

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Писаренко А.Н., к.ф.-м.н., доцент,
Максименюк Я.А., к.ф.-м.н., доцент

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры.
Украина*

Большое количество экспериментальных зависимостей для дальнейшей их обработки и анализа требуют записи в аналитическом виде. Часто для выполнения этой работы используют метод наименьших квадратов (МНК) [1, 2]. Наиболее распространен метод при получении аппроксимирующей функции в виде прямой. В этом случае как расчетные формулы, так и предварительный анализ точности получаемых коэффициентов достаточно просты. Однако, в этом случае существует ряд недостатков. 1. В частности, большинство процессов взаимодействия элементов рассматриваемых физических процессов не носят линейный характер. 2. Далее, линеаризация процессов, которые не являются линейными по своей сути, приводит как к погрешностям вследствие замены переменных, так и к дополнительным погрешностям, связанным с математическими преобразованиями. 3. Линейные зависимости между функциями и аргументами очень чувствительны к различного рода выбросов (как к их количеству, так и их расположению). Это связано с тем, что наклон прямой во всем рассматриваемом диапазоне не меняется, что приводит при использовании широкого диапазона изменения аргумента к большим ошибкам при аппроксимации функции. Влияние этих факторов может быть значительно уменьшено за счет использования полиномов как второго, так и более высоких порядков [3 – 5].

Большинство физико-химических процессов в строительных материалах являются нелинейными. В качестве примера можно указать на нелинейный характер: влияния добавок на параметры тепловыделения и свойства цемента [6]; влияния масштабного фактора на формирование технологической поврежденности бетона [7]. Естественно применять при математической обработке результатов измерений характеристик нелинейных процессов нелинейный регрессионный анализ.

Метод МНК был применен к полиномам второго порядка вида $y = ax^2 + bx + c$. Рассматривалась модельная задача, т.е. в качестве y_i выступали значения, полученные при известных \hat{a} , b , \hat{n} , взятые для различных диапазонов изменения x_i . При этом формулы для коэффициентов в общем случае имеют:

$$a = \frac{(\mathcal{Q}_5\mathcal{Q}_4 - \mathcal{Q}_6\mathcal{Q}_3)(\mathcal{Q}_5\mathcal{Q}_3 - \mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_7) - (\mathcal{Q}_7\mathcal{Q}_4 - \mathcal{Q}_8\mathcal{Q}_3)(\mathcal{Q}_3^2 - \mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_5)}{(\mathcal{Q}_3^2 - \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_7)(\mathcal{Q}_3^2 - \mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_5) - (\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_3 - \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_5)(\mathcal{Q}_5\mathcal{Q}_3 - \mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_7)}$$

$$b = \frac{(\mathcal{Q}_4\mathcal{Q}_3 - \mathcal{Q}_8\mathcal{Q}_1)(\mathcal{Q}_5\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_2) - (\mathcal{Q}_4\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_6\mathcal{Q}_1)(\mathcal{Q}_7\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_3^2)}{(\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2^2)(\mathcal{Q}_7\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_3^2) - (\mathcal{Q}_5\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_3)^2}$$

$$c = \frac{(\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_4 - \mathcal{Q}_8\mathcal{Q}_1)(\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2^2) - (\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_4 - \mathcal{Q}_6\mathcal{Q}_1)(\mathcal{Q}_5\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_3)}{(\mathcal{Q}_5\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_2)^2 - (\mathcal{Q}_7\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_3^2)(\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2^2)}$$

где

$$\mathcal{Q}_1 = \sum_i x_i^4; \quad \mathcal{Q}_2 = \sum_i x_i^3; \quad \mathcal{Q}_3 = \sum_i x_i^2; \quad \mathcal{Q}_4 = \sum_i y_i x_i^2; \quad \mathcal{Q}_5 = \sum_i x_i;$$

$$\mathcal{Q}_6 = \sum_i y_i x_i; \quad \mathcal{Q}_7 = N; \quad \mathcal{Q}_8 = \sum_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Изучались статистические свойства МНК-оценок для квадратичных полиномов. В частности, было исследовано влияние на коэффициенты \hat{a} , b и \hat{n} : 1. сдвига используемого диапазона независимых переменных x относительно экстремума y ; 2. положения выброса; 3. интенсивности выброса. При исследовании были сделаны естественные предположения о несмещенности и состоятельности МНК-оценок.

Для проведения численного эксперимента с использованием среды C++Builder 6.0 был разработан комплекс, позволяющий отображать результаты применения МНК в аналитическом и графическом виде. Результаты анализа разбиты по указанным выше пунктам.

1. Относительное изменение $\varepsilon_{x_{\min}}$ минимального значения диапазона переменных x варьировалось в интервале $(-3 \div 0,5)$, что позволяло, таким образом, проанализировать условие перехода через экстремум параболы. На рис. 1 – 3 приведены полученные зависимости $\varepsilon_{a,b,c} = \varepsilon_{a,b,c}(\varepsilon_{x_{\min}})$ для относительных изменений коэффициентов \hat{a} , b и \hat{n} .

При незначительных относительных изменениях a , b , c можно, тем не менее, отметить, что наибольшей устойчивостью к перемещению x_{\min} обладает коэффициент \hat{n} . В частности, ε_c испытывает за-

метные ненулевые отклонения только для $\varepsilon_{x\min} \geq -0,60$. Кроме того, из графиков следует, что для случая соответствия диапазона по x только одной ветви параболы ($\varepsilon_{x\min} > 0$) точность МНК-оценок для a , b и c резко ухудшается.

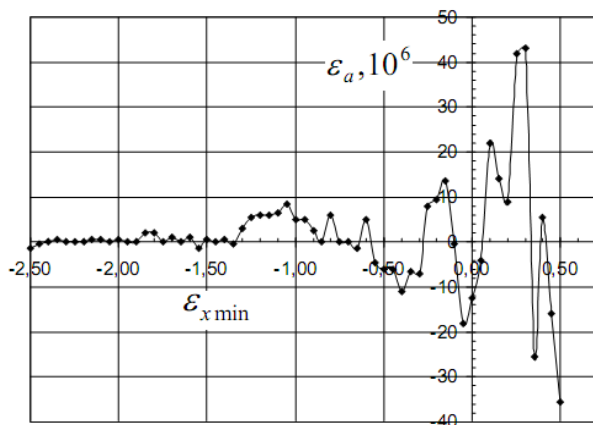


Рис. 1. Зависимость $\varepsilon_a = \varepsilon_a(\varepsilon_{x\min})$

2. Рассматривалось влияние на МНК-оценки положения одиночного выброса относительно фиксированного диапазона по x . Ширина диапазона была нормирована на 1. Положение одиночного выброса внутри диапазона задавалось безразмерным параметром ε_{XB} ($0 \leq \varepsilon_{XB} \leq 1$) с нулевым значением для экстремума параболы. Относительная интенсивность выброса связывалась с ординатой Y и принимала фиксированные значения $\varepsilon_I = Y_B/Y = 1,6; 1,8; 2$. Результаты численного эксперимента приведены на рис. 4 – 6.

При удалении выброса по ветви параболы от ее экстремума модули ε_a , ε_b и ε_c возрастают и, соответственно, растет погрешность в определении коэффициентов a , b и c . Увеличение ε_I (от 1,6 до 2) при фиксированном значении ε_{XB} приводит к росту модулей ε_a , ε_b и ε_c , не меняя при этом общей функциональной зависимости $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\varepsilon_{XB})$, $i = a, b, c$, что является ожидаемым, учитывая единственный характер выброса.

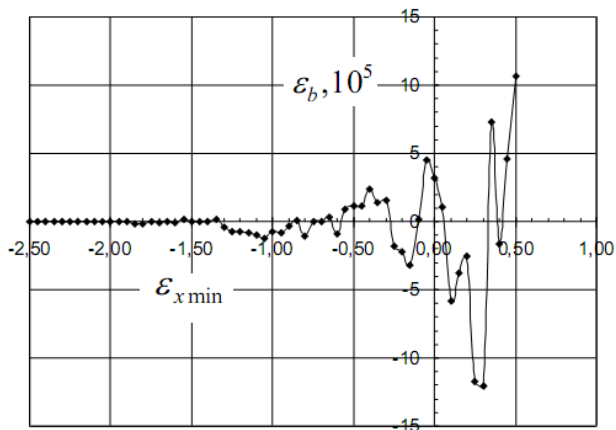


Рис. 2. Зависимость $\varepsilon_b = \varepsilon_b(\varepsilon_{x \min})$

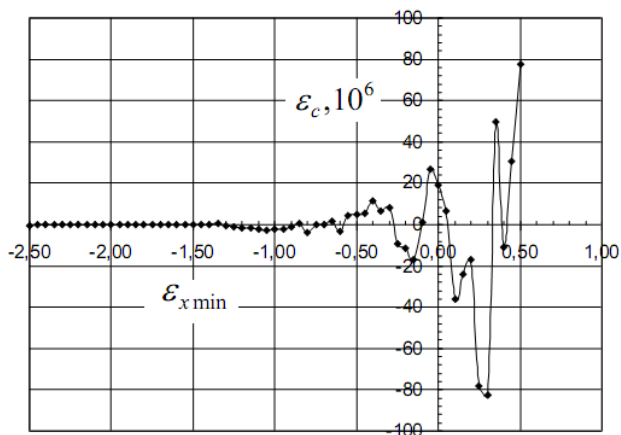


Рис. 3. Зависимость $\varepsilon_c = \varepsilon_c(\varepsilon_{x \min})$

3. Влияние относительной интенсивности ε_I выброса на значения ε_a , ε_b и ε_c рассчитывалось при $\varepsilon_{XB} = 0,4; 0,6$. Рассматривались выбросы, для которых $\varepsilon_I \leq 2$. Результаты расчетов приведены на рис. 7 и 8.

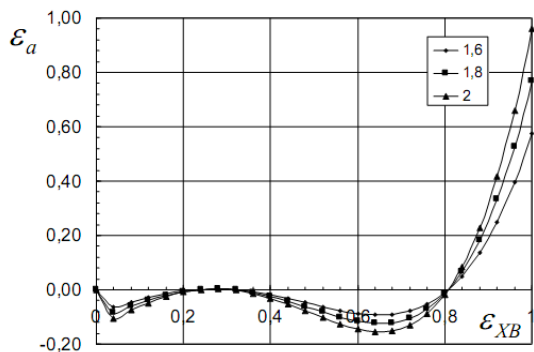


Рис. 4. Зависимость $\varepsilon_a = \varepsilon_a(\varepsilon_{XB})$

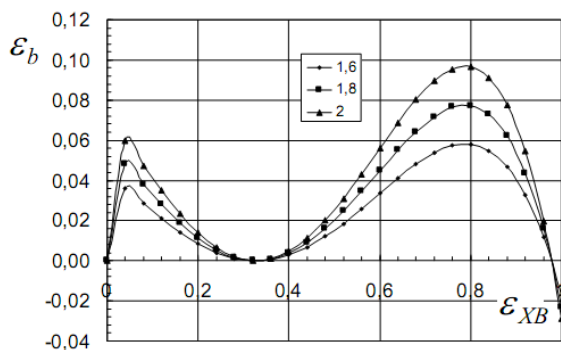


Рис. 5. Зависимость $\varepsilon_b = \varepsilon_b(\varepsilon_{XB})$

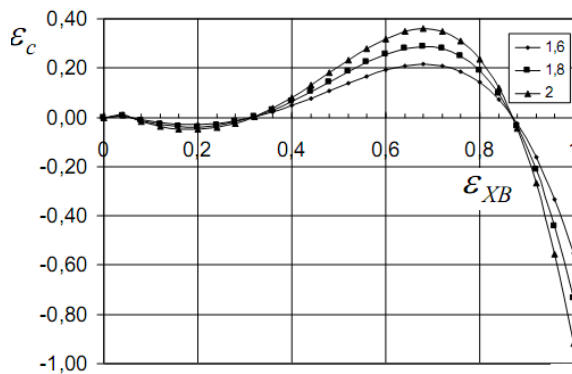


Рис. 6. Зависимость $\varepsilon_c = \varepsilon_c(\varepsilon_{XB})$

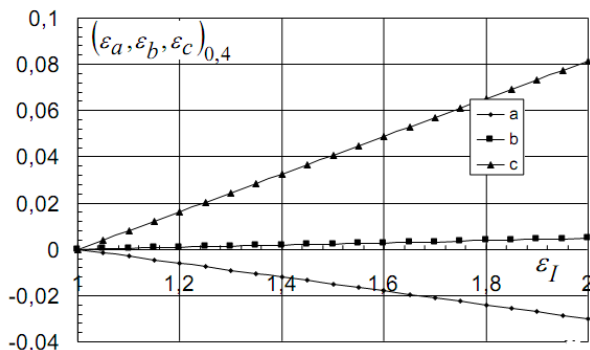


Рис. 7. Зависимость $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c = f(\varepsilon_I)$ при $\varepsilon_{XB} = 0,4$

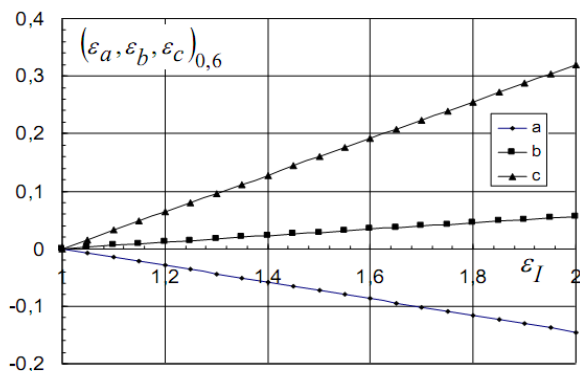


Рис. 8. Зависимость $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c = f(\varepsilon_I)$ при $\varepsilon_{XB} = 0,6$

Увеличение относительной интенсивности выброса с фиксированным значением ε_{XB} приводит к линейному росту модулей относительного изменения всех коэффициентов: a , b и c . При этом удаление от экстремума параболы (увеличение ε_{XB}) при неизменном ε_I также сопровождается ростом модулей ε_a , ε_b и ε_c , что коррелируется с зависимостями, представленными на рис. 1 – 6.

Приведенные результаты указывают на то, что при применении метода МНК для полиномов второго порядка является существенным предварительное определение положения экстремума аппроксимирующей параболы. Диапазон независимых переменных x должен содержать экстремум параболы для минимизации погрешностей в опре-

деления коэффициентов a , b и c . Кроме того, получено, что эффективное применение МНК-оценок возможно при незначительном удалении одиночных выбросов от экстремума.

Выводы

В статье приведено подробное описание и особенности применения МНК-оценок для квадратичных полиномов. Указано, что нелинейный регрессионный анализ можно использовать при исследовании свойств строительных материалов.

SUMMARY

The article is devoted to peculiarities of quadratic polynomials usage in the method of least squares for observed values analysis. It was shown that nonlinear regression can be applied for building materials properties investigation.

1. Волков Е. А. Численные методы: Учеб. Пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. – 248 с.
2. Кассандрова О. Н., Лебедев В. В. Обработка результатов измерений. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 104 с.
3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. 3. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 368 с.
4. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. Книга 1. – М.: Финансы и статистика. 1986. – 366 с.
5. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 231 с.
6. Циак М., Смоленски А, Коваль С. В., Савченко С. В. Моделирование влияния добавок на параметры тепловыделения и свойства цемента. Вестник ОГАСА, № 35. Одесса. 2009. - С. 373 – 379.
7. Орлов А. Н., Хоменко А. А., Выровой В. Н., Хоменко О. И. Аналитическое описание характера развития деформаций при локальном увлажнении строительных конструкций. Вестник ОГАСА № 50, ч.2. Одесса. 2013. С. 125 – 131.