

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

**П.Г.Балдук, к.т.н., проф., М.М.Бекирова, к.т.н., доц.,
Н.Г.Суриянинов, д.т.н., проф.**

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Введение. В большинстве известных до сих пор работ, связанных с развитием численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ), рассматривались такие задачи механики деформируемого твердого тела, математическим резюме которых являются дифференциальные уравнения (или их системы) с постоянными коэффициентами [1, 2]. Между тем, ЧА МГЭ позволяет эффективно работать с дифференциальными уравнениями, которые имеют переменные коэффициенты, что существенно расширяет область применения метода и делает его еще более привлекательным.

Постановка задачи. Рассмотрим методологию применения метода для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на примерах решений задач устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней.

Проблема устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержней впервые была освещена в работах С.П. Тимошенко. В.З. Власов разработал общую теорию пространственной устойчивости тонкостенных стержней, из которой, как частный случай, вытекает уравнение С.П. Тимошенко [3] изгибно-крутильной устойчивости двутавровой балки.

С тех пор существенного прогресса в решении проблемы не наблюдалось, и основные результаты принадлежат С.П. Тимошенко. Связано это с трудностями интегрирования уравнений устойчивости, которые содержат переменные коэффициенты. Известны решения только для случаев, когда поперечная нагрузка вызывает лишь один закон изменения изгибающего момента по длине стержня. Под это условие попадают и задачи устойчивости при симметричной эпюре изгибающего момента. Таким образом, проблема решения задач устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержневых систем нуждается в дальнейшем развитии.

Применение ЧА МГЭ позволяет предложить новую методику решения наиболее сложных в теории устойчивости задач, когда снимаются ограничения на краевые условия, можно учесть разную поперечную нагрузку и любую структуру стержневых систем, включая рамы и неразрезные балки.

Результаты исследования. Рассмотрим наиболее простой вариант этих уравнений, когда открытый тонкостенный профиль имеет две оси симметрии, поперечная нагрузка действует в плоскости симметрии и изгибающий момент постоянный по длине стрижня. Уравнения устойчивости для стрижня постоянного сечения в левовинтовой системе координат (рис. 1) принимают вид [1]

$$\begin{cases} EI_y w^{IV}(x) + M_z \Theta''(x) = 0; \\ EI_\omega \Theta^{IV}(x) - GI_d \Theta''(x) + M_z w''(x) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $w(x)$ — перемещение точки оси стрижня в направлении оси Oz ; $\Theta(x)$ — угол закручивания стрижня вокруг оси Ox ; EI_y — поперечная жесткость сечения стрижня в плоскости xOz ; EI_ω — секториальная жесткость; GI_d — жесткость при кручении; M_z — изгибающий момент в сечении стрижня относительно оси Oz , вызванный заданной поперечной нагрузкой.

Система уравнений (1) решена только для частных случаев граничных условий и поперечной нагрузки [3].

Представим решение системы (1) для двух случаев:

1. Изгибающий момент $M_z = 0$. Такие участки могут встречаться.

2. Изгибающий момент $M_z = const$.

В реальных конструкциях это частный случай.

Если же $M_z(x)$ — какая-нибудь функция от координаты x , то ее заменяем ступенчатой зависимостью — кусочно-постоянной функцией M_z .

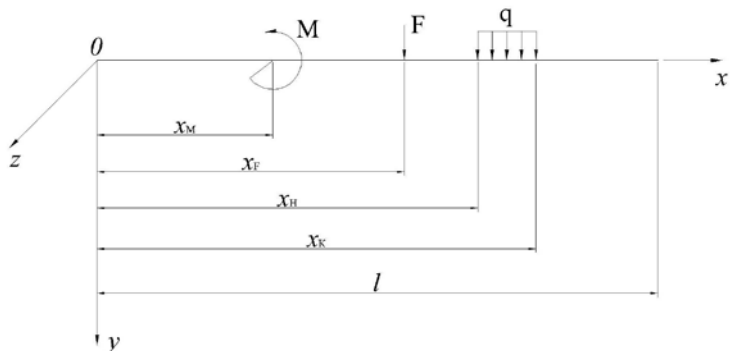


Рис. 1. Стрежень постоянного сечения в левовинтовой системе координат

В первом случае система уравнений (1) распадается на уравнение изгиба в плоскости xOz и стесненного кручения:

$$\begin{cases} EI_y w^{IV}(x) = 0; \\ EI_\omega \Theta^{IV}(x) - GI_d \Theta''(x) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В рамках алгоритма ЧА МГЭ решение системы (2) представим в матричной форме (4). В данном случае это комбинация фундаментальных решений изгиба и кручения.

Фундаментальные ортонормированные функции кручения имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{57} = ch\ kx - 1; a_{58} = \frac{sh\ kx - kx}{k}; a_{67} = k\ sh\ kx; \\ a_{77} = ch\ kx; a_{78} = \frac{sh\ kx}{k}; k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}}. \end{aligned} \quad (3)$$

		1	2	3	4	5	6	7	8	
$EI_y w(x)$	1	1	x	$-\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^3}{6}$					$EI_y w(0)$
$EI_y \varphi(x)$	2		1	$-x$	$-\frac{x^2}{2}$					$EI_y \varphi(0)$
$M_y(x)$	3			1	x					$M_y(0)$
$Q_z(x)$	4				1					$Q_z(0)$
$GI_d \Theta(x)$	5					1	x	$-a_{57}$	$-a_{58}$	$GI_d \Theta(0)$
$GI_d \Theta'(x)$	6						1	$-a_{67}$	$-a_{57}$	$GI_d \Theta'(0)$
$B_\omega(x)$	7							a_{77}	a_{78}	$B_\omega(0)$
$M_\omega(x)$	8							a_{67}	a_{77}	$M_\omega(0)$

x (4)

Во втором случае (1) будет связанной системой двух уравнений, которые с начальными параметрами образуют задачу Коши устойчивости плоской формы изгиба. Полное ее решение, которое отвечает разным граничным условиям тонкостенного стрелня, получается после ряда операций.

Из первого уравнения системы (1) вытекает зависимость между углом закручивания и второй производной прогиба

$$EI_y w''(x) + M_z \Theta(x) = Ax + B, \quad (5)$$

где константы интегрирования определяются из начальных условий

$$B = EI_y w''(0) + M_z \Theta(0); \quad A = EI_y w'''(0) + M_z \Theta'(0). \quad (6)$$

С помощью зависимости (5) система (1) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$w_{(x)}^{VI} - k^2 w_{(x)}^{IV} - \frac{k^2 M_z^2}{EI_y GI_d} w_{(x)}'' = 0. \quad (7)$$

Корнями характеристического уравнения для (7) будут два кратных действительных значения, равных нулю, два действительных равных и два мнимых:

$$t_{1,2} = 0; t_{3,4} = \pm a = \pm \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + s^4}}; \quad (8)$$

$$t_{5,6} = \pm ib = \pm i \sqrt{-\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + s^4}},$$

где

$$s^4 = \frac{M_z^2}{EI_y EI_\omega} > 0.$$

Согласно этому, общее решение уравнения (7) запишется в виде

$$w(x) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot ch ax + C_4 \cdot sh ax + C_5 \cdot \cos bx + C_6 \cdot \sin bx. \quad (9)$$

Константы интегрирования находятся из системы линейных уравнений при $x = 0$:

	1	2	3	4	5	6				
1	1		1		1		x	=	C_1	$w(0)$
2		1		a		b			C_2	$\varphi(0)$
3			a^2		$-b^2$				C_3	$-\frac{M_y(0)}{EI_y}$
4				a^3		$-b$			C_4	$-\frac{Q_z(0)}{EI_y}$
5			a^4		b^4				C_5	$\frac{k^2 M_z}{EI_y GI_d} \cdot B_\omega(0)$
6				a^5		b^5			C_6	$\frac{k^2 M_z}{EI_y GI_d} \cdot M_\omega(0)$

(10)

где последние два уравнения формируются с помощью зависимости (5).

Решение системы (10) приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
C_1 &= w(0) - \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \frac{M_y(0)}{EI_y} - \frac{1}{a^2 b^2} \cdot \frac{k^2 M_z}{EI_y GI_d} B_\omega(0); \\
C_2 &= \varphi(0) - \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \frac{Q_z(0)}{EI_y} - \frac{1}{a^2 b^2} \cdot \frac{k^2 M_z}{EI_y GI_d} M_\omega(0); \\
C_3 &= -\frac{1}{a^2(a^2 + b^2)} \left[\frac{b^2 M_y(0)}{EI_y} - \frac{k^2 M_z}{EI_y GI_d} B_\omega(0) \right]; \\
C_4 &= -\frac{1}{a^3(a^2 + b^2)} \left[\frac{b^2 Q_z(0)}{EI_y} - \frac{k^2 M_z}{EI_y GI_d} M_\omega(0) \right]; \\
C_5 &= -\frac{1}{b^2(a^2 + b^2)} \left[\frac{a^2 M_y(0)}{EI_y} - \frac{k^2 M_z}{EI_y GI_d} B_\omega(0) \right]; \\
C_6 &= -\frac{1}{b^3(a^2 + b^2)} \left[\frac{a^2 Q_z(0)}{EI_y} - \frac{k^2 M_z}{EI_y GI_d} M_\omega(0) \right].
\end{aligned} \tag{11}$$

Если подставить эти константы в уравнения (9) и пронормировать фундаментальные функции, то получится окончательное выражение для прогиба. Дифференцированием прогиба определяются другие параметры изгибно-крутильной формы потери устойчивости. В матричном виде решение системы (1) можно записать таким образом:

	1	2	3	4	5	6	7	8		
$EI_y w(x)$	1	1	x	$-A_{13}$	$-A_{14}$			$-A_{17}$	$-A_{18}$	$EI_y w(0)$
$EI_y \varphi(x)$	2		1	$-A_{23}$	$-A_{13}$			$-A_{27}$	$-A_{17}$	$EI_y \varphi(0)$
$M_y(x)$	3			A_{33}	A_{23}			A_{37}	A_{27}	$M_y(0)$
$Q_z(x)$	4			A_{43}	A_{33}			A_{47}	A_{37}	$Q_z(0)$
$GI_d \Theta(x)$	5			$-A_{53}$	$-A_{54}$	1	x	$-A_{57}$	$-A_{58}$	$GI_d \Theta(0)$
$GI_d \Theta'(x)$	6			$-A_{63}$	$-A_{53}$		1	$-A_{67}$	$-A_{57}$	$GI_d \Theta'(0)$
$B_\omega(x)$	7			A_{73}	A_{74}			A_{77}	A_{78}	$B_\omega(0)$
$M_\omega(x)$	8			A_{83}	A_{73}			A_{87}	A_{77}	$M_\omega(0)$

x

где фундаментальные ортонормированные функции совместного изгиба и кручения тонкостенного стресса принимают вид

$$\begin{aligned}
A_{13} &= \frac{a^4 - b^4 + b^4 \operatorname{ch} ax - a^4 \cos bx}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}; \\
A_{14} &= \frac{ab(a^4 - b^4)x + b^5 \operatorname{sh} ax - a^5 \sin bx}{a^3 b^3 (a^2 + b^2)}; \\
A_{17} &= \frac{(a^2 + b^2) - b^2 \operatorname{ch} ax - a^2 \cos bx}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)} \cdot \frac{M_z}{EI_\omega}; \\
A_{18} &= \frac{ab(a^2 + b^2)x - b^3 \operatorname{sh} ax - a^3 \sin bx}{a^3 b^3 (a^2 + b^2)} \cdot \frac{M_z}{EI_\omega}; \\
A_{23} &= \frac{b^3 \operatorname{sh} ax + a^3 \sin bx}{ab(a^2 + b^2)}; \\
A_{27} &= \frac{-b \operatorname{sh} ax + a \sin bx}{ab(a^2 + b^2)} \cdot \frac{M_z}{EI_\omega}; \\
A_{33} &= \frac{b^2 \operatorname{ch} ax + a^2 \cos bx}{a^2 + b^2}; \\
A_{37} &= \frac{-\operatorname{ch} ax + \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot \frac{M_z}{EI_\omega}; \\
A_{43} &= \frac{ab^2 \operatorname{sh} ax - a^2 b \sin bx}{a^2 + b^2}; \\
A_{47} &= \frac{-a \operatorname{sh} ax - b \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot \frac{M_z}{EI_\omega}; \\
A_{53} &= \left(1 - \frac{b^2 \operatorname{ch} ax + a^2 \cos bx}{a^2 + b^2}\right) \cdot \frac{GI_d}{M_z}; \quad (13) \\
A_{54} &= \left[x - \frac{b^3 \operatorname{sh} ax + a^3 \sin bx}{ab(a^2 + b^2)}\right] \cdot \frac{GI_d}{M_z}; \quad A_{57} = \frac{(\operatorname{ch} ax - \cos bx) \cdot k^2}{a^2 + b^2}; \\
A_{58} &= \frac{(b \operatorname{sh} ax - a \sin bx) \cdot k^2}{ab(a^2 + b^2)}; \\
A_{63} &= \frac{-ab^2 \operatorname{sh} ax + a^2 b \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot \frac{GI_d}{M_z}; \\
A_{67} &= \frac{(a \operatorname{sh} ax + b \sin bx) \cdot k^2}{ab(a^2 + b^2)}; \\
A_{73} &= \frac{-a^2 b^2 \operatorname{ch} ax + a^2 b^2 \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot \frac{EI_\omega}{M_z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{74} &= \frac{-ab^2 \operatorname{sh} ax + a^2 b \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot \frac{EI_{\omega}}{M_z}, \\
A_{77} &= \frac{a^2 \operatorname{ch} ax + b^2 \cos bx}{a^2 + b^2}; \\
A_{78} &= \frac{a \operatorname{sh} ax + b \sin bx}{a^2 + b^2}; \\
A_{83} &= \frac{-a^3 b^2 \operatorname{sh} ax - a^2 b^3 \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot \frac{EI_{\omega}}{M_z}; \\
A_{87} &= \frac{a^3 \operatorname{sh} ax - b^3 \sin bx}{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим задачи устойчивости при наличии чистого изгиба.

Наиболее простой задачей является действие сосредоточенных изгибающих моментов по концам шарнирно опертой балки. Величину изгибающего момента в сечении представим выражением

$$M_z = a_M \cdot M + a_F \cdot F + a_q \cdot q, \quad (14)$$

где a_M , a_F , a_q — изгибающие моменты, вызванные соответствующей поперечной нагрузкой, равной единице; M , F , q — критические значения заданной поперечной нагрузки.

Для определения критических значений нагрузки необходимо составить уравнение краевой задачи и найти корни трансцендентного уравнения [3]

$$|A_*(M, F, q)| = 0, \quad (15)$$

где $A_*(M, F, q)$ — преобразованная по алгоритму ЧА МГЭ матрица коэффициентов уравнения (12). Составим векторы состояния шарнирно опертого стржня в начальной и конечной точках, где нужно учесть заданные граничные условия/

Из матрицы X_* вытекает, что в A_* нужно обнулить 1, 3, 5 и 7 столбца, потому что они связаны с нулевыми параметрами. Из матрицы Y в матрицу X_* на место нулевых параметров можно перенести все ненулевые конечные параметры в произвольном порядке. Перенос каждого параметра сопровождается появлением в матрице коэффициентов A_* компенсирующего элемента. Он равняется коэффициенту при

переносимом параметре и находится на месте (i, j) , где i — старый адрес (номер строки матрицы Y), j — новый адрес (номер строки матрицы X_*) параметра, то есть выполняется цепочка элементарных преобразований

$$X_* = \begin{array}{|c|} \hline EI_y w(0) = 0; \\ EI_y \varphi(l) \\ \hline EI_y \varphi(0) \\ \hline M_y(0) = 0; \\ Q_z(l) \\ \hline Q_z(0) \\ \hline GI_d \Theta(0) = 0; \\ GI_d \Theta'(l) \\ \hline GI_d \Theta'(0) \\ \hline B_\omega(0) = 0; \\ M_\omega(l) \\ \hline M_\omega(0) \\ \hline \end{array} \quad Y = \square \quad \begin{array}{|c|} \hline EI_y w(l) = 0 \\ \hline EI_y \varphi(l) \\ \hline M_y(l) = 0 \\ \hline Q_z(l) \\ \hline GI_d \Theta(l) = 0 \\ \hline GI_d \Theta'(l) \\ \hline B_\omega(l) = 0 \\ \hline M_\omega(l) \\ \hline \end{array} \quad (16)$$

Из матрицы X_* вытекает, что в A_* нужно обнулить 1, 3, 5 и 7 столбца, потому что они связаны с нулевыми параметрами. Из матрицы Y в матрицу X_* на место нулевых параметров можно перенести все ненулевые конечные параметры в произвольном порядке. Перенос каждого параметра сопровождается появлением в матрице коэффициентов A_* компенсирующего элемента. Он равняется коэффициенту при переносимом параметре и находится на месте (i, j) , где i — старый адрес (номер строки матрицы Y), j — новый адрес (номер строки матрицы X_*) параметра, то есть выполняется цепочка элементарных преобразований

$$Y(l) = A(l) \cdot X(0) \rightarrow A(l) \cdot X(0) - Y(l) = 0 \rightarrow A_*(l) \cdot X_*(0, l) = 0. \quad (17)$$

Из последнего равенства вытекает трансцендентное уравнение (15). Матрица коэффициентов шарнирно опертой балки примет вид (18)/

Решение всех задач устойчивости выполним для двутаврового сечения (рис. 2) при следующих данных:

$$\begin{aligned}
 E &= 2 \cdot 10^8 \text{ kH} / \text{M}^2; & G &= 0,4E = 0,8 \cdot 10^8 \text{ kH} / \text{M}^2; & I_\omega &= 3,91 \cdot 10^{-6} \text{ M}^6; \\
 I_y &= 4505,0 \cdot 10^{-8} \text{ M}^4; & EI_\omega &= 782,0 \text{ kHM}^4; & EI_y &= 9010 \text{ kHM}^2; \\
 I_d &= 39,792 \cdot 10^{-8} \text{ M}^4; & GI_d &= 31,83 \text{ kHM}^2.
 \end{aligned}$$

$$A_* = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & l & & -A_{14} & & & & -A_{18} \\ \hline -1 & 1 & & -A_{13} & & & & -A_{17} \\ \hline & & & A_{23} & & & & A_{27} \\ \hline & & -1 & A_{33} & & & & A_{37} \\ \hline & & & -A_{54} & & l & & -A_{58} \\ \hline & & & -A_{53} & -1 & 1 & & -A_{57} \\ \hline & & & A_{74} & & & & A_{78} \\ \hline & & & A_{73} & & & -1 & A_{77} \\ \hline \end{array} \quad (18)$$

Задавая интервал для критических моментов M , несложно найти их значения из уравнения (15). Аналогично составляются матрицы коэффициентов для других граничных условий.

Для задачи, в которой действуют сосредоточенные изгибающие моменты по концам шарнирно опертой балки, по формуле С.П. Тимошенко критический момент будет равняться

$$M_1 = \left(\frac{\pi}{l} \right) \sqrt{EI_y \cdot GI_d} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{EI_\omega}{GI_d}} = 311,35 \text{ kHM}, \quad (19)$$

что точно равняется значению M_1 , определенному из уравнения (17).

Формула (19), как и формула для критической силы Эйлера, может учитывать разные условия опирания и все формы потери устойчивости стержня, если подставить в нее коэффициент приведения длины μ_n :

$$M_n = \left(\frac{\pi}{\mu_n l} \right) \sqrt{EI_y \cdot GI_d} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\mu_n l} \right)^2 \frac{EI_\omega}{GI_d}} \quad (20)$$

или собственное число формы потери устойчивости ω_n :

$$M_n = \left(\frac{\omega_n}{l} \right) \sqrt{EI_y \cdot GI_d} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_n}{l} \right)^2 \frac{EI_\omega}{GI_d}}, \quad (21)$$

при этом $\omega_n \mu_n = \pi$.

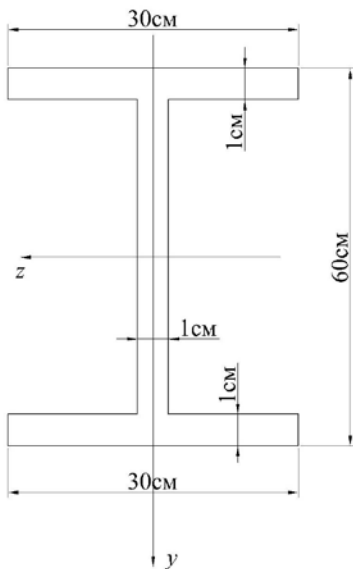


Рис. 2. К расчетам двугаврового сечения на устойчивость

Рассмотрим задачи устойчивости, когда чистый изгиб возникает на части стрелня или конструкции. В этом случае нужно совместно использовать решение задачи Коши (3) и (12) в алгоритме ЧА МГЭ.

Пусть стрелень, нагруженный в пролете сосредоточенными моментами (рис. 3), имеет одинаковые краевые условия в плоскостях xOy и xOz . Части 0-1 и 2-3 не нагружены, а 1-2 испытывает чистый изгиб. Стрелень дискретизируется на три участка, граничные точки нумеруются и стрелками указываются начало и конец каждого элемента.

Составляем матрицы начальных X_* и конечных Y параметров, где учитываются краевые условия и равенство векторов состояния в граничных точках 1 и 2.

Из матрицы X_* вытекает, что в матрице коэффициентов A_* нужно обнулить 1, 2, 5 и 7 столбцы. Сама матрица A_* квазидиагонализируется и в нее вводятся компенсирующие элементы, как и в предыдущих задачах, которые обеспечивают перенос независимых и зависимых параметров из Y в X_* . Критические моменты этой задачи оказались равными ($l = 6.м$)

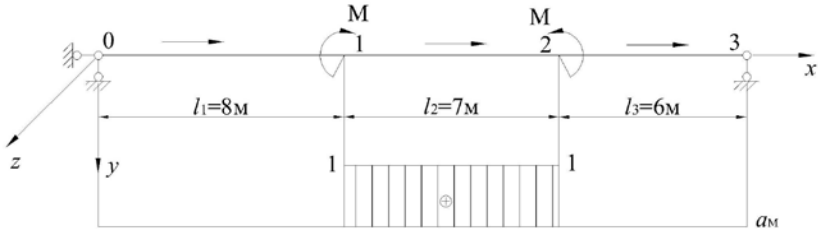


Рис. 3. Наличие на одном из участков чистого изгиба

$$M_1 / l = \frac{\lambda \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2} = \frac{1,6973 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2} kH;$$

$$M_2 / l = \frac{9,3155 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2};$$

$$M_3 / l = \frac{27,5769 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2};$$

$$M_4 / l = \frac{57,613 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2};$$

$$M_5 / l = \frac{99,5693 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2} \text{ и т.д.}$$

Для сравнения приведем значение критического момента балки (рис. 3) при условии, что моменты приложены в опорах:

$$M_1 / l = \frac{1,1174 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2}.$$

Отдельные балки хоть и имеют большое практическое применение, но не обеспечивают необходимую жесткость и прочность. Поэтому чаще используют неразрезные балки — статически неопределимые конструкции, имеющие ряд промежуточных опор.

Рассмотрим неразрезную балку (рис. 4), которая имеет две шарнирных опоры в плоскости xOy и нагружена сосредоточенными моментами по концам. Эпора единичных моментов a_M показана на рис. 4. Здесь нужно объединить два уравнения типа (12).

$X_* =$

$EI_y w_{(0)}^{0-1} = 0;$ $EI_y \varphi_{(l)}^{2-3}$
$EI_y \varphi_{(0)}^{0-1}$
$M_y^{0-1}(0) = 0;$ $Q_z^{2-3}(l)$
$Q_z^{0-1}(0)$
$GI_d \Theta_{(0)}^{0-1} = 0;$ $GI_d \Theta_{(l)}^{2-3}$
$GI_d \Theta_{(0)}^{0-1}$
$B_\omega^{0-1}(0) = 0;$ $M_\omega^{2-3}(l)$
$M_\omega^{0-1}(0)$
$EI_y w_{(0)}^{1-2}$
$EI_y \varphi_{(0)}^{1-2}$
$M_y^{1-2}(0)$
$Q_z^{1-2}(0)$
$GI_d \Theta_{(0)}^{1-2}$
$GI_d \Theta_{(0)}^{1-2}$
$B_\omega^{1-2}(0)$
$M_\omega^{1-2}(0)$
$EI_y w_{(0)}^{2-3}$
$EI_y \varphi_{(0)}^{2-3}$
$M_y^{2-3}(0)$
$Q_z^{2-3}(0)$
$GI_d \Theta_{(0)}^{2-3}$
$GI_d \Theta_{(l)}^{2-3}$
$B_\omega^{2-3}(0)$
$M_\omega^{2-3}(0)$

$Y =$

$EI_y w_{(l)}^{0-1} = EI_y w_{(0)}^{1-2}$
$EI_y \varphi_{(l)}^{0-1} = EI_y \varphi_{(0)}^{1-2}$
$M_y^{0-1}(l) = M_y^{1-2}(0)$
$Q_z^{0-1}(l) = Q_z^{1-2}(0)$
$GI \Theta_{(l)}^{0-1} = GI_d \Theta_{(0)}^{1-2}$
$GI_d \Theta_{(l)}^{0-1} = GI_d \Theta_{(0)}^{1-2}$
$B_\omega^{0-1}(l) = B_\omega^{1-2}(0)$
$M_\omega^{0-1}(l) = M_\omega^{1-2}(0)$
$EI_y w_{(l)}^{1-2} = EI_y w_{(0)}^{2-3}$
$EI_y \varphi_{(l)}^{1-2} = EI_y \varphi_{(0)}^{2-3}$
$M_y^{1-2}(l) = M_y^{2-3}(0)$
$Q_z^{1-2}(l) = Q_z^{2-3}(0)$
$GI_d \Theta_{(l)}^{1-2} = GI_d \Theta_{(0)}^{2-3}$
$GI_d \Theta_{(l)}^{1-2} = GI_d \Theta_{(0)}^{2-3}$
$B_\omega^{1-2}(l) = B_\omega^{2-3}(0)$
$M_\omega^{1-2}(l) = M_\omega^{2-3}(0)$
$EI_y w_{(l)}^{2-3} = 0$
$EI_y \varphi_{(l)}^{2-3}$
$M_y^{2-3}(l) = 0$
$Q_z^{2-3}(l)$
$GI_d \Theta_{(l)}^{2-3} = 0$
$GI_d \Theta_{(l)}^{2-3}$
$B_\omega^{2-3}(l) = 0$
$M_\omega^{2-3}(l)$

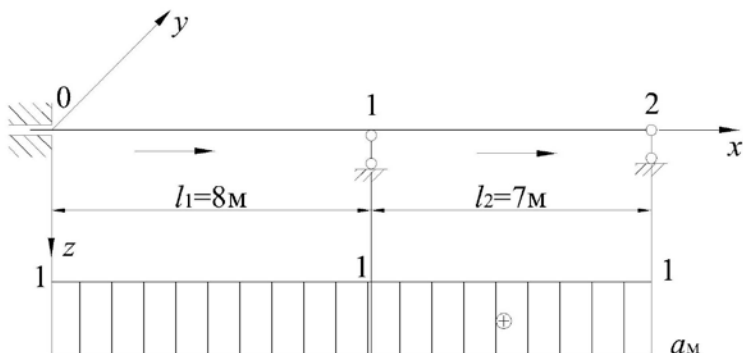


Рис. 4. Балка, нагруженная сосредоточенными моментами по концам

Матрицы начальных и конечных параметров (X и Y) в этом случае содержат 16 элементов, соответственно, матрица коэффициентов A уже будет иметь размер 16×16 .

Критические моменты неразрезной балки (рис. 4) имеют следующие значения ($l = 7 \text{ м}$):

$$M_1 / l = \frac{8,2148 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2}; \quad M_2 / l = \frac{28,108 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2};$$

$$M_3 / l = \frac{36,5256 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2}; \quad M_4 / l = \frac{58,484 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2};$$

$$M_5 / l = \frac{69,973 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2} \text{ и т.д.}$$

Если бы у этой балки отсутствовала промежуточная опора, то

$$M_1 / l = \frac{2,808 \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2}.$$

Рассмотрим задачи устойчивости при произвольной функции M_z . Данный случай более всего полно отвечает реальным задачам устойчивости. Однако проинтегрировать уравнение В.3. Власова в этих условиях не представляется возможным. Для решения таких задач предла-

гается заменить произвольный закон изменения M_z ступенчатой зависимостью, то есть система с распределенными параметрами заменяется множеством систем с постоянными параметрами. Чем больше таких упрощенных систем, тем ближе построенная модель к заданной системе. Этот подход хорошо известен и применяется не только в механике, но и в других науках. Таким образом, для решения задач устойчивости плоской формы изгиба при разной поперечной нагрузке необходимо дискретизировать стержневую конструкцию на множество элементов, определить для каждого элемента значения $M_{zi} = const$ и в рамках алгоритма ЧА МГЭ сформировать уравнение (15) из матриц A_i уравнения (12). Если будут встречаться участки с $M_z = 0$, то для них нужно привлечь матрицу A уравнения (3). Для повышения точности приближенной модели значения M_{zi} , необходимо вычислять в середине каждого участка. При большом числе участков можно получить довольно точное решение задачи с произвольной функцией M_z .

Применим данный подход к задаче С.П. Тимошенко (рис. 5).

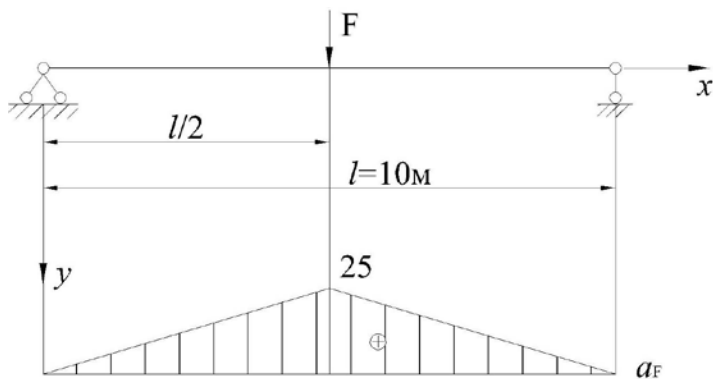


Рис. 5. Задача С.П. Тимошенко

Уравнения (1) проинтегрированы в бесконечных рядах. Для двутаврового сечения (рис. 2) при $l = 10$ м безразмерный коэффициент

$$m^2 = \frac{GI_d l^2}{EI_\omega} = 4,0708; \quad k = 31,9,$$

и первая критическая сила (приближенное значение)

$$F_1 = \frac{k\sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2} = 170,84 \text{ кН.}$$

Результаты решения задачи (рис. 5), соответствующие предложенному подходу, сведены в табл. 1.

Из табл. 1 вытекает, что первая критическая сила отличается от результата С.П. Тимошенко всего на 2,7%, то есть они практически совпадают. Также очевидно, что разбивка стержня на 20 участков уже обеспечивает достаточную точность результатов.

Таблица 1

Результаты решения задачи С.П. Тимошенко

Число участков	Критические силы $F_i = \frac{\lambda_i \sqrt{EI_y \cdot GI_d}}{l^2} \text{ кН}$		
	1	2	3
10	$F_1 = 176,5$ $\lambda_1 = 32,96$	$F_2 = 843,5$ $\lambda_2 = 157,5$	$F_3 = 1937,5$ $\lambda_3 = 361,77$
20	$F_1 = 175,5$ $\lambda_1 = 32,77$	$F_2 = 843,5$ $\lambda_2 = 157,5$	$F_3 = 1921,5$ $\lambda_3 = 358,79$
30	$F_1 = 175,5$ $\lambda_1 = 32,77$	$F_2 = 843,5$ $\lambda_2 = 157,5$	$F_3 = 1919,5$ $\lambda_3 = 358,41$
40	$F_1 = 175,5$ $\lambda_1 = 32,77$	$F_2 = 843,5$ $\lambda_2 = 157,5$	$F_3 = 1918,5$ $\lambda_3 = 358,23$
100	$F_1 = 175,5$ $\lambda_1 = 32,77$	$F_2 = 843,5$ $\lambda_2 = 157,5$	$F_3 = 1917,5$ $\lambda_3 = 358,04$

Выводы

С помощью предложенного подхода нами были решены 27 задач, которые нельзя решить по методике С.П. Тимошенко (эпюры M_z — несимметричные). Методика имеет широкие возможности при решении задач устойчивости плоской формы изгиба разных стержневых систем при любой комбинации поперечной нагрузки. Результаты отличаются высокой точностью и достоверностью. Не представляет трудностей и учет жесткостей стержней, которые непрерывно и дискретно

меняются. Процесс расчетов освобождается от применения специальных функций типа функций Бесселя, а алгоритм ЧА МГЕ может быть приспособлен для решения различных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. При этом переменные коэффициенты могут иметь разрывы 1-го рода, изломы и любой набор непрерывных функций.

Summary

The article considers with the application of numerical and analytical boundary element method for solving boundary value problems, which are described by differential equations with variable coefficients. The effectiveness of the method is demonstrated on the example of solving problems of stability plane bending of thin rods. The proposed method allows to obtain solutions of the most difficult problems of stability theory, such as removed restrictions on the boundary conditions, different transverse load and any structure of bar systems, including frames and continuous beams. On the basis of the proposed approach there were solved 27 tasks that cannot be solved by the method of S.P. Tymoshenko.

Литература

1. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов – М.: Стройиздат, 1958. – 502 с.
2. Дашенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса, ВМВ, 2010. — В 2-х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко – М.: Наука, 1971. – 807 с.