(0) =\\
&= M^{11-12}(0) - M_{\omega}^{11-1}(0) - GI_k\theta'^{11-1}(0);\\
&M_{\omega}^{10-11}(l) = M_{\omega}^{11-12}(0) + M^{11-1}(0).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Аналогичным образом составляются уравнения совместности перемещений и уравнения равновесия для остальных узлов рамы.

Матричное уравнение имеет вид:

$$\vec{\mathrm{Y}}(x) = \overline{\mathrm{A}}(x)\vec{\mathrm{X}}(0) + \vec{\mathrm{B}}(x). \tag{5}$$

где векторы $\vec{Y}$ и $\vec{X}$ содержат параметры стержней в граничных точках $x = l$ и $x = 0$. Вектор $\vec{B}$ состоит из грузовых элементов всех стержней при $x = l$.

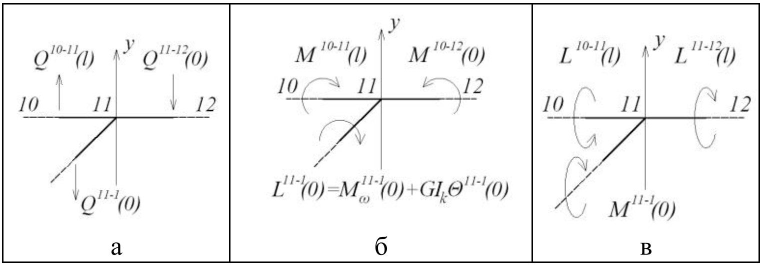

Рис. 5. Равновесие узла 11

Диагональные блоки матрицы $\overline{A}$ — это одинаковые или разные квадратные матрицы ортонормированных фундаментальных функций, описывающих состояние стержней.

Вектор нагрузки $\vec{B}(x)$ строится аналогично векторам $\vec{Y}$ и $\vec{X}$, и включает внешнюю нагрузку всех стержней системы.

Преобразование матриц уравнения (5) выполняются в соответствии со схемой:

$$\vec{Y} = \overline{A}(l)\vec{X}(0) + \vec{B}(l) \to \overline{A}(l)\vec{X}(0) - \vec{Y}(l) = \vec{B}(l) \to \overline{A}_*(l)\vec{X}_*(0,l) = -\vec{B}(l).$$

Матрица $\overline{A}$ содержит граничные значения ортонормированных фундаментальных функций при $x = l_i$ и имеет квазидиагональную структуру.

Сущность схемы преобразования заключается в переносе конечных параметров вектора $\vec{Y}$ на место нулевых параметров вектора $\vec{X}$ [2]. При этом вектор $\vec{Y}$ становится нулевым и исключается из рассмотрения. Матрица A_* обнуляется в отдельных столбцах и в неё вводятся элементы, компенсирующие перенос параметров. Вектор $\vec{X}_*$ уже содержит неизвестные начальные и конечные граничные параметры всех стержней системы, как это и имеет место в методе граничных элементов.

Матрица фундаментальных ортонормированных функций A_* будет квадратной матрицей размером 208x208, а векторы X_*, Y, B состоят из 208 элементов.

Таким образом, решение прямых задач механики линейных систем с помощью уравнений метода начальных параметров сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных начальных параметров стержней.

Данную раму можно рассматривать и методом конечных элементов (МКЭ). Результаты сведены в таблицу 1.

Максимальные напряжения и прогибы

Таблица 1

Метод расчета	Кол-во узлов	Кол-во элементов	Напряжения, МПа	Прогиб, м
МГЭ	20	26	46,0	0,0030
МКЭ	17312	16998	46,4	0,0031

Выводы

Из таблицы следует, что результаты двух методов отличаются незначительно, что свидетельствует, во-первых, о достоверности результатов расчета, а во-вторых, можно оценить эффективность МГЭ относительно МКЭ. Так, для решения задачи по МГЭ нужно решить 208 уравнений, а по МКЭ потребовалось решить более 30000 уравнений. В этом контексте следует вывод о значительном преимуществе МГЭ перед МКЭ.

Summary

We consider the calculation of the space frame consisting of thin rods, the boundary element method. A comparative analysis of the BEM and FEM.

Литература

1. Дащенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. — в 2-х т. — Одесса, ВМВ, 2010.

2. Оробей В.Ф. Статический расчет неразрезной балки методами конечных и граничных элементов / Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г., Лазарева Д.В. — Труды ОНПУ, 2004 г., вып. 2(22).— с.16-18.