

**О ПРИМЕНЕНИИ КРИТЕРИЕВ СООТВЕТСТВИЯ
ПО EN206-1:2000 ПРИ ОЦЕНИВАНИИ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА
В УСЛОВИЯХ ПРЕДПРИЯТИЙ С МАЛЫМИ ОБЪЕМАМИ
ПРОИЗВОДСТВА**

Тур В.В., д.т.н., проф., Дереченник С.С., к.т.н., доц.

Брестский государственный технический университет, Беларусь

Введение

Результаты исследовательских работ, выполненных в 60-70-х гг. прошлого столетия, явились основой новых подходов к нормированию и контролю прочности строительных материалов (в частности, бетона), а как следствие – к разработке новых методов оценивания соответствия свойств материала установленным критериям.

Новая концепция оценивания, внесенная в подавляющее большинство нормативных документов разных стран [1-5], к сожалению, оказалась незамеченной целым поколением практикующих инженеров. Прежде приемка изготовленных партий бетона основывалась на подтверждении того, что фактические значения прочности, полученные в испытаниях опытных образцов, превышают некоторое установленное значение *минимальной прочности*. В новой концепции эта идея была заменена статистическим подходом, базирующимся на назначении допустимой доли (порции) т.н. «дефектного» материала в гипотетически бесконечной выборке для всего бетона данного класса, и оценивании этой *доли дефектов* по т.н. выборочным планам. Формально термин «требуемое значение минимальной прочности» (по АСІ 214R [3]) был заменен термином «характеристическая прочность» (по EN 1990).

По концепции EN 206-1 ([1]), качество производимого бетона контролируется по *критериям соответствия*. В рамках этой концепции контрольные выборочные планы составляют таким образом, чтобы с использованием установленных процедур статистического моделирования (в частности, с применением т.н. фильтрационных, или операционных характеристических кривых – англ. *operating characteristic line*) существовала возможность оценивания соответствия выделенного свойства произведенного бетона назначенным требованиям. Наиболее важным свойством бетона, для которого следует проверять соответствие, является его прочность при сжатии, поэтому большинство контрольных выборочных планов разрабатывается именно для этого свой-

ства. В соответствии с EN 1990 ([2]) прочность бетона является базисной переменной, которую, в рамках метода частных коэффициентов, представляют ее характеристическим значением.

При этом *характеристическая прочность бетона* (f_{ck} , Н/мм²) – значение прочности, устанавливаемое с учетом статистической изменчивости с обеспеченностью 0,95 для *гипотетически бесконечной* выборки (популяции) результатов испытаний. Прочность бетона, как физическая величина, не определяется некоторым детерминированным значением, а может быть представлена лишь как непрерывная случайная величина (вероятность определения *точного* значения такой величины равна нулю). Таким образом, для проектных целей характеристическая прочность бетона, являющаяся некоторым допустимым нижним пределом прочности, принимается как 5% - квантиль теоретического распределения прочности бетона рассматриваемого класса. Следует отметить, что в отличие от методов выборочного контроля, применяемых, например, в машиностроении или электронике, прочность бетона, как контролируемая характеристика свойства, может быть определена исключительно по результатам *разрушающего* контроля опытных (или контрольных) образцов. Поэтому при оценке качества бетона контролю может быть подвергнуто только ограниченное количество образцов, изготовленных из одной *пробы* бетона, взятой из одной произведенной партии¹. Тем самым изначально исключена возможность сплошного контроля (как всего бетона в партии, так и всех произведенных партий). При назначении планов выборочного контроля (англ. sampling inspection plan) принимают во внимание то обстоятельство, что изготовление и испытание контрольных образцов (кубов, цилиндров) является трудоемкой и дорогостоящей процедурой. Исходя из этого, размеры выборки, включающих опытные образцы, изготовленные из одной пробы, стараются ограничить, равно как и частоту отбора проб. Вместе с тем, при назначении критериев соответствия стараются максимально исключить, по возможности, неопределенности статисти-

¹ Здесь следует обратить внимание на одно важное обстоятельство. В некоторых переводах существует неверная трактовка термина «проба» (sample), что далее дает неверное представление о термине «единичный результат испытания». В контексте EN 206-1:2000, как впрочем, и ACI 214R, *проба* означает ограниченный объем бетона, отобранный из произведенной партии, из которого приготавливают не менее двух контрольных образцов – кубов или цилиндров (*specimen's*). Среднее значение из результатов испытаний этих образцов дает единичный результат испытания прочности для пробы. Это значение участвует в статистическом оценивании.

ческого оценивания, основанного на случайных выборках результатов испытаний из популяции.

Важно отметить и еще один достаточно серьезный недостаток оценивания выборок, составленных из результатов испытаний прочности бетона. В соответствии с действующими стандартами, контрольные образцы (кубы, цилиндры) испытывают в возрасте 28 суток. Полученные результаты испытаний могут быть использованы, главным образом, для подтверждения запланированной ожидаемой прочности – как правило, уже после возведения конструктивного элемента.

В течение последних нескольких десятилетий наблюдается значительный прогресс в разработке статистических методов оценивания качества бетона по критериям соответствия, основанных на планах выборочного контроля качества бетона и соответствующих операционных характеристиках [6-8]. Применяемая теория выборок дает возможность сделать заключение об ожидаемом качестве (соответствии) проверяемой партии по результатам испытания отдельной пробы, выбранной из данной партии. Следует отметить, что такие выборочные оценки всегда содержат т.н. несовершенства или неопределенности.

***Критерии, применяемые при оценивании соответствия
с использованием планов выборочного контроля***

Как следует из комментариев к EN 206-1, опубликованных в различных источниках [6-9,12], правила оценивания прочности бетона по критериям соответствия базируются на обработке выборок данных, полученных при компьютерном моделировании случайных наборов чисел (метод симуляций), а также в процессе анализа реальной продукции бетонных заводов Европы. В работе [17] при разработке критериев анализировали выборочные данные, полученные по различным видам производств, условно разделенных на четыре группы:

- крупные (large volume) стабильные предприятия;
- крупные нестабильные предприятия;
- мелкие (low volume) предприятия, на которых отбор проб производят *регулярно*;
- мелкие предприятия, выполняющие отбор проб *нерегулярно*.

Результаты анализа показали, что наибольший риск производителя присущ крупным, сильно загруженным предприятиям, на которых отбор проб выполняется с высокой частотой. Это обусловлено наличием риска поставки определенной партии т.н. «дефектного» бетона прежде, чем любая из проблем, влияющих на его качество (а, в частности, на прочность) будет выявлена и устранена, либо скорректирована до приемлемого уровня.

Как следует из п. 9.1 EN 206-1, система производственного контроля включает в себя контроль соответствия. Вместе с тем, EN 206-1 утверждает, что производитель должен организовать систему производственного контроля независимо от контроля соответствия. Поэтому для исключения неоднозначной трактовки будем использовать термин «производственный контроль» (англ. *production control*) только в тех случаях, когда выполняются действия, направленные на обеспечение текущего контроля качества продукции (например, CUSUM [3] и т.д.).

В соответствии с концепцией EN 206-1, производитель при поставке должен нести ответственность за то, что поставляемый на рынок бетон соответствует спецификации. Это общее требование Директивы 106/ЕС, направленное на исключение поставок некачественных материалов, не удовлетворяющих установленным критериям соответствия. Как было показано в наших работах, например [13], в случае поставок бетона имеет место парадоксальная ситуация: поставляя бетонную смесь, производитель обязан гарантировать качество затвердевшего (впоследствии) бетона. Компромисс был найден в соглашении о том, что бетон поставляется на рынок с декларируемым классом прочности по спецификации, и производитель (поставщик) должен в обязательном порядке информировать потребителя, если в последующих испытаниях отобранных проб бетона будет обнаружено несоответствие. Таким образом, правила контроля качества бетона по EN 206-1 сформулированы на основе подхода, согласно которому только собственно производитель выполняет проверку соответствия. Как отмечается в работе [17], любые изменения в принятом подходе потребуют значительных, фундаментальных корректировок принятых правил оценивания соответствия. Вместе с тем, положения EN 206-1 допускают, что потребитель (заказчик) может выполнить испытания поставляемого бетона по критерию идентичности заявленному классу (см. табл. 1).

Согласно п. 8.2.1.3 EN 206-1:2000 (СТБ EN 206-2009) подтверждение соответствия прочности бетона следует выполнять по результатам испытаний образцов в возрасте 28 суток:

- по выборке из «*n*» последовательных неперекрывающихся или перекрывающихся результатов f_{cm} (критерий 1);

- по каждому отдельному индивидуальному результату испытания f_{ci} (критерий 2).

Считается, что соответствие прочности бетона обеспечено при выполнении обоих критериев, указанных в табл. 1. Представленные критерии имеют различные уровни научного обоснования: основное внимание уделено критерию 1 – применительно к контролю соответствия

прочности бетона в установившемся производстве, а его пригодность для начального производства обоснована крайне ограниченно.

Табл.1. Критерии соответствия прочности бетона при сжатии [1]

Характеристика производства	Количество « n » результатов испытаний прочности	Критерий 1	Критерий 2
		среднее из « n » результатов (f_{cm}), Н/мм ²	Каждый отдельный (индивидуальный) результат (f_{ci}), Н/мм ²
Начальное	3	$\geq f_{ck} + 4$	$\geq f_{ck} - 4$
Установившееся (постоянное)	15	$\geq f_{ck} + 1,48\sigma$	$\geq f_{ck} - 4$

Примечание. Стандартное отклонение σ определяется по выборке не менее 35 единичных результатов испытаний, полученных за оценочный период, составляющий не более 3 месяцев и предшествующий периоду изготовления, в течение которого производят оценку соответствия

В рамках принятых в EN 206-1:2000 контрольных планов, частота (периодичность) отбора проб для начального и установившегося производства определяется, как приведено в табл. 2.

Табл.2. Минимальная периодичность отбора проб для оценки соответствия прочности бетона [1]

Характеристика производства	Минимальная периодичность отбора проб		
	первые 50 м ³ произведенного бетона	после первых 50 м ³ произведенного бетона	
		сертифицированное производство	не сертифицированное производство
Начальное	3 пробы	1 / 200 м ³ или 2 раза за производственную неделю	1 / 150 м ³ или 1 раз за производственную неделю
Установившееся (постоянное)		1 / 400 м ³ или 1 раз за производственную неделю	

Критерии оценивания для установившегося производства, достаточно полно описанные в работах [6-8] и рассмотренные в нашей ста-

тье [13], выглядят вполне обоснованными для крупных производств с непрерывным технологическим процессом. Вместе с тем, критерии, установленные для начального производства, практически не комментируются в научно-технических изданиях, и порождают целый ряд вопросов для практикующего инженера. Ниже в краткой форме проведен анализ этих критериев и сформулированы предложения по оцениванию соответствия прочности бетона, изготавливаемого на предприятиях с т.н. малыми объемами производства.

**Критерии оценивания соответствия
для начального производства**

Как следует из табл. 1, на стадии начального (первичного) производства, длящегося, по концепции EN 206-1, до накопления как минимум 35 единичных результатов, применяются: критерий 2 – для оценивания единичного результата испытаний прочности ($f_{ci} \geq f_{ck} - 4$) и критерий 1 – для оценивания среднего из трех последовательных перекрывающихся или неперекрывающихся результатов ($f_{cm,3} \geq f_{ck} + 4$). Эти критерии предложено применять в том случае, когда стандартное отклонение для конкретного производства неизвестно.

Как показано в работе [18], риск несоответствия по обобщенному критерию EN 206-1 для начального производства является достаточно высоким (см. табл. 3).

Табл.3. Вероятность (%) несоответствия с требования критериев EN 206-1:2000 для начального производства (по данным [18])

Положение нижней квантили, М	Нормальное распределение		
	при стандартном отклонении, Н/мм ²		
	3,0	4,0	5,0
1,64σ	28,41	11,11	6,25
2,00σ	10,45	3,81	1,62
2,33σ	4,08	1,01	0,25

При малых стандартных отклонениях существует значительный риск несоответствия критериям начального производства даже при $M = 2,33\sigma$ (значение нижней квантили, близкой к расчетной прочности бетона согласно EN 1992-1-1). Это будет наиболее ощутимым для бетонов низких классов: выполнение таких весьма жестких критериев приведет к заведомо неэкономичным результатам для производителя.

По-существу, индивидуальный критерий (вида $f_{ci} \geq f_{ck} - 4$, по концепции EN 206-1) является некоторым абсолютным критерием,

который применяется как для начального, так и для установившегося производства. Критерий 2 принято также представлять в виде:

$$f_{ci} \geq f_{ck} - k_2, \quad (1)$$

где k_2 – некоторое допустимое отклонение критерия от характеристической прочности бетона (Н/мм²).

Отметим, что в нормах различных стран предложено применять различные значения k_2 в критерии 2 (см. табл. 4)

Табл.4. Критерии для оценивания начального производства по нормам различных стран

Источник	Критерий 1		Критерий 2
	среднее значение из группы результатов ^{*)} $f_{cm,n}$, Н/мм ² , не менее чем		любой индивидуальный результат f_{ci} , Н/мм ² , не менее чем
EN 206-1:2000 (независимо от класса бетона по прочности)	$f_{ck} - 4$		$f_{ck} + 4$
IS 456 : 2000 при классе бетона: C ¹⁶ / ₂₀ и ниже C ²⁰ / ₂₅ и выше	$f_{ck} - 3$		$f_{ck} + 3$
	$f_{ck} - 4$		$f_{ck} + 3$
CEDT 4/8/2 (Hong Kong) при классе бетона: C ¹⁶ / ₂₀ и ниже C ²⁰ / ₂₅ и выше	C ₁	$f_{ck} - 2$	$f_{ck} + 7$
	C ₂	$f_{ck} - 2$	$f_{ck} + 5$
	C ₃	$f_{ck} - 2$	$f_{ck} + 3$
* Примечание. Для EN 206-1 – группа из любых последовательных результатов испытаний с $n = 3$; для IS 456: 2000 и CEDT 4/8/2 – $n = 4$			

Анализ показывает, что как EN 206-1:2000 [1], так и другие нормы не содержат ясных подходов к назначению критериев, применяемых для оценивания т.н. «малых» производств (*low-volume production*), изготавливающих бетон отдельными относительно малыми партиями. На практике это зачастую сводится к эпизодическому производству различных объемов бетона одного класса. Введение т.н. «семейств» бетонов, с позиций статистического оценивания, ситуацию не меняет.

В соответствии с EN 206-1:2000 в таких случаях рекомендовано выполнять проверки соответствия по критериям, установленным для начального производства [1]. Это, несомненно, ведет к тому, что «малый» производитель оказывается в экономически невыгодных условиях по отношению к крупному производителю. Кроме того, как показывает опыт, в некоторых случаях для хорошо работающего малого производства не удастся накопить 35 единичных результатов в течение оценочного периода – при установленных в нормах правилах, касающихся частоты отбора проб.

Как показано в [14,15], для производств, изготавливающих относительно малые объемы бетона, концепция оценивания процента (доли) «дефектов» *представляет скорее академический интерес*. Например, в ситуации, когда поставщик производит в среднем 2% т.н. «дефектного» бетона и для поставки заказано 100 миксеров бетона, предполагается, что два из них будут неудовлетворительными, а оставшиеся 98 – будут удовлетворять назначенным критериям. Однако поскольку имеет место случайная вариация, то, соответственно, нет гарантии, что «дефектный» бетон действительно будет поставлен на строительную площадку, и наоборот – что 3 или 4 миксера будут содержать этот «дефектный» бетон. Согласно [15] вероятность P_d поставки d дефектных партий в T партиях, при условии, что все они извлечены из гипотетически бесконечной производимой популяции, содержащей общую долю дефектов p (%), может быть рассчитано как:

$$P_d = \frac{T! (1-p)^{T-d} p^d}{d! (T-d)!} . \quad (2)$$

Принимая концепцию оценивания соответствия по выявленной доле дефектов, непременно приходится иметь дело с анализом выборок или групп результатов, входящих в назначенный выборочный план. При этом в EN 206-1, ACI 214R и др. стандартах оценивание выполняется как по единичному результату испытаний (критерий 2), так и по среднему значению из « n » последовательных результатов испытаний (критерий 1, например, $n = 3$ для EN 206-1 и $n = 4$ для ACI 214R). При этом, как было показано ранее, согласно EN 206-1 невыполнение любого из двух критериев ведет к выбраковке партий, входящих в оцениваемую группу. В результате возникает неоднозначная ситуация для оценивания. Так, для практикующего инженера трудно найти логичное объяснение тому, что партия бетона, которая еще вчера была принята как пригодная при оценивании по критерию единичного результата испытания прочности, уже сегодня не является таковой по результатам оценивания выборки из « n » последовательных результатов. Оче-

видно, что эта проблема является общей для методов, содержащих критерии, основанные на оценивании выборок (или групп). Как следует из [14], на практике критерий 1, являющийся центральным критерием EN 206-1, часто просто игнорируется как производителем, так и потребителем. Так, в американской практике отмечается [3], что невыполнение критерия 1 следует рассматривать скорее как некоторый «индикатор» (или «сигнальную лампочку») в производственном процессе, но не повод, по которому следует отбраковывать всю группу как неудовлетворительную (безусловно, если выполнен критерий 2 для единичных результатов испытания прочности).

Например, если испытаны трех партии и все единичные результаты удовлетворяют критерию 2, а среднее из трех испытаний, напротив, не удовлетворяет критерию 1, то логично предположить следующее:

- либо т.н. «дефектные» партии (если они действительно существуют) расположились «между» тех партий, которые были отобраны для контроля и оказались удовлетворительными по критерию 2;

- либо эти «дефектные» партии должны появиться при последующем производстве (однако гарантированное их обнаружение возможно лишь при сплошном контроле).

Таким образом, дефектные партии весьма вероятно могут оказаться среди тех партий, которые либо не подвергались испытаниям, либо не будут им подвергаться (эта вероятность, конечно, зависит и от частоты отбора проб, определенной выборочным планом). В таком случае возникает вопрос, на основании каких соображений должны быть отбракованы партии, удовлетворяющие критерию 2, и как выявить дефектные партии среди тех, которые не подвергнуты испытаниям, но поставлены на строительный объект? Данный вопрос может быть сформулирован и по-другому: где в таком случае располагаются дефектные партии, которые подобным образом оказывают влияние на средний результат и почему по данному критерию отбраковывается целая группа результатов?

В силу названных обстоятельств, в работе [14] сделан вывод, что правила EN 206-1:2000 «непрактичны, нелогичны и дают непредсказуемый результат...»². Одной из причин, приводящих к такому выводу, является отсутствие единого методического подхода к назначению критериев как для начального, так и для установившегося производства (хотя в обоих случаях требуется выполнить оценку соответствия

² “The current BS EN 206-1 rules are impractical, illogical, give unpredictable results and put too much concrete at risk on single decision” A. Beal [14]

произведенного бетона по характеристической прочности или доле дефектов в генеральной совокупности).

Оценка положения квантилей распределений с использованием непараметрических статистик

Как следует из приведенного выше анализа, основными проблемами статистического контроля качества бетона, производимого небольшими партиями, являются:

а) малый объем выборки испытываемых образцов (выполненных измерений X_i), что обуславливает низкую доверительную вероятность получаемых статистических оценок;

б) отсутствие априорных сведений об объекте контроля, что не позволяет сделать сколь-нибудь уверенные предположения о виде распределения вероятности $F(x)$ измеряемого параметра прочности x .

В данных условиях применение широко известных параметрических способов статистической обработки малоэффективно (например, используемые обычно оценки математического ожидания и дисперсии оптимальны лишь для нормальных случайных чисел). Альтернативой может стать применение непараметрических, например ранговых (порядковых) статистик, которые, во-первых, совершенно не зависят от вида распределения $F(x)$ случайной величины, а во-вторых – имеют развитые функциональные возможности [19].

Подобные попытки предприняты в стандарте ISO 12491:1997 Статистические методы контроля качества строительных материалов и изделий. Так, в § 6.6 данного стандарта в качестве метода оценки квантилей предлагается простейшая процедура, основанная на порядковых статистиках. Выборку измерений X_1, X_2, \dots, X_n следует преобразовать в вариационный ряд $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, а затем определить оценку квантили X_p уровня p в виде $X_p = X_{(k+1)}$, где k – целое число, удовлетворяющее неравенству $k \leq np < k + 1$.

Приведенное в стандарте соотношение для плотности распределения оценки квантили малоприменимо на практике, поскольку содержит вероятностные функцию и плотность распределения совокупности (если речь идет о локальной, т.е. оцениваемой совокупности, то эти параметры априори неизвестны, а генеральная совокупность, как отмечалось ранее, является гипотетической). Далее в § 6.6 стандарта изложены рекомендации по оценке квантилей для малых значений n (вплоть до $n = 3$), основанные на предположении о нормальном распределении

совокупности, а потому не имеющие никакого отношения к математическому аппарату порядковых статистик.

Помимо того, что получаемые в результате оценки являются точечными, а потому ненадежными, данная процедура малоэффективна при небольших объемах выборки (т.е. в большинстве практических случаев). Так, при выполнении соотношения $np < 1$ оценка квантили всегда будет совпадать с первым членом вариационного ряда $X_{(1)}$ и будет скорее завышенной, т.к. результаты измерений, близкие к значению квантили невысокого уровня, крайне редко вообще попадут в небольшую выборку. Поэтому истинное значение квантили почти всегда будет существенно меньше минимального значения в выборке. Поскольку вероятность превышения любым отдельным измерением значения квантили X_p очевидно равна $1 - p$, вероятность превышения этой же квантили всеми n измерениями составит $(1 - p)^n$. Например, если выполнено $n = 6$ измерений, истинная квантиль $X_{0.05}$ не превысит $X_{(1)}$ с вероятностью 0.735 (т.е. почти в $\frac{3}{4}$ случаев). Чтобы утверждать, что квантиль X_p войдет в диапазон, покрываемый выборкой измерений $X_{(1)} \dots X_{(n)}$, с вероятностью не менее $\frac{1}{2}$, необходимо выполнение условия $n \geq \log 0.5 / \log(1 - p)$. Для типичного значения $p = 0.05$ имеем: $n \geq 14$. Практическую актуальность, однако, имеет задача оценки положения хотя бы медианы квантили в ходе анализа существенно меньших выборок ($n = 4 \dots 10$).

Для решения этой задачи предлагается использовать способ интервального оценивания квантилей, основанный на свойствах непараметрических статистик [19]. Квантиль X_p уровня p может быть определена как принадлежащая доверительному непараметрическому интервалу $[X_{(r)}, X_{(s)}]$ с вероятностью (коэффициентом доверия):

$$\gamma_{(r,s)} = \Pr\{\tilde{F}(X_{(r)}) \leq p \leq \tilde{F}(X_{(s)})\} = I_p(r, n - r + 1) - I_p(s, N - s + 1), \quad (3)$$

где $I_p(a, b)$ – неполная бета-функция Пирсона:

$$I_p(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^p z^{a-1} (1-z)^{b-1} dz. \quad (4)$$

Если все ранги вариационного ряда целые (в ряду отсутствуют т.н. «связки» из совпадающих измерений), гамма-функция вычисляется как

$\Gamma(a) = (a-1)!$ и соотношение (3) сводится к биномиальному распределению и может быть представлено следующим образом:

$$\gamma_{(r,s)} = \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}. \quad (5)$$

В частности, если интервалы определены соседними статистиками $X_{(r)}$ и $X_{(r+1)}$, выражение еще более упрощается:

$$\gamma_{(r,r+1)} = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}. \quad (6)$$

С использованием (6) в табл. 5 выполнен расчет вероятностей $\gamma_{(r,r+1)}$ для выборки из 6 измерений (вероятности расположения квантили ниже $X_{(1)}$ и выше $X_{(6)}$ вычисляются, соответственно, как $\gamma_{(\dots 1)} = (1-p)^6$ и $\gamma_{(6 \dots)} = p^6$).

Табл.5. Вероятности принадлежности квантилей непараметрическим интервалам

Вероятность $\gamma_{(r,r+1)}$ принадлежности интервалу $[X_{(r)}, X_{(r+1)}]$						
$\gamma_{(\dots 1)}$	$\gamma_{(1,2)}$	$\gamma_{(2,3)}$	$\gamma_{(3,4)}$	$\gamma_{(4,5)}$	$\gamma_{(5,6)}$	$\gamma_{(6 \dots)}$
значения для квантили уровня $p = 0,025$:						
0,859	0,132	0,008	2,9E-4	5,6E-6	5,7E-8	2,4E-10
значения для квантили уровня $p = 0,05$:						
0,735	0,232	0,031	0,002	8,5E-5	1,8E-6	1,6E-8
значения для квантили уровня $p = 0,10$:						
0,531	0,355	0,098	0,015	0,001	5,4E-5	1,0E-6

Вероятность попадания квантилей в «верхнюю» часть вариационного ряда очень мала, и, напротив, их нахождение ниже минимального значения выборки весьма правдоподобно. Поскольку медиана распределения находится вне диапазона вариационного ряда, идентификация функции $G(X_p)$ или плотности распределения квантили, например, путем построения гистограммы, не представляется возможной. Лишь в случае $p = 0.10$ можно заключить, что медиана квантили расположена «вблизи» нижней границы ряда: $\bar{X}_p \approx X_{(1)}$.

Непараметрическая статистическая оценка положения квантилей, не покрываемых размахом эмпирической выборки

Квантили невысоких ($p \leq 0.05$) уровней соответствуют области наименьших возможных, т.е. экстремально низких значений прочности бетона (каковые, собственно, и являются критичными с точки зрения выбраковки партий бетона). Известно, что экстремальные статистические распределения допускают хорошую аппроксимацию т.н. «степенными» законами [20]. Логично поэтому предположить, что распределение $G(X_p)$ квантили X_p также пригодно для некоторой аппроксимации в области малых x , т.е. в левой «хвостовой» части распределения $F(x)$.

Точечные оценки вероятностей того, что квантиль не превышает значений $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ вариационного ряда, находим с использованием соотношения (5) либо путем суммирования вероятностей, рассчитанных как в таблице 5:

$$G(X_{(1)}) = \gamma_{(\dots 1)}; \quad G(X_{(r+1)}) = G(X_{(r)}) + \gamma_{(r, r+1)}. \quad (6)$$

На рис. 1 представлена зависимость параметра x прочности бетона от кумулянты $1 - G(X_{0.05})$, полученная для следующей исходной выборки измерений прочности 6 тестовых образцов бетона: 41, 52, 37, 49, 47 и 51 Н/мм². Так как вероятность принадлежности квантили диапазону значений вариационного ряда при малых n невелика (в данном случае: 0,265), оценку квантили снизу ($\tilde{X}_{p, \beta}$) с более высоким коэффициентом доверия $\beta = 1 - G$ (например, $\beta = 0.5$ соответствует медиане квантили) выполним путем подходящей экстраполяции тренда полученной зависимости. Простейшая линейная экстраполяция по отсчетам $X_{(2)}$ и $X_{(1)}$ дает оценку $\tilde{X}_{0.05; 0.5} = 34.2$ Н/мм², а логарифмическая (по трем наименьшим отсчетам выборки: $X_{(3)}$, $X_{(2)}$ и $X_{(1)}$) – $\tilde{X}_{0.05; 0.5} = 35.5$ Н/мм² (нелинейное уравнение при этом содержит слагаемое 34.1 Н/мм², которое является асимптотой для параметра x). Для обоснованного выбора наилучшей схемы экстраполяции требуются, однако, дополнительные исследования.

Примечательно, что в обеих схемах экстраполяции не участвовали три наибольших отсчета исследуемого вариационного ряда (затруднительно предложить какую-либо разумную схему экстраполяции с их использованием). Данный факт означает, что на положение квантили

невысокого уровня решающее влияние оказывает только лишь «левая» часть распределения $F(x)$ измеряемого параметра. В то же время, широко используемые параметрические способы оценивания квантилей основываются на выборочных статистиках (среднем, дисперсии), которые зависят от всех значений выборки. Например, следуя рекомендациям стандарта ISO 12491:1997, для той же самой исходной выборки из 6 результатов измерений находим: среднее значение $46,17 \text{ Н/мм}^2$, среднеквадратическое отклонение $5,95 \text{ Н/мм}^2$ и табличный коэффициент $k = 1,75$ (соответствующий заданным вероятностям $p = 0.05$ и $\beta = 0.5$). Результат расчета оценки ($46,17 - 1,75 \times 5,95 \cong 35,8 \text{ Н/мм}^2$) хорошо согласуется с одной из найденных выше непараметрических оценок, но оказывается весьма неустойчивым к изменениям в «верхней» части ряда – например, прирост наибольших значений на $7 \dots 10 \text{ Н/мм}^2$ снижает прежнее значение до 33 Н/мм^2 и менее. Повидимому, данный эффект можно исключить, если расчет основывать на медианном значении выборки измерений (вместо выборочного среднего), а также на оценке дисперсии, выполненной только лишь по «левой» части вариационного ряда.

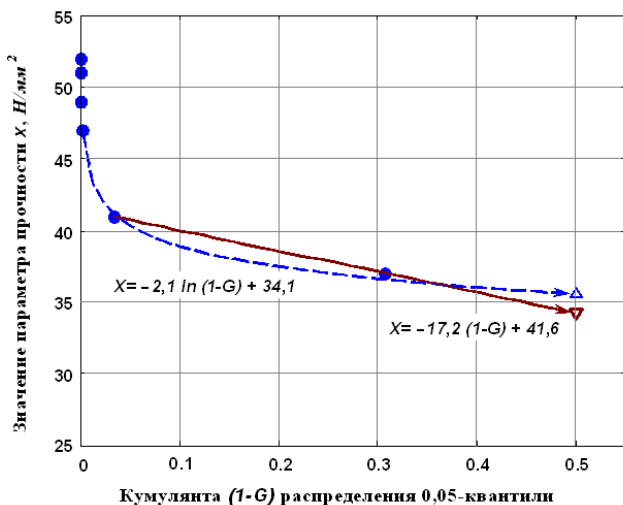


Рис.1. Использование вероятностного распределения кумулянты $1-G(X_p) = \beta$ квантили X_p уровня $p = 0.05$ для оценки снизу $\tilde{X}_{p,\beta}$ ее медианы ($\beta = 0.5$) методом линейной (сплошная линия) и логарифмической (пунктирная линия) экстраполяции

Заключение

Представленный анализ подходов к оцениванию качества производимого бетона с использованием планов выборочного контроля позволяет сделать следующие выводы:

1. Критерии соответствия, разработанные на основе теории выборок и внесенные в EN 206-1 (2000), позволяют осуществлять контроль качества бетона с использованием выборочных планов и сопутствующих операционных характеристик (фильтрационных кривых) и позволяют достаточно адекватно осуществлять контроль качества для установившегося (непрерывного производства).

2. Нормативные документы EN 206-1 (2000) и ACI 214R-02 (2004) не содержат обоснованных критериев для оценивания малых партий бетона, производимого эпизодически.

3. Методы порядковых статистик, в частности способ интервального оценивания квантилей, применимы для анализа положения квантилей заданного уровня, в том числе в случае «малых» выборок результатов испытаний прочности материала. Оценка квантили снизу, с заданным коэффициентом доверия, при малых объемах выборки может быть получена путем линейной или нелинейной экстраполяции кумулянты распределения квантили. Выбор эффективной экстраполирующей функции требует проведения дополнительных исследований. Независимо от вида функции, экстраполяция осуществляется по 2-3 первым (наименьшим по величине) отсчетам вариационного ряда результатов измерений. Таким образом, контроль качества малых партий бетона с точки зрения обеспечения характеристических значений его прочности, может основываться только лишь на наихудших результатах, полученных в ходе испытаний образцов.

Summary

A view of conceptual approaches to assessment of compliance concrete strength is presented. Analysis was showed, that compliance criteria may be adopted for stable large-volume productions, but no recommendation, what are connected with low-volume productions. The possibility of usage method of range statistics to assessment of concrete strength is shown.

Литература

1. EN 206-1 (2000) Concrete – Part 1: Specification, performance, production and conformity. European Standard, CEN.
2. EN 1990 (2004). Basis of Structural Design. European Standard, CEN.

3. ACI 214R-02 (2004) Evaluation of Strength Test Results of Concrete. Reported by ACI Committee 214.
4. ACI 318 (2008) Design of concrete Structures. American Standard.
5. ISO 12491:1997 Statistical methods for quality control of building materials and components. European Standard, CEN.
6. Caspeele R., Taerwe L. (2011) Variance reducing capacity of concrete conformity control in structural reliability analysis under parameter uncertainties. W: Application of Statistics and Probability in Civil Engineering. – Faber, Kohler. – s. 2509–2516.
7. Blaut H. (1973) Sampling inspection plan and operating characteristics for concrete (1977). Deutscher ausschuss für stahlbeton (233):1973.
8. Woliński S., Skrzypczak I. Kryteria statystyczne zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie. Materiały Budowlane. N 2, 2006 – s. 20–25.
9. Caspeele R. (2010) Probabilistic Evaluation of Conformity Control and the Use of Bayesian Updating Techniques in the Framework of Safety Analysis of Concrete Structures. PhD thesis, Ghent University, Ghent, Belgium. – 129 p.
10. Cook J. (1982) Research and Application of High Strength Concrete Using Class C Fly Ash. W: Concrete International, v. 11, N 10, Oct. – pp. 67–75.
11. Neville A.M. (1975) The Relation between Standard Deviation and Mean Strength of Concrete Test Cubes. Magazine of Concrete Research (London), v. 11, N 32, July. – pp. 75–84.
12. Taerwe L. (2006) Analysis and modeling of autocorrelation in concrete strength series. W: Proske D., Mehdiapours M., Proceeding 4th International Probabilistic Symposium, 12–13 October 2006, Berlin, Germany. – s. 57–70.
13. Тур В.В., Дереченник С.С. Критерии оценки соответствия прочности бетона в подходах европейских и американских стандартов / Вестник БрГТУ. – 2012. – № 1. – С. 173–178.
14. Beal A.N. Concrete strength testing - are the code writers getting it right? / The Structural Engineer, 87 (10), 19 May 2009. – p.73.
15. Beal A.N. Concrete Cube Strength - what use are Statistics? / ICE Proc. Part 2. December, 1981. – pp. 1037–1048.
16. Rajamane N.P., Notaraja M.C., Ganesan T.P. A technical look at “individual test result” criterion for concrete acceptance as per IS 456:2000 / The Indian Concrete Journal, April 2012. – pp. 26–37.
17. Crompton S.J. Conformity to EN 206 / Materials of Institute of Concrete Technologies, June, 2008. – pp. 35–47.
18. Brown B.V., Gibb I. Appraisal of the EN206 strength conformity proposals for initial and acceptance testing. CEN TC 104/SC1/T63p. 1994. p.p.2.
19. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 896 с.
20. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. – М.: Мир, 1965. – 443 с.