УДК 624.074

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОПОРЫ ПРОДОЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

С.Я.Бекшаев, *к.т.н.*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

Среди исследований М.Л.Бурышкина, посвященных разнообразным задачам статики и динамики инженерных сооружений, значительное место занимают задачи, связанные с изучением поведения собственных значений линейных операторов. Настоящая работа посвящена одной задаче из этой области, которая, несмотря на сравнительную элементарность постановки, приводит к любопытным и не вполне тривиальным результатам.

Рассматривается упругий стержень длины ℓ произвольного сечения, свободно опертый по концам, причем одна из опор абсолютно жесткая, вторая – упругая с коэффициентом жесткости c (рис. 1).

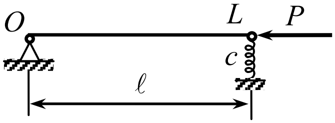

Рис. 1

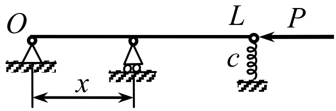

Рис. 2

Обозначим: (ξ, η, c) – стержень, вырезанный из показанного на рис. 1 сечениями, сделанными на расстояниях ξ и η от левой опоры, и опертый по концам, как на рис. 1 (обозначением исходного стержня будет $(0, \ell, c)$); (ξ, x, η, c) – стержень, образованный из (ξ, η, c) введением жесткой подвижной шарнирной опоры на расстоянии x от его левого конца (на рис. 2 показан стержень $(0, x, \ell, c)$). Критическую силу сокращаем КрС.

Требуется найти такое положение этой опоры, при котором КрС стержня $(0, x, \ell, c)$, сжатого продольной силой P, будет максимальной.

Решение этой задачи известно для частного случая $c = \infty$, т.е. для стержня $(0, x, \ell, \infty)$ с абсолютно жесткими крайними опорами, и сводится к следующему [1, гл. V].

Обозначим через P_1, P_2, … – КрС стержня $(0, \ell, \infty)$, занумерованные в порядке возрастания. Каждой КрС P_j стержня $(0, \ell, \infty)$ отвечает одна форма потери устойчивости (далее – форма), которая имеет точно $j-1$ внутренних узлов, т.е. точек с нулевым прогибом. Первые две формы схематически представлены на рис. 3. КрС стержня $(0, x, \ell, \infty)$, образованного из стержня $(0, \ell, \infty)$ введением дополнительной опоры, достигает максимума, равного P_2, тогда и только тогда, когда эта опора помещена в узле A второй формы стержня $(0, \ell, \infty)$.

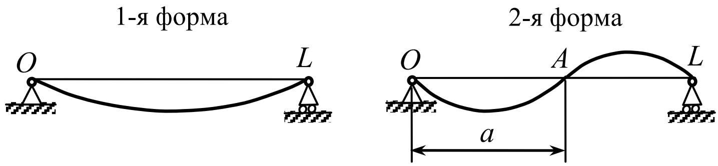

Рис. 3

Чтобы обобщить решение на рассматриваемый в данной работе более широкий класс стержней $(0, \ell, c)$, заметим, что все КрС и формы стержня $(0, \ell, \infty)$ являются КрС и формами стержня $(0, \ell, c)$. Кроме них стержень $(0, \ell, c)$ имеет еще одну прямолинейную форму, которой отвечает КрС $P^* = c\ell$. Отметим, что при совпадении одной из сил P_1, P_2, … с $P^* = c\ell$ соответствующая КрС в спектре стержня $(0, \ell, c)$ станет двукратной и появятся формы, которых не имел стержень $(0, \ell, \infty)$ (линейные комбинации с прямолинейной).

В дальнейших выводах используются известные качественные результаты о влиянии наложения связей на критические силы и формы [1, гл. 5].

1. КрС упругой системы, усиленной введением одной жесткой либо упругой связи, не может стать меньше первой и больше второй в спектре КрС системы до усиления.

2. КрС не повышается после усиления тогда и только тогда, когда связь наложена в обобщенном узле основной формы, т.е. связь не ме-

шает ее осуществлению при той же сжимающей силе. При этом работа ее реакции на этой форме равна нулю и говорят, что реакция ортогональна к форме.

3. Кратность основной КрС (число линейно независимых форм, отвечающих КрС) не изменяется в результате наложения связи тогда и только тогда, когда связь наложена в обобщенных узлах каждой из соответствующих форм.

4. КрС в результате усиления может достичь максимума, равного второй КрС системы до усиления, только тогда, когда связь наложена в обобщенном узле второй формы этой системы.

Отметим также известный результат [2]: если $\xi < \xi_1 < \eta_1 < \eta$, то КрС $(\xi, \eta, \infty) <$ КрС (ξ_1, η_1, ∞).

Обозначим $((0, a, \infty) \cup (a, \ell, c))$ разрезной стержень, образованный из стержня $(0, \ell, c)$ введением жесткой опоры в узле A второй формы стержня $(0, \ell, \infty)$ и разрезанный в этом же сечении (a – расстояние от левой опоры O до этого узла). Его спектр состоит из спектров его частей $(0, a, \infty)$ и (a, ℓ, c), причем правая часть представляет собой укороченный аналог стержня (O, ℓ, c) с прямолинейной формой и соответствующей КрС $P^{**} = c(\ell - a)$. В спектрах каждой части присутствует сила P_2. Для левой части $(0, a, \infty)$ она является основной. Обозначим $c_{\text{кр}} = P_2 / (\ell - a)$. В зависимости от жесткости c упругой опоры возможны следующие случаи.

I. $c \ge c_{\text{кр}} \Rightarrow c(\ell - a) \ge P_2$. Каждая из частей имеет КрС, равную P_2, которая является по меньшей мере двукратной для стержня $((0, a, \infty) \cup (a, \ell, c))$. Введение связи, устраняющей разрез, не повышает КрС, уменьшая лишь ее кратность. Поэтому в рассматриваемом случае $\text{МахКрС}(0, x, \ell, c) = \text{КрС}(0, a, \ell, c) = P_2$, т.е. решением задачи, как и при $c = \infty$, является узел A второй формы стержня $(0, \ell, \infty)$.

З а м е ч а н и е. При $c = c_{\text{кр}} \Rightarrow c(\ell - a) = P_2$ КрС стержня $((0, a, \infty) \cup (a, \ell, c))$, равная P_2, становится трехкратной, а после «сращивания» частей – двукратной критической силой стержня $(0, a, \ell, c)$.

II. При $c < c_{\text{кр}} \Rightarrow c(\ell - a) < P_2$ КрС стержня $((0, a, \infty) \cup (a, \ell, c))$ является особая КрС стержня (a,ℓ,c), равная $c(\ell-a)<P_2$. После введения связи, устраняющей разрез, КрС возрастет, т.к. реакция связи (две противоположные пары) не ортогональна основной форме (состоящей из двух прямолинейных участков с изломом в сечении A). Докажем, что при этом она все равно будет строго меньше P_2.

Стержень $(0,a,\ell,c_{\text{кр}})$ можно рассматривать как результат установки упругой связи с жесткостью $c_{\text{кр}}-c$ на правом конце стержня $(0,a,\ell,c)$. P_2 является второй КрС в спектре каждого из этих стержней. Тогда первая КрС стержня $(0,a,\ell,c)$ до усиления должна быть меньше либо равна P_2. Равенство означало бы, что P_2 и в спектре стержня $(0,a,\ell,c)$ была двукратной и введенная связь наложена в узле каждой из основных форм, т.е. каждая из них имеет нулевой прогиб на правом конце. Тогда и абсолютно жесткая опора не исказит этих форм, и P_2 будет как минимум двукратной в спектре стержня $(0,a,\ell,\infty)$. Последнее невозможно, т.к. он образован из $((0,a,\infty)\cup(a,\ell,\infty))$ наложением связи, не попадающей в узел одной из двух основных форм. Этим доказано, что при $c<c_{\text{кр}}$ КрС стержня $(0,a,\ell,c)$ строго меньше P_2 и является простой. При возрастании x КрС $(0,x,\infty)$ и КрС (x,ℓ,c), равная $c(\ell-x)$, монотонно убывают. Поэтому КрС $(0,x,\ell,c)$, будучи не больше старшей из них, остается меньше P_2 и является простой.

Заметим, что если теперь уменьшать в $((0,x,\infty)\cup(x,\ell,c))$ расстояние x, т.е. двигать промежуточную опору вместе с разрезом влево, то КрС обеих частей будут возрастать, т.к. левая часть укорачивается, а правая удлиняется с ростом ее критической силы $c(\ell-x)$. Так будет до тех пор, пока вторая КрС правой части, убывающая вследствие ее удлинения, не станет равной первой, которой отвечает прямолинейная форма. Соответствующее положение B опоры определяется расстоянием b, являющимся корнем уравнения

$$\text{КрС }(x,\ell,\infty)=c(\ell-x). \tag{1}$$

Оно при $c<c_{\text{кр}}$ имеет единственное решение $x=b$, лежащее в диапазоне $0\le x<a$, при $c\ell\ge P_1\Rightarrow c\ge P_1/\ell$ и не имеет решений при

$c\ell < P_1 \Rightarrow c < P_1/\ell$.

В стержне $\left((0,b,\infty) \cup (b,\ell,c)\right)$ КрС (b,ℓ,∞) является двукратной, которой отвечают первая криволинейная (как на рис. 3) форма стержня (b,ℓ,∞) и особая прямолинейная форма стержня (b,ℓ,c), а часть $(0,b,\infty)$ в обоих случаях остается недеформированной. Из них можно составить **кусочно-изогнутую линейную комбинацию с нулевым наклоном в сечении** B (см. рис. 4), которая не исказится после устранения разреза в B и будет, таким образом, основной и, как нетрудно убедиться, единственной формой для $(0,b,\ell,c)$.

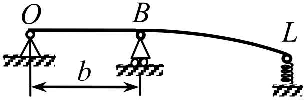

Рис. 4

Такая кусочно-изогнутая форма среди отвечающих основным КрС стержней $(0,x,\ell,c)$ при фиксированном c существует только одна. Действительно, предположив существование такого $x \neq b$, для которого форма $(0,x,\ell,c)$ также была бы кусочно-изогнутой, придем к противоречию, т.к. например, при $x > b$ эта форма отвечала бы одной из КрС стержня, полученного из $(0,b,\ell,c)$ наложением двух связей в виде жесткой опоры и жесткого защемления в сечении x, и, следовательно, КрС $(0,x,\ell,c)$ была бы не меньше КрС $(0,b,\ell,c)$. С другой стороны КрС, отвечающая такой форме равна $c(\ell - x) < c(\ell - b) =$ КрС $(0,b,\ell,c)$. Аналогично обнаруживается противоречие и при $x < b$.

Как показано в [3,4], при некоторой нормировке соответствующей формы производная от простой КрС как функции положения опоры равна

$$\frac{d}{dx}\left[\text{КрС}\,(0,x,\ell,c)\right] = R\theta(x), \tag{2}$$

где $\theta(x)$ – угол наклона формы в точке установки опоры, R – величина реакции опоры.

Форма $(0,b,\ell,c)$ как раз имеет нулевой наклон в точке B, и для нее производная (2) равна нулю, т.е. выполнено необходимое условие максимума КрС. Докажем, что во всех случаях, когда уравнение (1) имеет ненулевое решение, т.е. при выполнении строгого неравенства $c > P_1/\ell \Rightarrow c\ell > P_1$, эта точка единственная, т.е. что больше не найдется таких положений промежуточной опоры, в которых при деформации по форме, отвечающей основной КрС, R или θ обращались бы в нуль.

Равенство $R=0$ означает, что опора не действует на стержень и ее можно удалить, не изменив формы. т.е. точка, в которой $R=0$, является узлом одной из форм стержня $(0,\ell,c)$ до установки опоры. Если исключить случай кратности его основной КрС $c\ell = P_1$, эти формы являются формами стержня $(0,\ell,\infty)$, отвечающими силам P_2 и выше (либо их линейными комбинациями с прямолинейной при совпадении $c\ell = P_j$ при $j \geq 2$). Во всяком случае мы имеем дело с не с основной формой, для которой, как уже установлено, КрС < P_2.

Равенство $\theta = 0$ также следует исключить всюду, кроме точки *B*, т.к. в этих случаях, как показано выше, формы не будут кусочно-изогнутыми и по обе стороны от сечения, в котором $\theta = 0$, форма не является горизонтальным прямолинейным отрезком. Докажем, что в этом случае ей отвечает **не основная** КрС. Предположив противное и наложив связь в виде жесткого защемления в этом сечении, сделаем эту КрС двукратной, которой отвечают две независимые формы с недеформированными участками соответственно справа и слева от сечения. Следовательно, до наложения защемления должна была существовать меньшая КрС, которая и является основной.

Таким образом, **точка *B*, определяемая уравнением** (1)**, является единственной точкой, в которой производная** (2) **основной КрС равна нулю**. Легко убедиться, что КрС $(0,b,\ell,c)$ больше, чем КрС $(0,\ell,\ell,c)$ и чем КрС $(0{,}0,\ell,c)$, что при отсутствии других экстремумов означает, что найденное положение B промежуточной опоры обеспечивает максимум КрС $(0,x,\ell,c)$.

В особом случае $c = P_1/\ell \Rightarrow c\ell = P_1$ мы имеем дело с кратностью КрС P_1 в спектре стержня $(0,\ell,c)$. Поэтому, где бы ни была установлена промежуточная опора, КрС $(0,x,\ell,c)$ равна P_1.

Наконец, при $c < P_1/\ell \Rightarrow c\ell < P_1$ основной формой стержня $(0,\ell,c)$ становится прямолинейная с КрС, равной $c\ell$. Очевидно, что опора, максимально повышающая КрС, должна быть установлена на правом конце стержня, после чего КрС достигнет своего максимально возможного при одной связи значения, равного P_1.

Заключение

В результате проведенного исследования с применением преимущественно качественных методов установлено, что оптимальными в смысле повышения критической силы являются следующие положения промежуточной опоры:

1. При $c \ge c_{\text{кр}} = P_2/(\ell - a)$ – в узле A второй формы стержня $(0,\ell,\infty)$; при этом $\text{МахКрС}(0,x,\ell,c) = \text{КрС}(0,a,\ell,c) = P_2$,

2. При $P_1/\ell < c < c_{\text{кр}}$ – в точке B на расстоянии b от левой опоры, где b – корень уравнения (1); $\text{МахКрС}(0,x,\ell,c) = \text{КрС}(0,b,\ell,c) = = \text{КрС}(b,\ell,\infty) = c(\ell - b)$; $P_1 < \text{МахКрС}(0,x,\ell,c) < P_2$; Соответствующая форма кусочно-изогнутая с сопряжением в точке B;

3. При $c = P_1/\ell$ – в любой точке стержня, $\text{МахКрС}(0,x,\ell,c) = P_1 = c\ell$; соответствующая форма имеет узел на опоре;

4. При $c < P_1/\ell$ – на правом конце стержня, $\text{МахКрС}(0,x,\ell,c) = P_1 > c\ell$; соответствующая форма – первая форма стержня $(0,\ell,\infty)$.

Summary

In the paper has determined the position of the intermediate roller of a two-span rod, compressed by longitudinal force, constant along the length, which gives the highest critical load.

Литература

1. Я.Л. Нудельман Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. М.-Л., ГТТИ, 1949, 176 с.
2. Р.Курант и Д.Гильберт. Методы математической физики, т.1. – М.-Л., ГТТИ, 1951, 476 с.
3. С.Я.Бекшаев, Л.В.Кошкин, Я.Л.Нудельман. К вопросу об оптимальном расположении масс и опор вибрирующего стержня. – «Судостроение и судоремонт». Вып.VII. М., Рекламинформбюро ММФ, 1976, с. 64 – 67.

Я.Л. Нудельман, Д.М.Гитерман, С.Я.Бекшаев. Влияние расположения упругих опор на продольный изгиб многопролетного стержня. – «Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах Украинской ССР. Строительная механика и расчет сооружений». Вып.7. Киев, «Вища школа», 1976, с. 18.