

**АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ  
МЕТОДА РЕЛАКСАЦИИ ПРИ РАСЧЕТЕ ДВУМЕРНЫХ  
СТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ**

**Писаренко А.Н.**, *к.ф.-м.н., доцент,*  
**Максименюк Я.А.**, *к.т.н., доцент*

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,  
Украина*

Необходимость расчетов двумерных температурных полей строительных конструкций обусловлена требованиями нормативных документов [1]. Расчет температурного поля строительной конструкции дает информацию о внутреннем распределении температур по каждому виду строительных материалов, зонах конденсации водяных паров [2], температурной напряженности в элементах каркаса [3] и т.д.

Расчет двумерных температурных полей при проектировании строительных конструкций позволяет избежать ошибок, связанных с распределением тепловых потоков, а также температур в элементах конструкций [4]. Математическая модель, описывающая стационарное распределение температурных полей включает в себя первую граничную задачу  $T = T_{\gamma}$  для уравнения Лапласа  $\Delta T = 0$  [5]. Одним из эффективных способов численного решения таких задач является метод релаксации.

В работе рассмотрены особенности использования вышеуказанного метода при решении данной задачи. На основе среды C++ Builder 6.0 был создан программный комплекс, позволяющий рассчитывать и анализировать как промежуточные, так и окончательные результаты при использовании данного метода. В методе релаксации использовалась 5-и точечная схема. Комплекс предназначен для исследования температурных полей стандартной плоской прямоугольной области  $N_x \times N_y$  [6]. Для каждой из сторон области имелась возможность задания температур, а также их функций от координат. Значения начальной температуры внутри области присваивались каждому узлу до начала подсчета. Программный комплекс позволяет исследовать промежуточные результаты вычислений по методу релаксаций для отдельных ячеек, координаты которых можно задавать на визуальной форме до начала расчетов.

Для анализа сходимости при различных вариантах граничных условий вводились следующие параметры:

$$E_{\Delta} = \frac{|T_{i,j,k} - T_{i,j,k-1}|}{T_{i,j,k-1}}; \quad E_T = \frac{T_{\bar{A}} - T_B}{T_{\bar{A}}}; \quad E_{X,Y} = \frac{2i}{N_{X,Y}},$$

где:  $i = 1, 2, \dots, N_X$ ;  $j = 1, 2, \dots, N_Y$ ;  $N_X$  – максимальное число узлов сетки по оси  $\bar{O}$ ;  $N_Y$  – максимальное число узлов сетки по оси  $Y$ ;  $k$  – текущее число итераций;  $T_{\bar{A}}$  – температура границы;  $\dot{O}_{\bar{A}}$  – начальная температура узлов, прилегающих к границе.

Зависимость относительного изменения температуры  $E_{\Delta}$  от числа итераций  $k$  в приграничном слое ( $E_Y = 0,01$ ) для характерного случая небольшого ( $E_T = 0,1$ ) расхождения между температурами  $T_{\bar{A}}$  и  $T_B$  приведена на рис. 1.

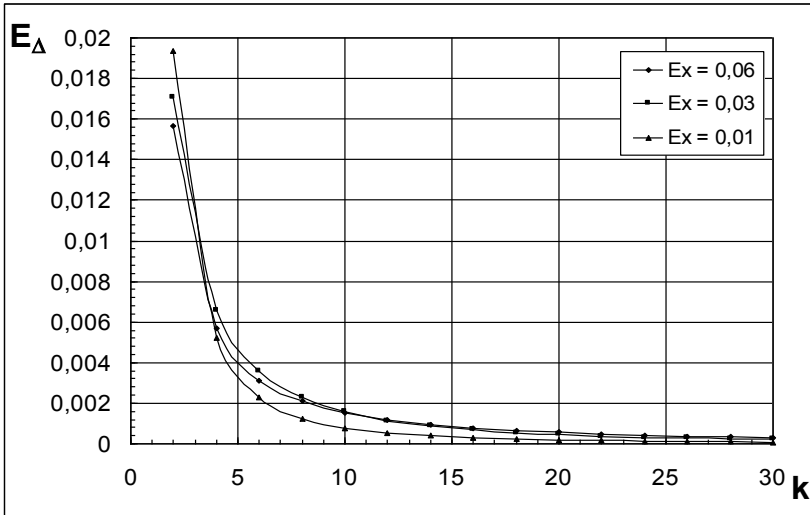


Рис. 1. Зависимость  $E_{\Delta} = E_{\Delta}(k)$  для  $E_T = 0,1$  и  $E_Y = 0,01$

Анализ зависимости  $E_{\Delta} = E_{\Delta}(k)$  с использованием степенной аппроксимации дал следующие нелинейные зависимости скорости  $E'_{\Delta k}$  убывания  $E_{\Delta}$  с ростом  $k$ :

$$E_X = 0,06: E'_{\Delta k} = -6,2004 \cdot 10^{-2} k^{-2,4487}; R^2 = 0,9997.$$

$$E_X = 0,03: E'_{\Delta k} = -1,0658 \cdot 10^{-1} k^{-2,655}; R^2 = 0,9963.$$

$$E_X = 0,01: E'_{\Delta k} = -1,7200 \cdot 10^{-1} k^{-3,0376}; R^2 = 0,9998,$$

где  $R^2$  – величина достоверности аппроксимации.

Приведенное на графике рис. 1 максимальное значение  $k = 30$  является вполне достаточным с практической точки зрения, так как соответствует значительному уменьшению  $E'_{\Delta k}$  (например, в  $\sim 4 \cdot 10^3$  раз для кривой с  $E_X = 0,06$ ). Результаты регрессионного анализа [7] указывают на существенный спад значения  $E'_{\Delta k}$  при удалении от края области с фиксированной температурой ( $\Delta E'_{\Delta k} \approx 3 \cdot 10^2$  для  $E_X = 1$  и  $E_Y = 0,01$ ).

Поведение  $E_{\Delta}$  при удалении от границы области  $N_X \times N_Y$  отображено на графике зависимости  $E_{\Delta} = E_{\Delta}(E_X)$ , представленном на рис. 2. Наличие максимумов кривых обусловлено уменьшающимся с ростом  $k$  расхождением между текущей температурой в приграничных узлах, рассчитанной по 5-и точечной схеме, и фиксированной температурой границы. Абсциссы  $E_{\Delta m}$  максимумов смещаются к центру области с постоянной скоростью  $\partial E_{Xm} / \partial k = 1,7 \cdot 10^{-3}$  ( $E_{Xm} = 0,0017k + 0,0229$ ;  $R^2 = 0,9915$ ).

Пример влияния на результаты вычислений выбора начальной температуры узлов, прилегающих к границе (т.е. зависимости  $E_{\Delta} = E_{\Delta}(E_T)$ ) приведен на рис. 3. Получены семейства линейных зависимостей для фиксированных значений  $E_X$ . Рост  $E_T$  (расхождение между начальной и граничной температурами) приводит к росту  $E_{\Delta}$  и, следовательно, к увеличению общего времени расчета. Изменение (для  $k = 30$ ) тангенса  $tg \alpha$  угла наклона графиков при увеличе-

нии  $E_X$  (приближение к центру граничной области) с практически единичной достоверностью аппроксимируется полиномом

$$\operatorname{tg} \alpha = 37,125E_X^4 - 5,4439E_X^3 - 0,407E_X^2 + 0,0913E_X - 4 \cdot 10^{-5}.$$

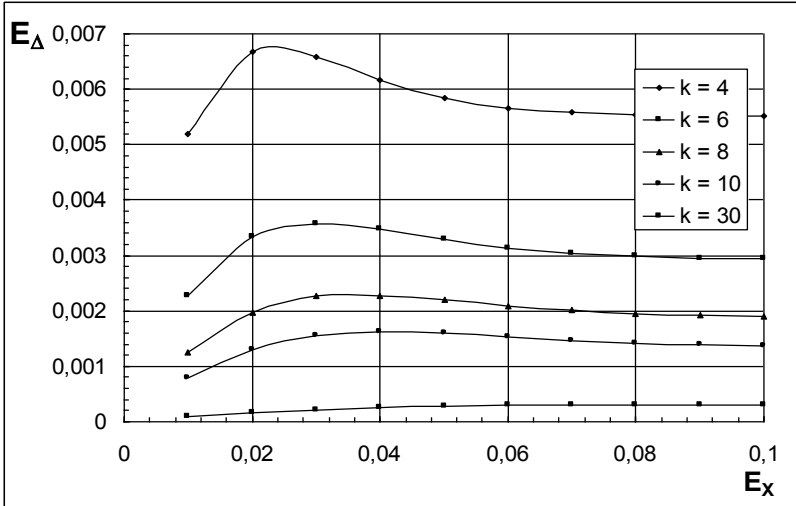


Рис. 2. Зависимость  $E_\Delta = E_\Delta(E_X)$  для  $E_T = 0,1$  и  $E_Y = 0,01$

Характерная динамика расчетов температуры во внутренних областях представлена на рис. 4.

Значительное удаление от краев внутрь области (увеличение  $E_X$  и  $E_Y$ ) обуславливает при малых  $k$  практически нулевое влияние граничных условий по температуре на  $E_\Delta$ . Рост  $k$  приводит к появлению локального максимума (нарастание влияния узлов сетки, расположенных ближе к границе) и последующего спада кривой (стремление расчетных значений температуры устойчивой неявной схемы к стационарному значению). На графиках (рис. 4) этот факт иллюстрируется «загибом»  $A$  и  $B$  кривых  $E_\Delta = E_\Delta(k)$  в области малых  $k$  при увеличении  $E_X$  и  $E_Y$ . Индекс  $A$  относится к паре кривых для  $E_Y = 0,04$ ;  $E_X = 0,03$  и  $E_Y = 0,06$ ;  $E_X = 0,03$ , соответственно. Индекс  $B$  относится к паре кривых для  $E_Y = 0,04$ ;  $E_X = 0,06$  и  $E_Y = 0,06$ ;  $E_X = 0,06$ .

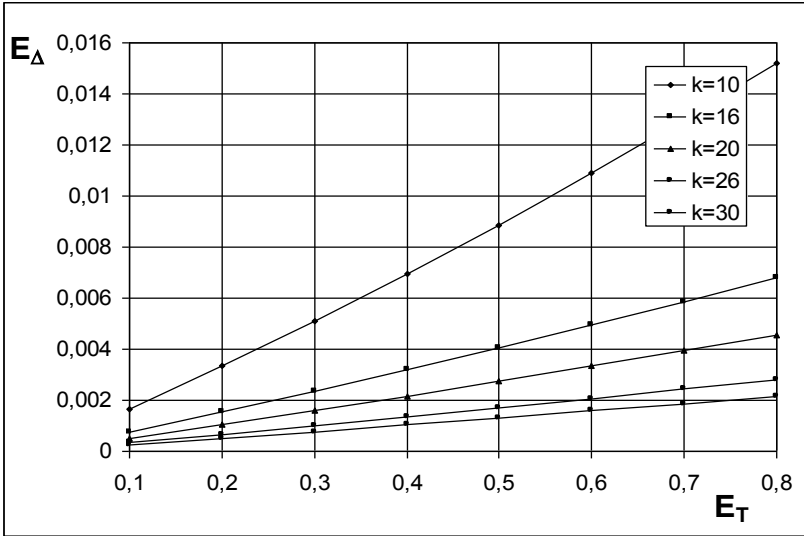


Рис. 3. Зависимость  $E_{\Delta} = E_{\Delta}(E_T)$  для  $E_X = 0,04$  и  $E_Y = 0,01$

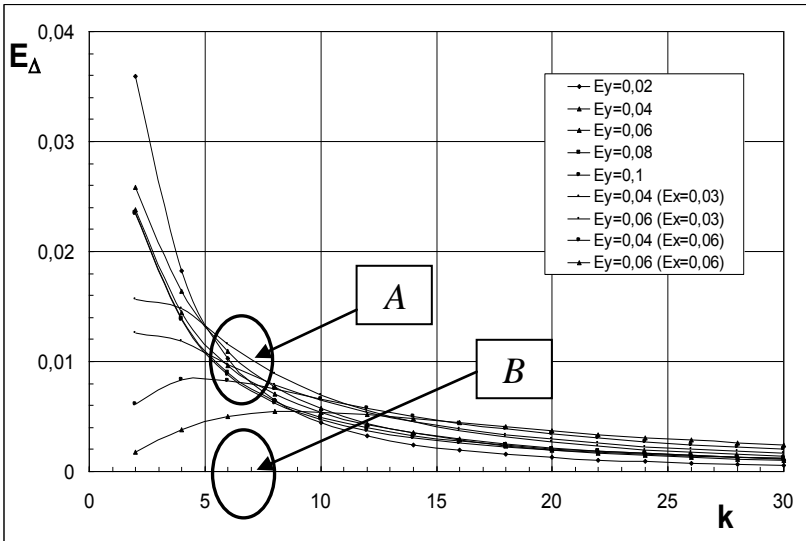


Рис. 4. Зависимость  $E_{\Delta} = E_{\Delta}(k)$  при  $E_X = 0,02$  (0,03) и  $E_Y > 0,01$

В работе исследовалось влияние на величину  $E_{\Delta}$  градиента стационарных температур на стенках прямоугольной области.

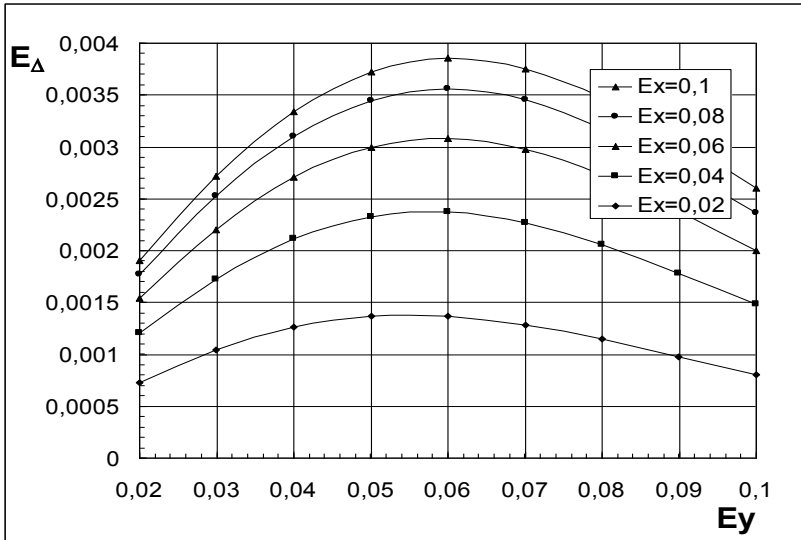


Рис. 5. Зависимость  $E_{\Delta} = E_{\Delta}(E_Y)$  при  $E_{gY}^n = 0,4$ ;

$$E_T = 0,2; k = 30$$

Среднее значение относительного температурного градиента на единице длины определялось по формуле  $E_{gm}^n = \frac{T_{2m} - T_{1m}}{T_{nm}}$ , где  $m = X, Y$ ; индекс  $n$  соответствует  $\min(T_{1m}, T_{2m})$ .

Характерный результат исследований приведен на рис. 5 для зависимости  $E_{\Delta} = E_{\Delta}(E_Y)$  при  $E_{gY}^n = 0,4$ ;  $E_T = 0,2$ ;  $k = 30$  и рис. 6 для зависимости  $E_{\Delta} = E_{\Delta}(E_Y)$  при  $E_{gY}^n = 0,4$ ;  $E_T = 0,2$ ;  $E_X = 0,07$ .

На граничной стороне ( $\dot{O}_{\bar{A}} = const$ ) значение  $E_{\Delta}$  минимально ( $E_{\Delta \min 1}$ ) и начинает возрастать при увеличении смещения по  $Y$ . Однако, при значительном смещении по направлению  $Y$  внутрь области (при  $E_{gX}^n \neq 0$ ) температурные условия, связанные с градиентом, ста-

новятся примерно одинаковыми и погрешность по 5-и точечной схеме снова стремится к минимуму ( $E_{\Delta \min 2}$ ). Следовательно, между этими областями (с  $E_{\Delta \min 1}$  и  $E_{\Delta \min 2}$ ) находится максимум погрешности (при движении в направлении  $Y$ ).

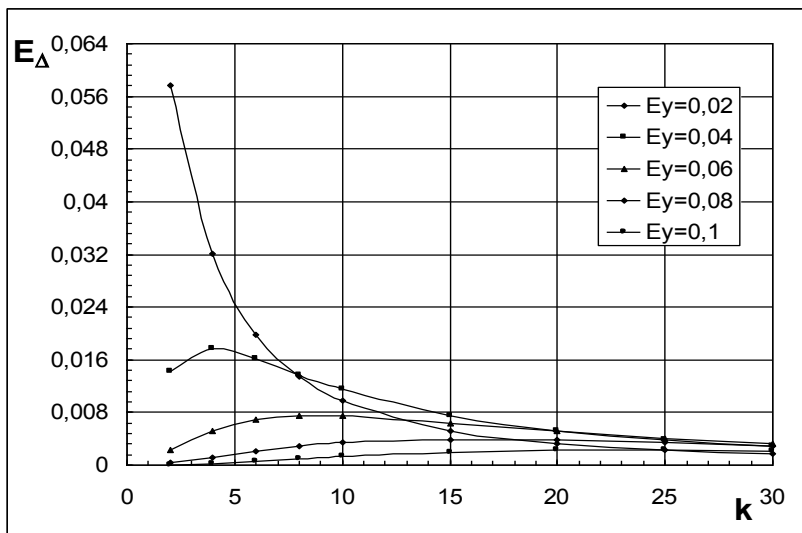


Рис. 6. Зависимость  $E_{\Delta} = E_{\Delta}(k)$  при  $E_{gY}^n = 0,4$ ;  $E_T = 0,2$ ;  $E_X = 0,07$

Рост  $E_{gX}^n$  приводит к увеличению погрешности во всех точках слоя, примыкающего к граничной стороне, расположенной параллельно направлению  $\vec{O}$  ( $Y = Y_b = const$ ). Увеличение погрешности будет наблюдаться и для следующего примыкающего слоя ( $Y = Y_b + 1 = const$ ) и т.д. Это приводит к увеличению погрешности в направлении  $Y$ . Следовательно, указанный в предыдущем абзаце максимум будет смещаться по  $Y$  при увеличении градиента  $E_{gX}^n$ . В частности, получено, что скорость  $v_{Y;0,1}$  смещения по  $Y$  максимума кривой  $E_X = 0,1$  (см. рис. 5) практически линейна по  $E_{gX}^n$ , а именно:  $v_{Y;0,1} = 0,0662E_{gX}^n + 0,0024$ ;  $R^2 = 0,9986$ .

## **Выводы**

1. Разработан программный комплекс, позволяющий проводить численное исследование плоских двумерных температурных полей и динамику сходимости итерационного процесса при решении первой граничной задачи для двумерного температурного поля.

2. Рост  $k$  при удалении от границы области приводит к появлению локальных максимумов  $E_{\Delta}$ . Эту особенность необходимо учитывать при расчете нелинейных зависимостей характеристик строительных материалов от температуры.

3. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что использованные в работе методики эффективны при полиномиальной экстраполяции не выше 4 степени.

## **Summary**

**The software that allows the flat two-dimensional numerical study of temperature fields and the dynamics of convergence of the iterative process for solving the first boundary value problem for the two-dimensional temperature field has developed. The obtained results lead to the conclusion that the methodologies used in the study are effective in polynomial extrapolation not higher than 4 degrees.**

## **Литература**

1. ДБН В.2.6-31: 2006 зі зміною №1 від 1 липня 2013 р. Конструкції будинків і споруд. Теплова ізоляція будівель. К.: Мінбуд України, 2006. – 70 с.
2. Фокин К.Ф. Строительная теплотехника ограждающих частей зданий. М.: Стройиздат, 1973. – 287 с.
3. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. – 168 с.
4. Крайнов Д.В., Сафин И.Ш., Любимцев А.С. Расчет дополнительных теплопотерь через теплопроводные включения ограждающих конструкций (на примере оконного откоса). Инженерно-строительный журнал. № 6, 2010. С. 17 – 22.
5. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
6. Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука. 1987. – 320 с.
7. Писаренко А.М., Максименюк Я.А. Применение нелинейного регрессионного анализа при исследовании строительных материалов// Вісник ОДАБА. Випуск № 54. – Одеса: ТОВ «Зовнішрекламсервіс» 2014. – С. 293 – 299.