УДК 624.071.3:539.4

ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫЙ ЭЛЕМЕНТ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Орлов А.Н., Бекирова М.М.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

Рассматривается железобетонный стержень с прямоугольным поперечным сечением. Армирование двойное $\left(A_s \neq A_s'\right)$. Нагрузка (продольная сила) N приложена с эксцентриситетом и относительно центра тяжести арматуры A. Нагрузка N и эксцентриситет таковы, что в растянутом бетоне изменяются трещины. Гибкость стрежня «мала» настолько, что влиянием продольного изгиба можно пренебречь.

Напряженное состояние в сечении с трещиной и характеристики сечения приведены на рис.1.

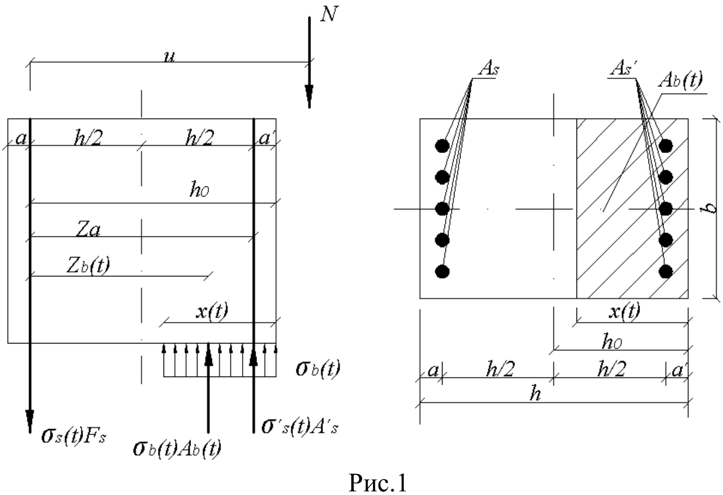

Рис.1

Для любого момента времени t уравнения равновесия для сечения с трещиной имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_b\left(t\right)A_b\left(t\right)+\sigma_s'\left(t\right)A_s'-\sigma_s\left(t\right)A_s-N=0,\\
&\sigma_b\left(t\right)A_b\left(t\right)Z_b\left(t\right)+\sigma_s'\left(t\right)A_s'Z_a-uN=0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Уравнения совместности деформаций имеют вид

$$\frac{\sigma_s'(t)}{E_s} = \frac{x_c(t) - a'}{x_{c(t)}} \psi_b(t) \varepsilon_b(t),$$
$$\frac{\sigma_s(t)}{E_s} \psi_s(t) = \frac{h_0 - x_c(t)}{x_c(t)} \psi_b(t) \varepsilon_b(t). \tag{2}$$

Соотношение между деформациями и напряжениями в бетоне на основе линейной теории ползучести устанавливается формулой

$$\varepsilon_b(t) \sigma_b(t) \delta(t,t) - \int_{t_0}^{t} \sigma_b(t) \frac{d\delta_{(t,\tau)}}{d\tau} d\tau, \tag{3}$$

где

$$\delta(t,\tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C_0 \left[1 - Be^{-\gamma(t-\tau)}\right], \ \varphi = C_0 E. \tag{4}$$

Предполагается, что $E(t) = E(\tau) = E = Const$.

Из уравнений равновесия (1) следует

$$\sigma_s'(t) = \frac{uN - \sigma_b(t) A_b(t) Z_b(t)}{A_s' Z_a}, \tag{5}$$

$$\sigma_s(t) = \frac{(u - Z_a) N + \left[Z_a - Z_b(t)\right] \sigma_b(t) A_b(t)}{A_s Z_a}. \tag{6}$$

Из уравнений совместимости деформаций (2) следует

$$\frac{\sigma_s'(t)}{\sigma_s(t)} = \psi_a(t) \frac{x_c(t) - a'}{h_0 - x_c(t)}. \tag{7}$$

Используя соотношения (5), (6), (7), можно получить выражения для напряжений в сжатом виде

$$\sigma_b(t) = \frac{N}{A_b(t)} \cdot \frac{u + Z_a \left[\frac{1}{\psi_a(t)} \cdot \frac{A_s}{A_s'} \cdot \frac{h_0 - x_c(t)}{x_c(t) - a'} - 1\right]^{-1}}{Z_b(t) + Z_a \left[\frac{1}{\psi_a(t)} \cdot \frac{A_s}{A_s'} \cdot \frac{h_0 - x_c(t)}{x_c(t) - a'} - 1\right]^{-1}}. \tag{8}$$

Используя соотношения (2), (3) и (6) можно получить

$$\frac{\psi_a(t)}{\psi_b(t)} \cdot \frac{1}{Z_a A_s E_s} \cdot \frac{x_c(t)}{h_0 - x_c(t)} \left\{(u - Z_a) N + \left[Z_a - Z_b(t)\right] A_b(t) \sigma_b(t)\right\} -$$
$$-\sigma_b(t) \delta(t,t) + \int_{t_0}^{t} \sigma_b(\tau) \frac{d\delta(t,\tau)}{d\tau} d\tau = 0. \tag{9}$$

Далее везде предполагается, что $x_c(t) \approx x(t)$ и рассматривается предельный случай, когда бетон в растянутой зоне полностью выключился из работы $(\psi_s(t)=1,\ \psi_b(t)=1)$.

Выражения (9) и (8) – разрешающие уравнения задачи с двумя неизвестными $x(t)$ и $\sigma_b(t)$, т.к. $A_b(t)$ и $Z_b(t)$ определяются через $x(t)$

$$A_b(t)=bx(t), \quad Z_b(t)=h_0-\frac{x(t)}{2}. \tag{10}$$

Выполнив ряд преобразований и введя безразмерные параметры

$$\begin{gathered}\xi(t)=\frac{x(t)}{h_0}, \quad n=\frac{E_s}{E}, \quad m=\frac{F'_s}{F_s}, \quad \mu'=\frac{A'_s}{A_s}, \quad \mu=\frac{A_s}{A} \\ \delta'=\frac{a'}{h_0}, \quad \delta=\frac{a}{h_0}, \quad X=\frac{h}{h_0}, \quad \zeta(t)=\frac{Z_b(t)}{h_0},\end{gathered} \tag{11}$$

можно интегральное уравнение (9) преобразовать к виду

$$\Phi(t)-\sigma_b(t)E\delta(t,t)+E\int_{t_0}^{t}\sigma_b(t)\frac{d\delta(t,\tau)}{d\tau}d\tau=0, \tag{12}$$

где
$$\sigma_b(t)=\frac{2N}{bh_0}\cdot\frac{f_1(t)}{f_2(t)}, \tag{13}$$

$$\Phi(t)=\frac{N}{bh_0}K(1-\delta')\xi(t)\frac{f_3(t)}{f_2(t)}, \quad K=\frac{1}{\mu n(1-\delta')(1+\delta)}. \tag{14}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ имеют вид полиномов по степеням $\xi(t)$

$$\begin{gathered}f_1(t)=d_1\xi(t)+d_2, \quad f_2(t)=d_3\xi^3(t)+d_4\xi^2(t)+d_5\xi(t), \\ f_3(t)=\xi^2(t)+d_6\xi(t).\end{gathered} \tag{15}$$

Коэффициенты d_i, входящие в формулы (15), определяются так:

$$\begin{gathered}d_1=-(1+m)X+(1-\delta')m, \quad d_2=(1+m\delta')X-(1-\delta')m\delta', \\ d_3=1+m, \quad d_4=-3(1+m\delta'), \quad d_5=2\left(1+m\delta'^2\right), \quad d_6=2(X-1).\end{gathered} \tag{16}$$

Интегральное уравнение (12) может быть преобразовано в дифференциальное

$$\Phi'(t)+\gamma\Phi(t)-\left[1-(1+B)\varphi\right]\sigma'_\varepsilon(t)-\gamma(1+\varphi)\sigma_b(t)=0 \tag{17}$$

с начальным условием $\left(t=t_0\right)$

$$\Phi\left(t_0\right)-\left[1+\left(1-B\right)\varphi\right]\sigma_b\left(t_0\right)=0. \qquad (18)$$

После подстановки выражений $\sigma_b\left(t\right)$, $\Phi\left(t\right)$ и их производных в (17) и несложных преобразований будет получено дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\xi^4\left(t\right)+c_6\xi^3\left(t\right)+c_7\xi^2\left(t\right)+c_8\xi\left(t\right)+c_9}{\left[\xi^3\left(t\right)+c_1\xi^2\left(t\right)+c_2\xi\left(t\right)+c_3\right]\left[\xi^2\left(t\right)+c_4\xi\left(t\right)+c_5\right]\xi\left(t\right)}d\xi\left(t\right)= \qquad (19)$$

$$=-\gamma\frac{d_3}{a_1}dt,$$

$$c_1=d_6,\quad c_2=-\frac{2\left(1+\varphi\right)}{\left(1-\delta'\right)K}d_1,\quad c_3=-\frac{2\left(1+\varphi\right)}{\left(1-\delta'\right)K}d_2,$$

$$c_4=\frac{d_4}{d_3},\quad c_5=\frac{d_5}{d_3},\quad c_6=\frac{a_2}{a_1},\quad c_7=\frac{a_3}{a_1},\quad c_8=\frac{a_4}{a_1},\quad c_9=\frac{a_5}{a_1},$$

$$a_1=d_4-d_3d_4,\quad a_2=2\left[2\frac{1+\left(1-B\right)\varphi}{\left(1-\delta'\right)K}d_1d_3+d_5\right], \qquad (20)$$

$$a_3=2\frac{1+\left(1-B\right)\varphi}{\left(1-\delta'\right)K}\left(d_1d_4+3d_2d_3\right)+d_5d_6,$$

$$a_4=4\frac{1+\left(1-B\right)\varphi}{\left(1-\delta'\right)K}d_2d_4,\quad a_5=2\frac{1+\left(1-B\right)\varphi}{\left(1-\delta'\right)K}d_2d_5.$$

В начальный момент времени t_0 относительная высота сжатой зоны разыскивается как корень кубического уравнения

$$\xi^3\left(t_0\right)+d_6\xi^2\left(t_0\right)-2d_1\frac{1+\left(1-B\right)\varphi}{\left(1-\delta'\right)K}\xi\left(t_0\right)-2d_2\frac{1+\left(1-B\right)\varphi}{\left(1-\delta'\right)K}=0, \qquad (21)$$

полученного из начального условия (18) с учетом зависимостей (13), (14).

Вид решения дифференциального уравнения (19) зависит от вида разложения левой части на элементарные дроби, т.е. от вида корней полимеров

$$\xi^3\left(t\right)+c_1\xi^2\left(t\right)+c_2\xi\left(t\right)+c_3=0, \qquad (22)$$

$$\xi^2\left(t\right)+c_4\xi\left(t\right)+c_5=0. \qquad (23)$$

Может иметь место четыре случая:

- у полиномов (22) и (23) все корни действительные;

- у полинома (22) все корни (три) действительные, а у полинома (23) оба комплексно-сопряженные;

- у полинома (22) один действительный и два комплексно-сопряженные, а у полинома (23) – оба действительные;

- у полинома (22) один действительный и два комплексно-сопряженых, а у полинома (23) – оба комплексно-сопряженные.

Так, для первого случая, когда все корни действительные, решение уравнения (19) имеет вид

$$\mathop{\Pi}_{i=1}^{6}\left[\xi(t)-\omega_i\right]^{\alpha_i}=\mathop{\Pi}_{i=1}^{6}\left[\xi(t_0)-\omega_i\right]^{\alpha_i}\quad exp\left[-\gamma\frac{d_3}{a_1}(t-t_0)\right]. \tag{24}$$

Обратная зависимость

$$t-t_0=-\frac{a_1}{\gamma d_3}ln\left\{\mathop{\Pi}_{i=1}^{6}\left[\frac{\xi(t)-\omega_i}{\xi(t_0)-\omega_i}\right]^{\alpha_i}\right\}, \tag{25}$$

$\omega_1=0,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4$ - корни полинома (22), $\omega_5,\ \omega_6$ - корни полинома (23). $\alpha_1,\dots,\alpha_6$ разыскивается с привлечением метода неопределенных коэффициентов.

Для трех остальных случаев сочетаний корней получены решения уравнения (19) с учетом наличия комплексно-сорпяженных корней.

Для произвольного момента времени t относительная высота сжатой зоны бетона определяется по формуле (24). Однако, при $t\to\infty$, что представляет наибольший практический интерес, относительная высота сжатой зоны бетона $\xi(\infty)$ разыскивается как положительный меньший единицы корень полинома (22), что следует из формулы (24). Именно полинома (22), а не (23), т.к. высота сжатой зоны $\xi(\infty)$ зависит от эксцентриситета u (или X) силы N и характеристик ползучести $B,\ \varphi$, а коэффициенты (23) от $X,\ B$ и φ не зависят и, естественно, корни (23) не могут быть высотой сжатой зоны.

$$\xi^3(\infty)+c_1\xi^2(\infty)+c_2\xi(\infty)+c_3=0. \tag{26}$$

Таким образом, после определения $\xi(t)$, а также $\xi(t_0)$ и $\xi(\infty)$, воспользовавшись формулами (13), (5) и (6) определяются напряжения в бетоне и арматуре.

Кривизна $\dfrac{1}{\rho(t)}$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{1}{\rho(t)}=\frac{\sigma_s(t)}{E_s\left[h_0-x(t)\right]}. \qquad (27)$$

Выводы

1. Полученное решение (24) позволяет разыскивать относительную высоту сжатой зоны бетона при внецентренном сжатии железобетонной балки прямоугольного поперечного сечения с двойной арматурой в произвольный момент времени t. Решение получено для случая прямоугольной эпюры напряжений в сжатом бетоне, чтосогласуется с рекомендациями СНиП.
2. Относительная высота сжатой зоны бетона $\xi(t)$ является основной характеристикой напряженно-деформированного состояния железобетонной балки, зная которую сравнительно просто определяются напряжения в бетоне, арматуре, кривизна.
3. Все приведенные решения относятся к балкам с двойным армированием, однако, они могут использоваться и для расчетов балок с одиночной арматурой. В этом случае следует всюду предположить, что $\mu'=0, \quad m=0.$
4. Как оказалось, определение ξ в начальный момент времени $t=t_0$ и в момент времени $t=\infty$ осуществляется значительно проще и быстрее, чем для произвольного момента времени, что весьма важно с практической точки зрения. Так для нахождения $\xi(t_0)$ и $\xi(\infty)$ достаточно вычислить положительные меньшие единицы корни уравнений (21) и (26).

Summary

An expression is obtained which allows to determine the relative height of the compressed zone of concrete under eccentric compression reinforced concrete beam with double reinforcement at any time

Литература

1. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. М. Стройиздат, 1985г.
2. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М. Стройиздат, 1952г.